

Ensino da Equação de Clairat: Uma proposta baseada na Didática da Matemática e na exploração visual com o Geogebra

Teaching the Clairat Equation: A proposal based on Mathematics Didactics and visual exploration with Geogebra

Enseñanza de la ecuación de Clairat: Una propuesta basada en la didáctica de las matemáticas y la exploración visual con Geogebra

Ana Carla Pimentel Paiva¹

Francisco Régis Vieira Alves²

Helena Maria Barros de Campos³

Diego da Silva Pinheiro⁴

Resumo

Neste artigo, foi realizada uma análise epistemológica da teoria matemática conhecida como Equações Diferenciais de Clairaut. Considerando o caráter notoriamente abstrato dessa teoria, foram empregados alguns elementos clássicos provenientes da Engenharia Didática (ED) para investigar o ensino deste objeto matemático. Assim, foram apresentadas definições que possibilitaram o cálculo e a compreensão conceitual. Ademais, recorreu-se ao uso do software Geogebra, com o intuito de evidenciar interpretações e significações

visuais dos conceitos prévios envolvidos, contribuindo, de forma qualitativa, para o processo de assimilação este conteúdo. Por fim, a partir dos estudos realizados, foi elaborada uma proposta de sequência de ensino dessa teoria matemática, contemplando a realização de atividades investigativas com o Geogebra,

Palavras-chave: Equação Diferencial de Clairaut. Engenharia Didática. Geogebra.

Abstract

¹ Doutoranda do Programa RENOEM. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará /IFCE, Fortaleza, Ceará, Brasil. carlapimentel00@gmail.com  <https://orcid.org/0000-0001-5801-9562>

² Doutor em Ensino de Matemática (Universidade Federal do Ceará -UFC – 2011). Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará /IFCE, Fortaleza, Ceará, Brasil. fregis@ifce.edu.br  <https://orcid.org/0000-0003-3710-1561>

³ Doutora em Matemática (Universidade Nacional de Educação a Distância- UNED; Madri- Espanha- 2008). Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro- UTAD, Departamento de Matemática – Centro de Investigação em Didática e Tecnologia na Formação de Formadores – UA, Vila Real, Portugal. hcampos@utad.pt  <https://orcid.org/0000-0003-2767-0998>

⁴ Doutor em Matemática – Universidade Federal do Ceará, 2021. Faculdade de Educação, Ciências e Letras do Sertão Central - FECLESC/UECE, Quixadá, Ceará, Brasil. diegodsp01@gmail.com  <https://orcid.org/0009-0001-8570-2399>

In this article, an epistemological analysis was carried out on the mathematical theory known as Clairaut's Differential Equations. Considering the notably abstract nature of this theory, some classical elements derived from Didactical Engineering (ED) were employed to investigate the teaching of this mathematical object. Thus, definitions were presented that enabled both the calculation and the conceptual understanding. Furthermore, the GeoGebra software was used with the aim of highlighting visual interpretations and meanings of the underlying concepts involved, thereby contributing qualitatively to the process of assimilating this content. Finally, based on the studies conducted, a proposal for a teaching sequence of this mathematical theory was developed, encompassing the implementation of investigative activities using Geogebra, combined with the exploration of theorems and properties related to these mathematical objects.

Keywords: Clairaut's Differential Equation. Didactic Engineering. Geogebra.

Resumen

Este artículo realiza un análisis epistemológico de la teoría matemática conocida como Ecuaciones Diferenciales de Clairaut. Dada la naturaleza notoriamente abstracta de esta teoría, se utilizaron algunos elementos clásicos de la Ingeniería Didáctica (ED) para investigar la enseñanza de este objeto matemático. Así, se presentaron definiciones que facilitaron el cálculo y la comprensión conceptual. Además, se utilizó el software Geogebra para resaltar las interpretaciones y los significados visuales de los conceptos previos involucrados, contribuyendo cualitativamente al proceso de asimilación de este contenido.

Finalmente, con base en los estudios realizados, se desarrolló una propuesta de secuencia didáctica para esta teoría matemática, que incluye actividades de investigación con Geogebra, asociadas con la exploración de teoremas y propiedades relacionadas con estos objetos matemáticos.

Palabras clave: Ecuación diferencial de Clairaut. Ingeniería didáctica. Geogebra

1 Introdução

Esta pesquisa inicial de doutorado tem como objetivo investigar e refletir sobre o ensino das equações diferenciais ordinárias (EDOs), um conteúdo matemático de caráter fundamental em virtude de sua ampla aplicabilidade tanto em fenômenos do cotidiano quanto na própria matemática.

As EDOs desempenham um papel central na modelagem do comportamento de sistemas dinâmicos que variam ao longo do tempo, como é o caso do crescimento populacional, da dinâmica de fluidos e de circuitos elétricos, além de possibilitarem a previsão do comportamento futuro dos sistemas (Boyce e DiPrima, 2010).

Em virtude de sua significativa capacidade de representar e analisar soluções para distintos problemas de modelagem matemática, as equações diferenciais integram a grade curricular obrigatória de diversos cursos de licenciatura e bacharelado, tais como

Matemática, Física, Química e Engenharias.

Além de sua aplicabilidade na modelagem de fenômenos observáveis, as equações diferenciais ordinárias desempenham papel fundamental no desenvolvimento teórico da matemática, sendo frequentemente empregadas na demonstração de lemas, teoremas e conjecturas.

Ressalta-se que os resultados apresentados neste artigo configuram avanços preliminares de uma investigação cujo objetivo é contribuir para o aperfeiçoamento do ensino deste conteúdo.

De forma mais específica, concentraremos nossa atenção em um segmento particular do estudo das EDOs: as equações diferenciais de Clairaut. Trata-se de equações diferenciais ordinárias não lineares caracterizadas pela forma geral:

$$y(x) = x \frac{dy}{dx} + f\left(\frac{dy}{dx}\right) \quad (1).$$

Nomeadas em homenagem ao matemático francês Alexis Claude Clairaut, essas equações, segundo Alves (2020), distinguem-se das demais por sua forma peculiar e pelo método de resolução, que se baseia em uma técnica relativamente simples, dispensando o

uso de procedimentos avançados próprios das equações diferenciais parciais.

Dessa forma, este trabalho tem como objetivo elaborar uma fundamentação matemática sobre o tema, articulando as dimensões cognitiva, epistemológica e didática. Para tanto, será investigado o ensino das equações diferenciais ordinárias (EDOs), com o intuito de identificar os principais desafios e obstáculos presentes nesse contexto e, a partir dessa análise, propor alternativas metodológicas que favoreçam a superação dessas dificuldades.

Assim, busca-se compreender não apenas os aspectos conceituais que caracterizam essas equações, mas também explorar possibilidades de abordagem didática apoiadas em recursos tecnológicos, como o software Geogebra, de forma a contribuir para a visualização, interpretação e melhor compreensão das propriedades e peculiaridades envolvidas nesse tema matemático.

2 Metodologia de Pesquisa

Este trabalho foi desenvolvido com base na metodologia de pesquisa

denominada Engenharia Didática (ED), que surgiu na década de 1980 como uma forma de operacionalizar os princípios de uma vertente francesa da Didática da Matemática (Paiva, Alves e Campos, 2024).

Essa metodologia compreende a elaboração de um quadro teórico mais amplo sobre ensino e aprendizagem, permitindo a concepção de situações didáticas e oferecendo um referencial para a análise subsequente do material empírico (ALVES, 2016b).

A estrutura metodológica proposta pela ED possibilita investigar, de forma qualitativa, o fenômeno de interesse, articulando a definição dos objetivos de pesquisa com a identificação e análise dos principais problemas relacionados ao ensino do tema abordado.

Na fase inicial da ED, denominada análises preliminares, busca-se compreender a organização vigente do ensino e seus efeitos, além de identificar limitações e potencialidades de recursos didáticos, como, por exemplo, as restrições do software GeoGebra na representação simbólica automática de soluções de equações diferenciais ordinárias mais complexas ou de ordem superior (Almouloud, 2007).

Ainda nessa etapa, são estabelecidas as dimensões principais a serem investigadas, compreendendo a dimensão epistemológica, que trata das características do conteúdo, desde sua evolução histórica até sua fundamentação teórica; a dimensão cognitiva, que considera as características cognitivas dos estudantes, prevendo possíveis obstáculos e concepções alternativas; e a dimensão didática, que aborda aspectos relacionados ao funcionamento do sistema de ensino (Alves, 2018).

Com base nessa análise, foi realizado um estudo aprofundado sobre as equações diferenciais de Clairaut, visando identificar os principais desafios para seu ensino e, a partir disso, delinear alternativas metodológicas adequadas.

Entre os obstáculos epistemológicos associados ao estudo de equações diferenciais, Javaroni (2010) destaca as dificuldades de compreensão do conceito de diferenciabilidade de funções, considerado abstrato por parte dos estudantes.

Rachelli e Bisognin (2017) complementam que dificuldades em articular as representações analítica e gráfica da derivada podem comprometer a apropriação dos conceitos de equações diferenciais.

Diante do contexto apresentado, delineou-se uma proposta de ensino que enfatiza a visualização dos conceitos relacionados às equações de Clairaut, empregando o Geogebra como ferramenta de apoio, ao mesmo tempo em que se consideraram possíveis dificuldades dos estudantes no uso do software, como limitações de familiaridade com suas funcionalidades, que podem comprometer o engajamento nas atividades propostas.

Na segunda fase da ED, denominada análise a priori, é realizada a elaboração e análise de uma sequência de situações didáticas, com o objetivo de auxiliar os estudantes a superarem obstáculos epistemológicos previamente identificados, além de validar as hipóteses estabelecidas na fase preliminar (Alves, 2016a).

Segundo Brousseau (1986), as situações didáticas devem ser elaboradas de forma análoga ao processo histórico de constituição do conhecimento matemático, ou seja, à maneira como os conceitos foram gradualmente construídos e formalizados ao longo do tempo, de modo a favorecer mecanismos de adaptação, assimilação e equilíbrio por parte dos alunos.

Portanto, para a sistematização dessas situações didáticas, optou-se por recorrer à Teoria das Situações Didáticas (TSD), que fornece fundamentação teórica para o desenvolvimento e organização das etapas de ensino, bem como para a definição de estratégias de mediação do conhecimento matemático.

A etapa seguinte, conforme Artigue (1996), é a experimentação, na qual ocorre a implementação prática das situações didáticas elaboradas, permitindo a coleta de dados empíricos que subsidiarão a fase final da Engenharia Didática (ED), denominada análise a posteriori e validação.

Por fim, na etapa final da Engenharia Didática (ED), denominada análise a posteriori e validação, procede-se à análise da produção dos estudantes e de seu comportamento durante o desenvolvimento das situações propostas, com o propósito de confrontar os dados previstos na análise a priori com os resultados empiricamente observados (Almouloud, 2007).

Importa destacar que o presente estudo se limita às fases iniciais da ED, em particular às análises a priori, haja vista que as atividades didáticas

elaboradas ainda não foram implementadas.

Nesse sentido, a metodologia de pesquisa adotada, Engenharia Didática, orientou a organização global das etapas investigativas, enquanto a Teoria das Situações Didáticas (TSD), que será apresentada detalhadamente na seção subsequente, forneceu o embasamento teórico indispensável para a concepção e a estruturação das situações didáticas propostas.

2.1 Teoria das Situações Didáticas - TSD

A Teoria das Situações Didáticas - TSD, desenvolvida por Guy Brousseau na década de 1970, dedica-se ao estudo da dinâmica da interação entre três componentes fundamentais do processo de ensino: o aluno, o professor e o saber matemático. Essa relação tripartite é formalizada no que se denomina Triângulo Didático, conceito central na teoria, que busca compreender como esses elementos se articulam para promover a construção do conhecimento (Alves, 2016a).

A TSD propõe uma análise detalhada das condições em que essa interação ocorre, destacando o papel do milieu (meio) e as situações propostas para favorecer o desenvolvimento cognitivo. Dessa forma, a teoria oferece

um referencial robusto para a elaboração e implementação de situações didáticas eficazes no ensino da matemática (Brousseau, 2008).

Nesse sentido, Batista, Barreto e Sousa (2021) enfatizam que a aplicação da TSD requer um planejamento cuidadoso do milieu por parte do professor. Assim, a teoria propõe a interação entre professor, alunos e saber matemático em um ambiente estruturado e intencionalmente planejado.

A Teoria propugna a interação entre o professor, os alunos e o saber matemático em um meio planejado pelo docente, para que seus discentes elaborem conhecimentos autonomamente, os quais serão retomados ao final da tarefa, de modo que seja possível aproximá-los do saber institucionalizado (Batista, Barreto e Sousa, 2021, p. 578).

A importância do planejamento intencional do ambiente de ensino como condição fundamental para que os alunos possam construir seu próprio conhecimento de maneira ativa e reflexiva. Ao retomar os conhecimentos elaborados ao final da tarefa, o processo favorece a conexão entre as experiências dos estudantes e os saberes formalizados, promovendo uma apropriação mais profunda e significativa do conteúdo matemático.

Nesse contexto, conforme Brousseau (2008), para favorecer uma

assimilação mais eficaz dos conceitos, é imprescindível promover a interação entre o aluno e o conhecimento. É justamente nesse processo que pode emergir a chamada situação *adidática*, que possibilita a apropriação efetiva do saber pelo estudante.

A situação *adidática*, pode ser configurada por meio de desafios ou de dispositivos elaborados com o objetivo de garantir a efetividade do processo de construção do conhecimento. Assim, a situação didática é definida como “um modelo de interação de um sujeito com um meio determinado” (Brousseau, 2008, p. 20).

Complementando essa perspectiva, Batista, Barreto e Sousa (2021) destacam que a teoria prioriza o papel do estudante como agente ativo na produção do seu conhecimento matemático, ao mesmo tempo em que enfatiza a responsabilidade do professor na criação de um meio apropriado, que possibilite aos alunos, a partir de seus saberes e experiências prévias, apropriar-se dos conceitos matemáticos.

Portanto, torna-se imprescindível a formalização do contrato didático, que, segundo Brousseau (2008), consiste em um acordo, verbal ou escrito, que

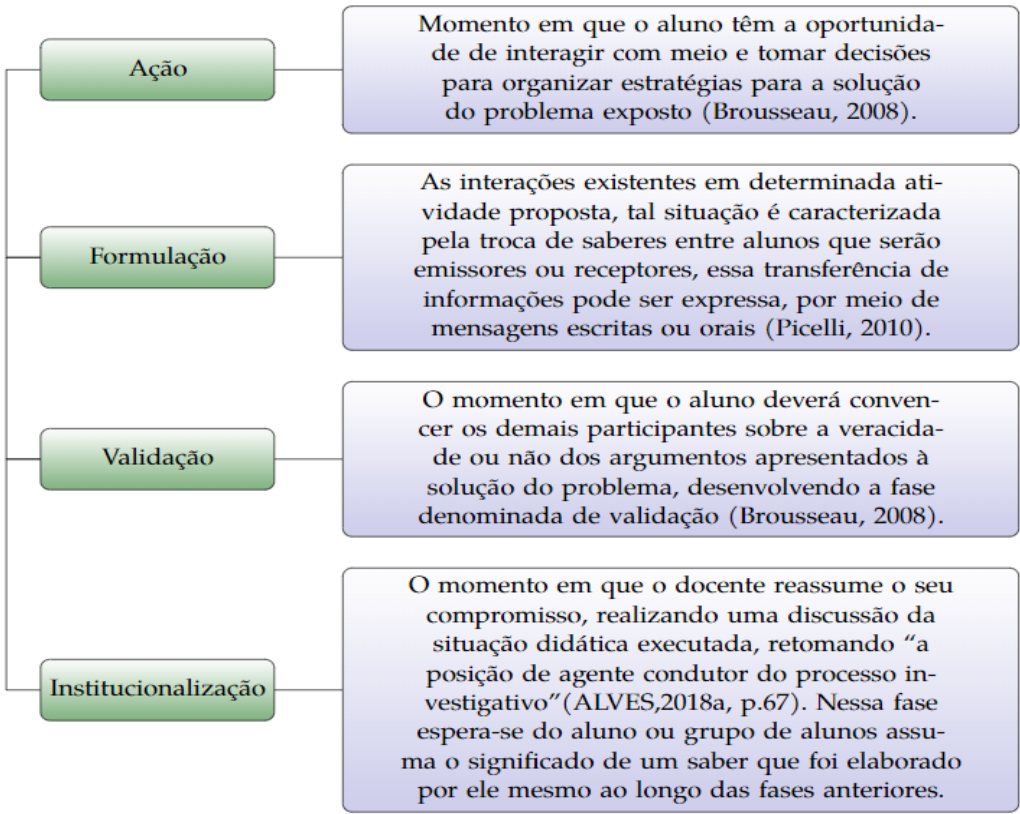
estabelece de forma clara os papéis, responsabilidades, lugares e funções do professor, do aluno e dos demais envolvidos na situação didática. Esse contrato configura um sistema de obrigações mútuas que orienta as interações, garantindo um funcionamento equilibrado e mediado pelo saber matemático.

Adicionalmente, destaca-se o conceito de devolução, que corresponde ao momento em que o professor delega ao aluno uma parcela da responsabilidade pelo progresso de seu próprio conhecimento. Nesse processo, espera-se que o estudante atue de maneira ativa, participando, interagindo e se engajando efetivamente nas situações propostas, promovendo assim a autonomia e o protagonismo no desenvolvimento do saber (Brousseau, 2008).

Após a formalização do contrato didático e a compreensão da devolução por parte do aluno, avança-se para as fases propostas pela teoria de ensino. O processo de transmissão do saber matemático, segundo a TSD, é dividido em dialéticas que podem ser organizadas conforme as situações de ação, formulação, validação e

institucionalização, possibilitando a construção do conhecimento, conforme sistematização do processo de apresentado na figura 1.

Figura 1- Fases dialéticas da Teoria das Situações Didáticas - TSD



Fonte: Paiva, Alves e Campos (2024, p.5).

Dessa forma, a TSD configurou-se como a opção conceitual adequada para a elaboração da sequência didática apresentada neste estudo. A seguir, direcionamos o foco para a fundamentação matemática, que fornecerá os conceitos e propriedades

essenciais para o desenvolvimento das atividades propostas.

3. Fundamentação Teórica Matemática

A forma geral de uma equação diferencial de ordem n é dada por:

$$P_0(t)\frac{d^ny}{dt^n} + P_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + P_{n-1}(t)\frac{dy}{dt} + P_n(t)y = G(t) , \tag{2}$$

em que $P_0(t), P_1(t), \dots, P_{n-1}(t)$ e $P_n(t)$ são funções reais e contínuas em algum

intervalo I aberto pertencente ao conjunto dos números reais.

O ensino de equações diferenciais geralmente tem início com o estudo das equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Dentre essas, algumas podem ser solucionadas por métodos elementares, tais como a separação de variáveis ou o uso de

fatores integrantes. A seguir, apresenta-se um exemplo de equação diferencial de primeira ordem $\frac{dy}{dx} = xy^2$ (3) e o respectivo mecanismo para determinar a solução.

Exemplo 1:

$$\frac{dy}{dx} = xy^2 \Rightarrow \frac{dy}{y^2} = xdx \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2} = \int xdx \Rightarrow -1/y = \frac{1}{2}x^2 + C \quad (4)$$

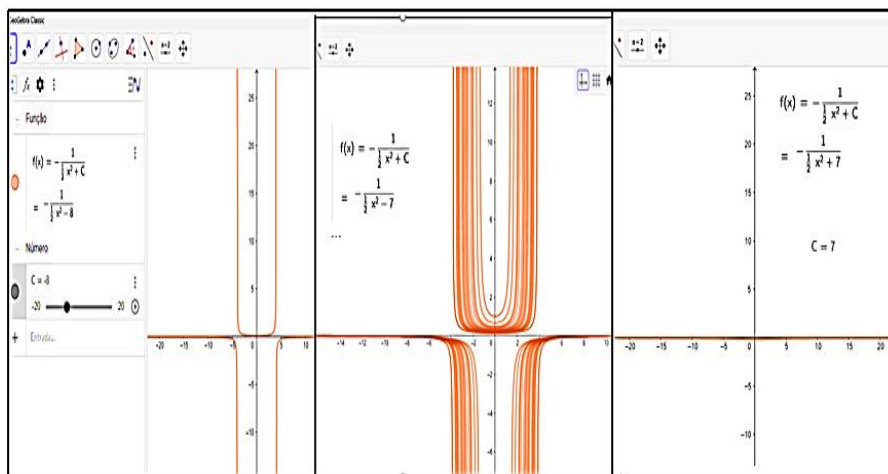
, em que C é uma constante dos números reais.

Logo, o valor de $y = -\frac{1}{\frac{1}{2}x^2 + C}$ (5) representa a solução geral da EDO. A expressão encontrada, trata-se de uma família de curvas que diferem de acordo com os valores da constante C .

Para determinar uma solução

particular, é necessário dispor de uma condição inicial ou de um ponto específico pelo qual a solução passa. A partir dessa condição, é possível calcular o valor da constante C e, assim, obter a solução específica da equação. Na figura 2, mostra-se a família das curvas que são soluções da equação $\frac{dy}{dx} = xy^2$.

Figura 2 - Exemplificação de uma solução de equação diferencial $\frac{dy}{dx} = xy^2$ de primeira ordem, na primeira imagem (à esquerda) temos a solução quando a constante $C = -8$, na segunda imagem exibimos o rastro quando criamos um controle deslizante para a constante, variando de -20 a 20, e por fim, na direita, temos a solução da equação quando $C = 7$.



Fonte: Elaborado pelos autores

Conforme ilustrado na figura 2, observa-se a existência de uma infinidade de soluções para a equação diferencial ordinária apresentada. Na primeira imagem dessa figura, identifica-se a solução correspondente ao valor $C = -8$. Na imagem seguinte, visualizam-se as demais soluções obtidas a partir da variação dos valores da constante C , na expressão 5.

Por fim, verifica-se um fenômeno particular quando a constante assume valores positivos: as soluções tendem a aproximar-se do valor nulo, comportamento este que se explica pelo fato de o limite lateral da função tender a valores infinitos, tanto à direita quanto à esquerda.

Dando continuidade ao estudo de equações diferenciais, é possível avançar para as equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, as quais demandam técnicas mais elaboradas, como a substituição de variáveis ou o método dos coeficientes indeterminados.

No entanto, o nosso objeto matemático de estudo que são as equações de Clairaut, são equações diferenciais primeira ordem, que se destacam por dispor de um algoritmo interessante e único de resolução.

3.1 Equação Diferencial Ordinária de Clairaut

A forma geral de uma equação de Clairaut é dada por:

$$y = xy' + f(y') \quad (6),$$

em que y é uma função de x , e y' é a derivada da função em relação a x , e a função representada por f geralmente trata-se uma função de y' (De Figueiredo e Neves, 1979).

O método de Clairaut envolve a substituição $y' = t(x)$ (7), transformando a equação de Clairaut em uma equação algébrica em termos de p e y . Conforme Alves (2020), após resolver essa equação em relação a t em função de y , torna-se possível determinar a solução geral da equação original, que pode ser expressa na forma:

$$y = f(t) + Ct \quad (7),$$

em que f é uma função de t e C representa uma constante arbitrária.

De modo mais sucinto,

$y = xy' + f(y') \Rightarrow y = xt(x) + f(t)$ (8), derivando ambos os lados e utilizando as propriedades da regra do produto e regra da cadeia, obtemos: $y = xt(x) + f(t) \Rightarrow y' = 1 \cdot t(x) + x \cdot \frac{dt}{dx} + f'(t) \cdot \frac{dt}{dx}$ (9), como $y' = t(x)$ e colocando $\frac{dt}{dx}$ em evidência, temos que:

$$\frac{dt}{dx} \cdot [x + f'(t)] = 0 \quad (10).$$

1º Caso: $\frac{dt}{dx} = 0 \Rightarrow t(x) =$ constante, logo

$$y' = c, y = x \cdot c + f(c) \quad (11)$$

o que denominaremos de solução não – singular. Nesse caso, essa solução se trata de uma família de retas não paralelas.

2º Caso:

$$[x + f'(t)] = 0 \Rightarrow x = -f'(t) \quad (12),$$

$$y = -f'(t) \cdot t + f(t) \quad (13),$$

o que denominaremos de solução singular, cujo método permite deixarmos em termos de x e y .

Desta forma, aplicaremos esse método para resolver a equação de Clairaut:

$$y - xy' = \ln y' \quad (14).$$

Se

$y - xy' = \ln y' \Rightarrow y = xy' + \ln y'$ (15), utilizamos o fato que a solução de uma equação de Clairaut é sempre dada por uma família de retas e por uma solução singular para encontrarmos as soluções.

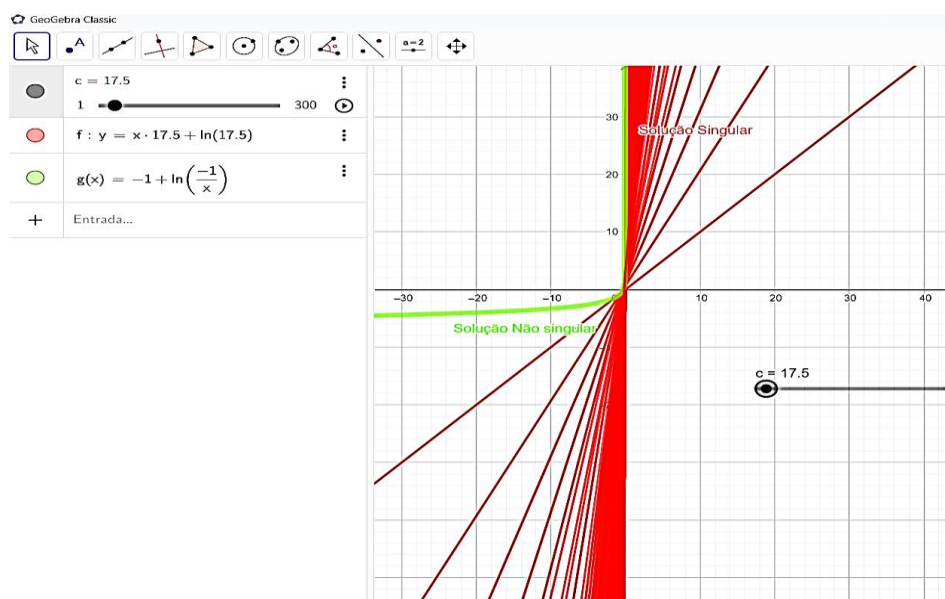
Pelo primeiro caso já dispomos que temos a solução singular, isto é a família de retas dada por $y = x \cdot c + \ln(c)$ (16).

Em relação a solução singular:

$$\begin{cases} x = f'(t) = 1/t & (17) \\ y = -\frac{1}{t} \cdot t + \ln(t) = -1 + \ln(t) & (18) \end{cases}$$

Assim, $y = -1 + \ln\left(\frac{1}{1/t}\right) = -1 + \ln\left(\frac{-1}{x}\right)$ (19) é solução com $x < 0$.

Figura 3- Representação das soluções singulares e não singulares da edo $y - xy' = \ln y'$



Fonte: Elaborado pelos autores

Na figura 3, utilizando o Geogebra, mostra-se as soluções da equação de Clairaut $y - xy' = \ln y'$. O emprego de recursos de visualização como esse revela-se particularmente relevante para o estudo de equações diferenciais, uma vez que permite representar graficamente as soluções e compreender, de modo mais aprofundado, o comportamento de cada solução. Essa visualização facilita a identificação de aspectos qualitativos, como a existência de soluções singulares e famílias de soluções gerais, que nem sempre são imediatamente evidentes apenas pela análise algébrica.

Nesse contexto, observa-se que a integração de ferramentas tecnológicas ao processo de ensino pode favorecer a compreensão dos conceitos teóricos

envolvidos, ampliando as possibilidades de análise e reflexão por parte dos estudantes. Essa abordagem será aprofundada na seção seguinte, em que se detalham estratégias didáticas que articulam teoria e prática para promover um estudo qualitativo mais eficaz dessas equações diferenciais.

4 Planejamento e Estrutura das Atividades com o Geogebra no ensino de Equações Diferenciais de Clairaut

Nesta seção, apresenta-se a proposta de ensino das Equações Diferenciais Ordinárias de Clairaut. Para tanto, parte-se da definição de sequência didática como um conjunto estruturado de atividades e estratégias de ensino organizadas com o objetivo de alcançar metas educacionais específicas. Em geral, essa organização se

desenvolve em etapas progressivas, planejadas de forma a favorecer a construção gradativa do conhecimento pelos alunos (Brousseau, 1986).

Ademais, a elaboração de uma sequência didática eficaz requer a definição precisa dos objetivos educacionais a serem alcançados, bem como uma análise detalhada das características e necessidades dos estudantes envolvidos. Com base nesse diagnóstico, é possível selecionar, planejar e organizar de forma criteriosa as atividades e os recursos didáticos que serão utilizados ao longo da sequência, visando otimizar o processo de ensino do conteúdo proposto.

Assim, apresentaremos uma sequência de situações problema com equações de diferenciais ordinárias de Clairaut, se baseando no seguinte ponto de vista:

(...)para garantir, minimamente, o alcance desses objetivos, o pesquisador ou o construtor de situações-problema necessita escolher as variáveis didáticas que podem provocar as mudanças desejadas, no que diz respeito ao processo de ensino e de aprendizagem do objeto matemático (Almouloud, 2007, p. 174).

Entre as variáveis microdidáticas de caráter local às quais se atribui especial relevância neste estudo, destacam-se, em primeiro lugar, os conteúdos matemáticos implicados nas atividades propostas, bem como os saberes prévios e habilidades necessários para a apropriada utilização dos recursos tecnológicos empregados.

A seguir, apresenta-se a primeira situação didática considerada para análise, a qual permitirá a investigação aprofundada dessas dimensões.

Situação (I): Encontre a solução da equação diferencial $y - xy' = \ln y'$ (20), verifique se a equação se trata ou não de uma equação de Clairaut e, com o auxílio do Geogebra por meio da simulação “Campo de vetores”, determine o gráfico da solução.

Nesta situação didática, objetiva-se que o aluno reconheça as características próprias de uma equação de Clairaut e aplique o método algébrico específico para sua resolução. Assim, na etapa de ação, espera-se que o participante assuma a responsabilidade de solucionar o problema apresentado.

Dessa forma, espera-se que o aluno reconheça tratar-se de uma equação de Clairaut, que a derivada da

equação $y - xy' = \ln y'$ (20) é igual a expressão:

$$y' = f(y') \quad (21).$$

Além disso, o aluno deve estabelecer a relação com a função $f(t)$:

$$f(t) = \ln t \Rightarrow f'(t) = 1/t \quad (22).$$

Na fase dialética posterior, a formulação, espera-se que ocorra uma interação dinâmica entre o aluno e o *milieu*, entendido como o conjunto de elementos que desafiam o sujeito a resolver as situações-problema apresentadas. Nesse contexto, o *milieu* atua como um sistema antagônico ao aluno, estimulando-o a buscar soluções por meio do enfrentamento e da superação de obstáculos.

Deste modo, a linguagem inicialmente empregada pelo aluno passa por um processo de formalização, ajustando-se às exigências das informações que precisam ser comunicadas.

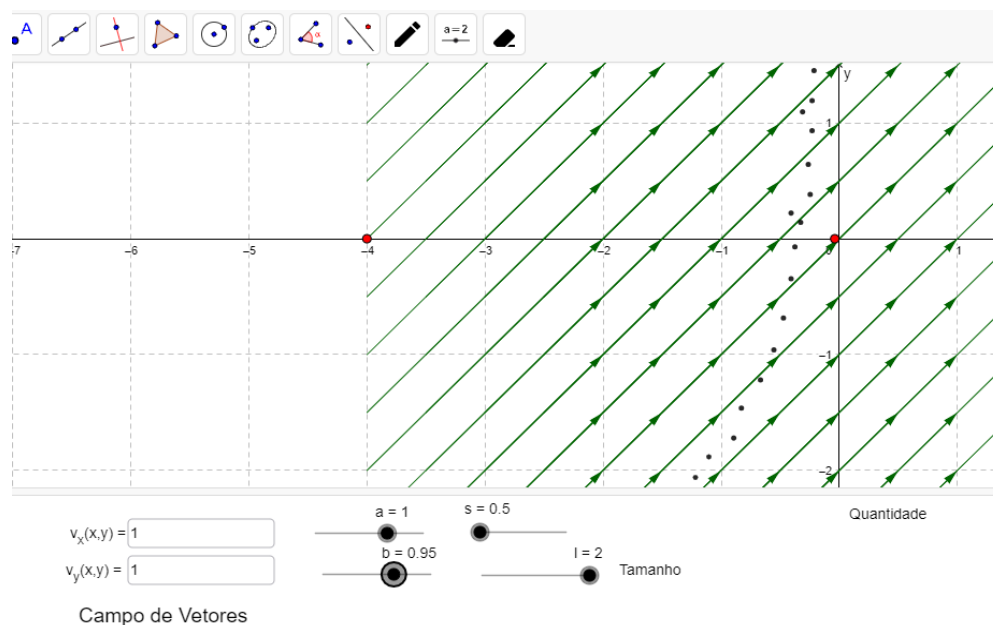
Conforme Brousseau (1986), o objetivo consiste em promover a

construção do conhecimento pelo aluno por meio de sua adaptação gradual a um ambiente caracterizado por dificuldades e desequilíbrios, desenvolvendo, assim, uma postura investigativa análoga àquela adotada por um pesquisador.

Para tanto, é necessário que os alunos se apropriem de novos conhecimentos que lhes permitam elaborar argumentos passíveis de validação. Assim, a partir da substituição obtida na etapa anterior, os alunos devem identificar e determinar as soluções singulares, expressas por $y = -1 + \ln(-1/x)$ (23) e a expressão da solução não singular $y = x \cdot c + \ln(-1/x)$, com $x \neq 0$ e $x < 0$ (24).

Ainda na fase da formulação, espera-se que os alunos tentem correlacionar as soluções e os gráficos das soluções com o campo de vetores da equação diferencial, conforme exibido na figura 4.

Figura 4 - Representação do Campo de Vetores da equação diferencial $y - xy' = \ln y'$



Fonte: Elaborado pelos autores

A fase subsequente, a validação tem como objetivo principal convencer os demais participantes acerca da veracidade dos argumentos utilizados na resolução do problema. Além disso, essa etapa possibilita ao aluno demonstrar ou refutar as conjecturas formuladas, valendo-se de uma linguagem matemática adequada e rigorosa.

Por fim, na etapa de devolução, o pesquisador tem a responsabilidade de destacar a relação entre a equação estudada e os campos vetoriais. Esse momento é fundamental para evidenciar como a equação pode ser interpretada como a representação de uma família de

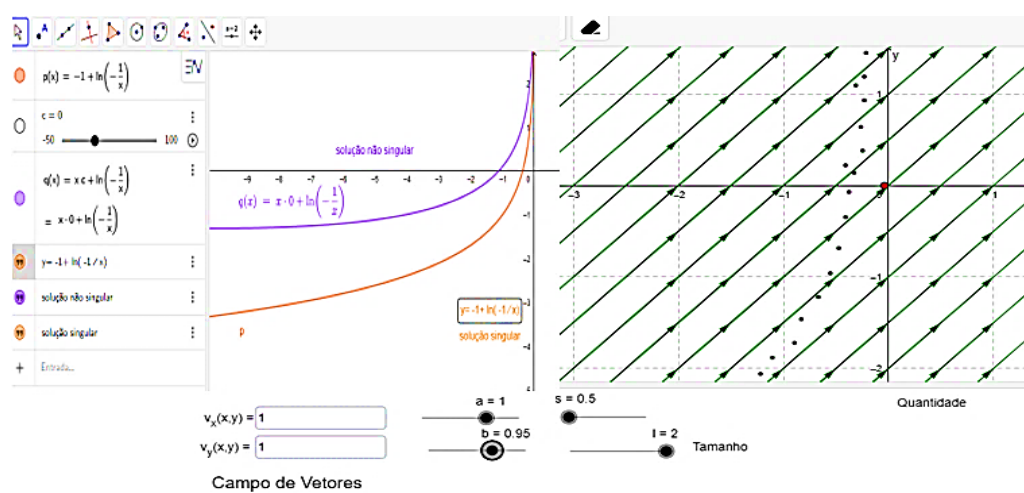
curvas integrais associadas a um campo vetorial específico, promovendo uma compreensão mais profunda da estrutura geométrica subjacente.

A conexão entre equações diferenciais e campos vetoriais permite que os alunos visualizem graficamente as soluções por meio das curvas integrais, facilitando a análise qualitativa do comportamento das soluções sem a necessidade de resolver explicitamente a equação. Essa abordagem pode contribuir para ampliar a compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos, promovendo uma visão integrada entre a álgebra, a geometria e a análise.

Além disso, a devolução proporciona um espaço para a reflexão crítica, onde o pesquisador pode discutir as implicações dessa interpretação no contexto do ensino das equações Clairaut. Tal prática pode favorecer a

consolidação do conhecimento, ao relacionar aspectos teóricos e visuais, e estimula o desenvolvimento do pensamento matemático investigativo entre os alunos.

Figura 5- Exemplificação de relação Equação Clairaut e Campo Vetorial



Fonte: Elaborado pelos autores

A Figura 5 apresenta uma análise do campo vetorial que pode ser realizada pelos alunos na fase de formulação ou, caso isso não ocorra, ser conduzida pelo professor durante a devolução. Essa análise permite estimar o gráfico da solução não trivial da equação diferencial. Por fim, torna-se possível comparar essa solução com a família de curvas integrais, favorecendo a compreensão da relação geométrica que se estabelece entre esses conceitos.

De forma geral, dada equação $y = xy' + f(y')$ (26), definimos um

campo vetorial $F(x, y) = (1, y' + f(y'))$ (27).

A componente horizontal $F_1(x, y) = 1$ (28) representa o crescimento na direção do eixo x , e a componente vertical $F_2(x, y) = y' + f(y')$ (29) representa o crescimento na direção do eixo y de acordo com as derivadas.

Portanto, as soluções das equações de Clairaut correspondem às curvas integrais do campo vetorial $F(x, y)$. Dessa forma, a interpretação geométrica dessas equações pode ser

compreendida a partir da análise do campo vetorial específico.

Situação (II): Encontrar algebricamente as soluções singulares e não singulares da equação $xy' - y = e^{y'}$ (30), e posteriormente as analisar no Geogebra.

Na figura 6, apresenta-se o gráfico das soluções singulares e não singulares pertencentes a situação II. Em relação as fases dialéticas da TSD, espera-se na ação, o comprometimento ao efetuar alguns cálculos, partindo do pressuposto que:

$y = xy' - e^{y'}$ (31), isto é, realizando a substituição de y' por t , encontrando $y = e^t \cdot t - e^t$ (32), como solução não singular, e restando ainda retornar a expressão em função do parâmetro x .

Prosseguindo, com o intuito de solucionar a situação problema (2), na formulação, o aluno deve estabelecer como solução não singular a expressão:

$y = xc - e^c$ (33), em que c é uma constante real.

Posteriormente, o aluno deve analisar que:

$$e^t = x \Rightarrow t = \ln x \quad (34),$$

portanto a solução não singular é dada

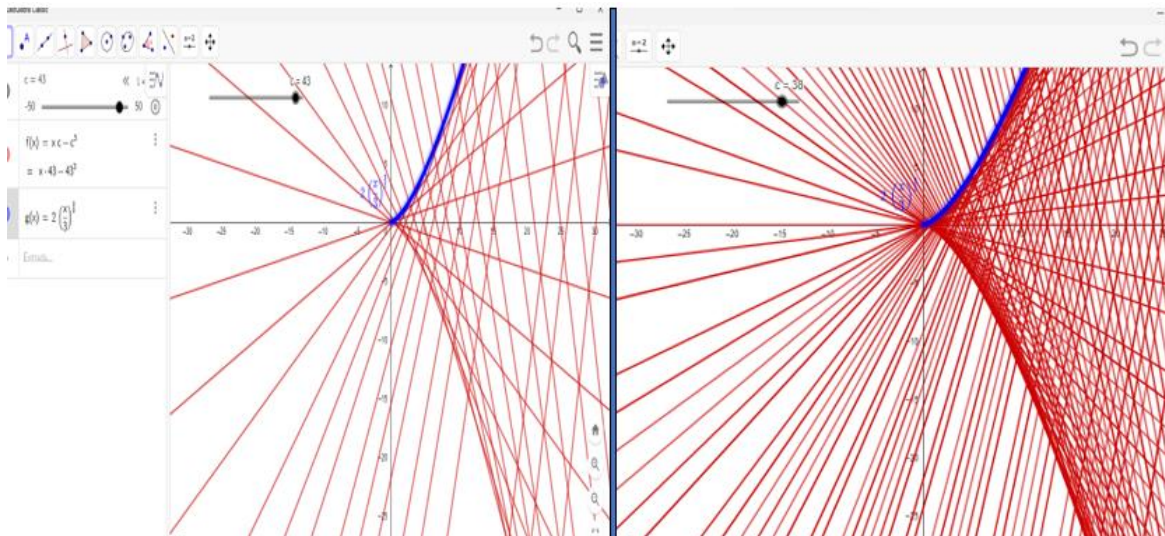
pela seguinte expressão $y = e^t \cdot t - e^t$ (35), em função do parâmetro t ou o aluno pode retornar a expressão em função do parâmetro x .

Na etapa da validação, espera-se que o aluno compartilhe suas experiências e confronte as soluções obtidas pelos demais participantes. Nesse contexto, observa-se que a solução não singular admite uma infinidade de soluções, cujo comportamento pode ser visualizado por meio do recurso *rastro* disponibilizado pelo software. Essa visualização possibilita discutir e estabelecer relações entre os significados algébrico e geométrico associados a essas equações.

Por fim, na etapa da institucionalização, cabe ao pesquisador realizar uma análise crítica dos argumentos apresentados, a fim de verificar a correção das soluções obtidas, bem como avaliar as concepções formuladas pelos alunos acerca dessas equações.

Situação (III): Resolver a equação $y = xy' + (y')^3$ (36), e representar geometricamente as soluções no software Geogebra.

Figura 6 - Representação das soluções da equação $y = xy' + (y')^3$, na forma não singular (cor vermelha) representada por $y = xc - c^3$ e a representação singular de equação $y = 2\left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ (cor azul).



Fonte: Elaborado pelos autores

Em relação a essa situação problema, deseja-se que os participantes, na etapa de ação, substituam $y'(x)$ por t na equação $y = xy' + (y')^3$. Assim, encontrem a expressão $y = xc - c^3$ (37) que se refere a solução não singular. E posteriormente, estabeleçam, $y = -f'(t).t + f(t)$ (38).

Portanto, espera-se que os alunos desenvolvam na formulação, os cálculos a partir da seguinte equação $y = 3t^2.t - t^3 = 2t^3$ (39). E por fim, determinem a solução singular partindo do pressuposto que $x = 3t^2 \Rightarrow t = \left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$ (40). Encontrando a expressão da solução singular $y = 2\left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ (41).

As etapas subsequentes, de validação e devolução, têm lugar quando os alunos compartilham os resultados obtidos e verificam se as expressões construídas correspondem às soluções singulares e não singulares da equação.

Nesse processo, a interação entre os participantes assume papel fundamental, pois permite confrontar diferentes estratégias de resolução e analisar criticamente os caminhos percorridos até a obtenção das soluções. Essa troca de argumentos contribui para uma compreensão mais aprofundada, articulando os aspectos algébricos e geométricos presentes nas soluções singulares e não singulares.

Considerações Finais

Esta pesquisa, inserida no âmbito inicial do doutorado, visa sugerir uma proposta de ensino para o conceito de Equações Diferenciais Ordinárias de Clairaut, fundamentada nos princípios da Engenharia Didática. Além disso, a metodologia adotada apoia-se na Teoria das Situações Didáticas, que norteia o viés da proposta de ensino apresentada.

Após a exposição da fundamentação metodológica, procedeu-se a um estudo do campo epistêmico matemático, no qual foram identificadas as operações fundamentais para o cálculo do conceito em análise, tais como diferenciação, aplicação da regra da cadeia, derivação implícita e manipulação algébrica de expressões funcionais.

Essas operações matemáticas exigem a mobilização constante de conhecimentos prévios relativos à diferenciabilidade de funções, com ênfase nas funções polinomiais, exponenciais e logarítmicas. A análise do ensino das equações diferenciais evidenciou que sua abordagem é realizada de maneira marcadamente abstrata e predominantemente algébrica, o que pode dificultar a compreensão por

parte dos estudantes.

Por essa razão, e norteados pelas investigações de Alves (2016a;2016b;2020), optamos por uma proposta de ensino que envolvesse a visualização de alguns conceitos das equações diferenciais, utilizando o software Geogebra. Realizamos uma análise das interfaces do software que melhor elucidam esse conteúdo.

Na sequência, foram elaboradas construções dinâmicas que possibilitaram um desenvolvimento intuitivo das definições e dos conceitos associados às equações de Clairaut, favorecendo uma compreensão mais aprofundada das distinções existentes entre os diferentes tipos de soluções, tais como soluções singulares e não singulares.

A partir do uso do *software* Geogebra, verificou-se a possibilidade de propor atividades fundamentadas em manipulações geométricas, ampliando a abordagem tradicionalmente limitada a procedimentos estritamente algébrico-analíticos. A utilização do *software* representa uma alternativa metodológica às propostas geralmente presentes nos livros didáticos, que, embora incluam algumas noções intuitivas, tendem a

restringir-se ao cálculo dos conceitos sem promover uma interpretação geométrica mais ampla.

Nesse contexto, apresenta-se o delineamento de uma concepção epistemológico-matemática para o ensino, oferecendo orientações e procedimentos voltados ao uso e à exploração do Geogebra em sala de aula, particularmente no tratamento dos saberes relacionados às equações diferenciais de Clairaut, de forma complementar às metodologias tradicionais.

Por fim, esta pesquisa aponta para o desenvolvimento de um estudo qualitativo com aporte na visualização no ensino de matemática das equações diferenciais, articulando de forma integrada as dimensões algébrica, aritmética e geométrica. Essa proposta encontra-se em fase inicial de desenvolvimento e busca superar as dificuldades tradicionais associadas à abstração excessiva e ao caráter predominantemente algébrico desse conteúdo.

O objetivo central da pesquisa em andamento será promover uma interação mais direta e intuitiva dos estudantes com os objetos matemáticos por meio da visualização, favorecendo a construção de significados mais consistentes e aprofundando a

compreensão dos comportamentos das soluções das equações diferenciais.

O desenvolvimento dessa proposta também envolve a exploração de recursos tecnológicos, como o software Geogebra, a fim de enriquecer as práticas pedagógicas e potencializar a mobilização dos saberes matemáticos pelos estudantes.

Para tanto, busca-se compreender de que maneira a visualização, utilizada como ferramenta essencial, pode contribuir para a mediação do conhecimento, além de identificar os desafios e as estratégias mais eficazes para sua implementação no contexto educacional. Dessa forma, pretende-se oferecer novas possibilidades didáticas para o ensino das equações diferenciais.

Agradecimentos

O primeiro autor agradece o apoio da Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico - FUNCAP, o segundo autor agradece o Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPQ, e o terceiro autor agradece a Fundação para a Ciência e Tecnologia, I.P., no âmbito dos projetos UIDB/00194/2020 (<https://doi.org/10.54499/UIDB/00194/2020>) e UIDP/00194/2020 (<https://doi.org/10.54499/UIDP/00194/2020>)

020) (CIDTFF).

Referências

ALMOULOU, Saddo Ag. **Fundamentos da Didática da Matemática**. São Paulo: Editora UFPR., 2007.

ALVES, Francisco Régis Vieira. Engenharia didática (análises preliminares e análise a priori): o caso das equações diferenciais de segunda ordem. **Revista ENCITEC**, v. 6, n. 2, 1-22., 2016A.

ALVES, Francisco Régis Vieira. Didática de matemática: seus pressupostos de ordem epistemológica, metodológica e cognitiva. **Interfaces da Educação**, v. 7, n. 21, 131-150, 2016B. Disponível em: <https://doaj.org/article/e617dd79ca4740de81bec71909fc5f3..>

ALVES, F. R. V. (2018) Engenharia Didática de Formação (EDF): sobre o ensino dos Números (Generalizados) de Catalan (NGC) Didactical Engineering: about the teaching of generalized Catalan numbers . **Educação Matemática Pesquisa : Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, [S.l.], v. 20, N. 2, ISSN 1983-3156. Recuperado de: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/36808>

ARTIGUE, Michèle; DOUADY, R. La didactique des mathématiques en France. **Revue française de pédagogie**, 69-88. Recuperado de: https://www.persee.fr/doc/rfp_0556-7807_1986_num_76_1_1503, 1986.

BATISTA, Paulo César; BARRETO, Maria Célia; SOUSA, Ana Carolina Guedes de. Teoria das situações didáticas presentes na prática pedagógica em matemática a partir da formação e reflexão docente. **[TESTE] Debates em Educação**, v. 13, N. 31 577-602, 2021. Disponível em: <https://www.seer.ufal.br/ojs2-somente-consulta/index.php/debateseducacao/article/view/10606>.

BOYCE, William Edward; DIPRIMA, Richard Clyde. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. Rio de Janeiro: LTC, 2010.

BROUSSEAU, Guy. **Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino**. São Paulo: Ática. 2008., 2008.

BROUSSEAU, Guy. **Théorisation de phénomènes d'enseignement des mathématiques**. (Tese de Doutorado)- I. 905f. Université de Bordeaux . Bordeaux-França ., 1986.

FIGUEIREDO, Djairo Guedes de; NEVES, Antônio Fernando. **Equações diferenciais aplicadas**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada., 1979.

JAVARONI, Sueli Liberatti.(2010) O processo de visualização no curso de introdução às Equações Diferenciais Ordinárias. **Revista de Ensino de Engenharia**, V. 28, N. 1. Recuperado de: <http://revista.educacao.ws/revista/index.php/abenge/article/view/70>.

PAIVA, Ana Carla Pimentel; ALVES, Francisco Régis Vieira; CAMPOS, Helena Maria De Barros. Development and Implementation of Didactic Sequences for Second Order ODEs: Practical Applications with GeoGebra: Desenvolvimento e Implementaçã de Sequências Didáticas para EDOs de Segunda Ordem: Aplicações Práticas com GeoGebra. **Revista Digital: Matemática, Educación e Internet**, [S. l.], v. 25, n. 1, 2024. DOI: 10.18845/meij.v25i1.7235. Disponível em: <https://revistas.tec.ac.cr/index.php/matematica/article/view/7235>. Acesso em: 20 agosto de 2024.

PICCELLI, Paulo Henrique. **Processos de Validação de Conjecturas em Geometria Plana**. 105f. (Dissertação de Mestrado em Educação Matemática). Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande – MS., 2001.

RACHELLI, Juliano; BISOGNIN, Valdemar. Análise gráfica do conceito de derivada segundo os pressupostos da Teoria Após. **In: VII Congresso Internacional de Ensino de Matemática.** Disponível em: <https://www.semanticscholar.org/paper/AN%C3%81LISE-GR%C3%81FICA-DO-CONCEITO-DE-DERIVADA-SEGUNDO-OS-Rachelli->

Bisognin/1d3e5a0275411982d37b5412819fb7f740bb0895. Acesso em: 5 jul. 2025.

SANTOS, Cintia Aparecida Bento dos. **Formação de professores de matemática: contribuições de teorias didáticas no estudo das noções de área e perímetro.** (Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo., 2010.

Recebido em: 21/08/24

Aceito para publicação em: 21/07/25