

Explorando novas possibilidades para o ensino da integral em um ambiente virtual de ensino-aprendizagem

Exploring new possibilities for teaching integrality in a virtual teaching-learning environment

Explorando nuevas posibilidades para la enseñanza de la integralidad en un entorno virtual de enseñanza-aprendizaje

Elieudo Nogueira Silva¹

Roger Ruben Huaman Huanca²

Resumo

O objetivo deste estudo é analisar as estratégias e abordagens utilizadas pelos alunos na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II ao resolverem um problema relacionado ao conceito de integral, por meio do ambiente virtual da plataforma Desmos. A pesquisa envolveu a resolução de um problema sobre o movimento de uma partícula, utilizando integrais definidas para calcular deslocamento e distância percorrida. Organizados em grupos, os alunos puderam explorar graficamente a função no ambiente Desmos e utilizar outros elementos da plataforma, o que facilitou a compreensão e formalização do conteúdo. Nesse contexto, o ambiente virtual da plataforma Desmos se mostrou uma ferramenta valiosa na aplicação da metodologia de Resolução de Problemas, especialmente no estudo do conceito de integral.

Palavras-chave: Tecnologias Digitais. Cálculo Diferencial e Integral. Plataforma Desmos. Resolução de Problemas.

Abstract

The objective of this study is to analyze the strategies and approaches used by students in the Differential and Integral Calculus II course when solving a problem related to the concept of integral, through the virtual environment of the Desmos platform. The research involved solving a problem about the movement of a particle, using definite integrals to calculate displacement and distance traveled. Organized into groups, the students were able to graphically explore the function in the Desmos environment and use other elements of the platform, which facilitated the understanding and formalization of the content. In this context, the virtual environment of the Desmos platform proved to be a valuable tool in the application of the Problem Solving

¹ Mestrando do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática (PPGECM) da Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), Bolsista CAPES. Iguatu – Ceará, Brasil. E-mail: elieudonogueira@gmail.com. Orcid: <https://orcid.org/0000-0001-8097-542X>

² Doutor em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista (UNESP), Docente na Universidade Estadual do Norte Fluminense (UENF). Estado do Rio de Janeiro, Brasil. E-mail: ruben.huanca@uenf.br. Orcid: <https://orcid.org/0000-0002-3733-9476>

methodology, especially in the study of the concept of integral.

Keywords: Digital Technologies. Differential and Integral Calculus. Desmos Platform. Problem Solving.

Resumen

El objetivo de este estudio es analizar las estrategias y enfoques utilizados por los estudiantes de la asignatura de Cálculo Diferencial e Integral II al momento de resolver un problema relacionado con el concepto de integral, a través del entorno virtual de la plataforma Desmos. La investigación consistió en resolver un problema sobre el movimiento de una partícula, utilizando integrales definidas para calcular el desplazamiento y la distancia recorrida. Organizados en grupos, los estudiantes pudieron explorar gráficamente la función en el entorno Desmos y utilizar otros elementos de la plataforma, lo que facilitó la comprensión y formalización del contenido. En este contexto, el entorno virtual de la plataforma Desmos resultó ser una herramienta valiosa en la aplicación de la metodología de Resolución de Problemas, especialmente en el estudio del concepto de integral.

Palabras clave: Tecnologías digitales. Cálculo diferencial e integral. Plataforma Desmos. Solución de problemas.

1 Introdução

A Matemática desempenha um papel fundamental no cotidiano, influenciando diversas situações e promovendo o desenvolvimento do pensamento crítico. Ao reconhecer sua importância, é possível formar indivíduos mais preparados para interagir socialmente e enfrentar desafios complexos.

No contexto do Ensino Superior, o ingresso de jovens na universidade é

marcado por uma série de desafios, que envolvem tanto aspectos pessoais quanto acadêmicos. Embora muitos alunos estejam entusiasmados com a oportunidade de ingressar na universidade, frequentemente trazem consigo hábitos de estudo adquiridos durante a Educação Básica, os quais se mostram inadequados para as exigências do Ensino Superior (Jesus, 2018).

Esses hábitos, muitas vezes caracterizados por um estudo superficial e pela preparação de última hora para as provas, não são suficientes para garantir o sucesso em um ambiente acadêmico que exige um envolvimento mais profundo e contínuo com os conteúdos. É necessário que os alunos aprimorem e desenvolvam habilidades de estudo mais eficazes, como análise crítica, resolução de problemas e gestão do tempo, para alcançar o sucesso em suas trajetórias acadêmicas.

De acordo com Azevedo, Palhares e Figueiredo (2020), a discussão sobre esse tema é fundamental, pois os alunos frequentemente enfrentam dificuldades em compreender os conceitos básicos das disciplinas que compõem essa área da Matemática. Um exemplo que ilustra essa situação é o Cálculo Diferencial e Integral (CDI).

Historicamente, as disciplinas de Cálculo apresentam taxas de reprovação e evasão significativamente altas nos cursos de graduação, como apontam os estudos de Huanca, Silva e Souza (2021). Segundo os autores, essa reflexão é fundamental para garantir que os alunos adquiram uma compreensão profunda dos conceitos de Cálculo e sejam capazes de aplicá-los de forma em contextos práticos. Entre as diversas estratégias de ensino no âmbito da Educação Matemática, apresentamos nesta pesquisa a Resolução de Problemas como metodologia de ensino e aprendizagem, com foco especial no CDI. Essa abordagem pode tornar os conceitos mais acessíveis aos alunos, com base em estudos publicados sobre o tema (Huanca; Silva; Souza, 2021).

Segundo Onuchic (1999), a Resolução de Problemas pode ser utilizada como uma metodologia de ensino na Matemática, funcionando tanto como ponto de partida quanto como forma de introduzir novos conceitos e conteúdos antes de sua formalização. Nesse sentido, a prática de resolver problemas pode contribuir para a construção do conhecimento matemático.

Em consonância com a proposta apresentada anteriormente, sugerimos o uso de recursos tecnológicos, como a disponibilização do ambiente virtual da plataforma Desmos, com o intuito de aprimorar a visualização do conceito, das propriedades e dos gráficos da integral, aproveitando a acessibilidade e a versatilidade da plataforma, disponível em diversos sistemas operacionais e dispositivos móveis. Neste artigo, focaremos na funcionalidade “Sala de Aula”, que permite aos professores criar atividades interativas para relacionar e esclarecer conceitos matemáticos de maneira teórica (Antunes; Cambrainha, 2020).

O objetivo deste estudo é analisar as estratégias e abordagens utilizadas pelos alunos na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II ao resolverem um problema relacionado ao conceito de integral. Além disso, buscamos obter percepções valiosas sobre os processos de resolução de problemas dos alunos e suas diferentes perspectivas em relação às questões propostas.

Este estudo é um recorte da dissertação de mestrado do primeiro autor, que busca aprofundar a compreensão das práticas de resolução

de problemas pelos alunos. A pesquisa foi desenvolvida com o objetivo de contribuir para a melhoria do ensino de CDI, oferecendo reflexões sobre as dificuldades enfrentadas pelos alunos e as estratégias que utilizam para superar esses desafios.

2 Desmos: uma plataforma interativa e personalizada para o ensino de Matemática

A plataforma Desmos, foco desta pesquisa, tem origem no termo latino “vínculo” ou “conexão”. Trata-se de uma calculadora gráfica online criada pelo físico e matemático norte-americano Eli Luberoff em 2011. A plataforma é acessível via navegadores de internet ou dispositivos móveis, sendo compatível com PCs, notebooks e smartphones, graças às linguagens de programação que utiliza, como *Javascript* e *HTML*. O aplicativo pode ser baixado gratuitamente em dispositivos Android e iOS (Antunes; Cambrinha, 2020).

Antunes e Cambrinha (2020) destacam que a plataforma Desmos oferece um ambiente interativo, focado nas interações sociais entre os alunos, o que favorece uma investigação matemática profunda. Cada participante desempenha um papel específico,

diferenciando a plataforma de outras ferramentas matemáticas *online*. A plataforma possibilita a inserção de expressões algébricas em inglês, com a visualização imediata de seus efeitos gráficos, permitindo a exploração ilimitada de fórmulas matemáticas e representações geométricas.

A página inicial da plataforma Desmos³ apresenta uma interface amigável e intuitiva, destacando a frase “Matemática bela e gratuita” (Figura 1). A plataforma oferece uma variedade de ferramentas matemáticas, incluindo uma calculadora gráfica, calculadora científica, operações matemáticas básicas, matrizes e geometria 3D. O Desmos também possui a *Desmos Classroom*, um ambiente de ensino e aprendizagem com aulas interativas e gratuitas para professores e alunos. Na página inicial da plataforma é destacada a *Desmos Geometry*, que permite explorar a geometria em três dimensões, e menciona a integração das ferramentas da Desmos em avaliações como o SAT, AP, e outros exames estaduais. O Desmos também apresenta exemplos de gráficos criados por usuários, como parte da *Global Math Art Expo*, incentivando a criatividade e a exploração matemática.

³ Link de acesso a plataforma Desmos
<https://www.desmos.com/?lang=pt-BR>.

Figura 1 - Página inicial do Desmos

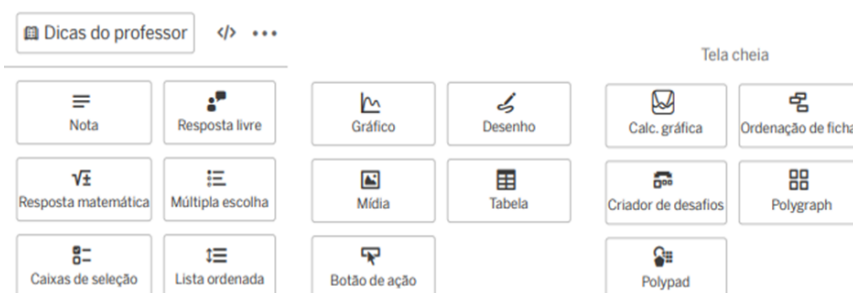


Fonte: Elaborado pelos autores.

Para customizar atividades, o Desmos oferece a possibilidade de ir além do simples uso dos recursos existentes. Isso é possível por meio de sua *Computation Layer* (CL), que contém um conjunto de comandos que conectam blocos e componentes funcionais (Cândido, 2022). Esses blocos podem ser inseridos em cada página da atividade. Dentro de cada bloco, é possível criar variáveis que

podem ser acessadas por outros blocos, desde que sejam devidamente nomeadas, permitindo a automatização de ações, como a aparição de um gráfico após a submissão de uma fórmula pelo usuário, seleção de alternativas em um bloco de múltipla escolha, *checkbox*, tabela ou botão de ação. Ao criar uma atividade, os blocos funcionais disponíveis estão ilustrados na Figura 2 abaixo.

Figura 2 - Botões disponíveis na criação de uma atividade no Desmos



Fonte: Elaborado pelos autores.

Ao selecionar uma atividade pronta ou criar uma nova, o usuário acessa uma página onde pode definir seus objetivos, o tempo estimado para aplicação e o tipo de atividade (como introdução, aplicação, exploração ou prática). No canto inferior da página, é possível visualizar os blocos disponíveis para a atividade, bem como as dicas fornecidas pelo professor para sua execução.

O painel de controle, um recurso adicional oferecido pelo Desmos, permite acompanhar o progresso e o ritmo de cada estudante individualmente

(Figura 3), eliminando a necessidade de circular pela sala de aula. Caso um aluno apresente erros consecutivos nas atividades, o professor pode intervir e oferecer orientação. Se um estudante estiver muito mais avançado que o restante da turma, é possível ajustar o ritmo para restringir as atividades disponíveis naquele momento, permitindo que a turma progrida de forma gradual e coletiva. Por outro lado, em determinadas situações, é interessante permitir que os próprios alunos estabeleçam seus próprios ritmos (França, 2022).

Figura 3 - Recursos adicionais do Painel de Controle do professor



Fonte: Elaborado pelos autores.

Antunes e Cambrinha (2020) enfatizam a relevância do modo anônimo e da funcionalidade de pausa no painel de controle da plataforma DESMOS. O modo anônimo protege a privacidade dos alunos e evita competições desnecessárias, enquanto a funcionalidade de pausa permite que o professor interrompa temporariamente as atividades para discussões ou avisos, garantindo a atenção total dos alunos. Nesse sentido, esses recursos

contribuem para um ambiente de aprendizado mais controlado e alinhado com as necessidades pedagógicas.

3 Abordagens e contribuições da Resolução de Problemas no ensino de Matemática

Em 1945, George Pólya, conhecido como precursor da Resolução de Problemas, publicou *How to Solve It*, onde propôs etapas fundamentais para a resolução de problemas: compreender o problema, elaborar um plano, executar o

plano e revisar a solução (Nunes, 2007). Nos anos seguintes, a pesquisa sobre Resolução de Problemas se intensificou, com o Movimento da Matemática Moderna nas décadas de 1950 e 1960, propondo transformações no ensino de Matemática. No entanto, nas décadas de 1970, surgiram críticas sobre o insucesso da aprendizagem devido a uma abordagem abstrata e à falta de preparo dos professores. Isso levou a um movimento de retorno ao ensino tradicional e à busca por alternativas inovadoras para garantir o sucesso dos alunos, especialmente na década de 1980 (Nunes et al., 2022).

Nos anos 1980, o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) publicou “*An Agenda for Action*”, propondo que o ensino de matemática fosse centrado na resolução de problemas, o que motivou pesquisas nos Estados Unidos nessa década. Em 1989, Thomas L. Schroeder e Frank K. Lester Jr. destacaram a importância da Resolução de Problemas na aprendizagem matemática como metodologia de ensino. No Brasil, Luiz Roberto Dante e Lourdes de la Rosa Onuchic se destacaram como pioneiros nessa abordagem. Em 1992, Onuchic

fundou o Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas (GTERP), com o objetivo de promover a pesquisa e o debate sobre a utilização de problemas no ensino de matemática (Nunes et al., 2022).

Os autores apontam várias razões para incorporar a Resolução de Problemas no ensino-aprendizagem da Matemática, em especial na sala de aula, dentre elas:

[...] (i) a Resolução de Problemas concentra a atenção dos alunos sobre as ideias matemáticas e em dar sentido às mesmas; (ii) a Resolução de Problemas pode desenvolver nos alunos a convicção de que eles são capazes de fazer matemática e de que a matemática faz sentido; (iii) a Resolução de Problemas possibilita um ponto de partida para uma ampla gama de alunos e; (iv) a Resolução de Problemas desenvolve o potencial matemático (Nunes et al., 2022, p. 58-59).

Onuchic e Allevato (2011) enfatizam que a Resolução de Problemas vai além de simplesmente fornecer uma resposta final; ela capacita os alunos a desenvolverem seu próprio conhecimento matemático ao descobrirem novos conceitos. Desta forma,

[...] os problemas são postos aos alunos antes de lhes ter

seja apresentado, formalmente, o conteúdo matemático necessário ou mais apropriado à sua resolução que, de acordo com o programa da disciplina para a série atendida, é pretendido pelo professor. Dessa forma, o ensino-aprendizagem de um tópico matemático começa com um problema que expressa aspectos chave desse tópico, e técnicas matemáticas devem ser desenvolvidas na busca de respostas razoáveis ao problema dado (Onuchic; Allevato, 2011, p. 85).

Nessa perspectiva, Schroeder e Lester (1989) apresentam três abordagens para a resolução de problemas no ensino de Matemática. A primeira é o ensino **sobre** resolução de problemas, seguindo o modelo de Pólya, que enfatiza a compreensão do problema, elaboração de um plano, execução e revisão. A segunda abordagem é o ensino **para** resolução de problemas, em que os alunos aplicam conceitos matemáticos em problemas após a teoria ter sido apresentada, visando a transferência de aprendizado para novas situações. A terceira é o ensino **através** da resolução de problemas, que utiliza situações-problema ou um problema gerador para iniciar a aprendizagem de novos tópicos matemáticos, facilitando a transição do concreto para a abstração simbólica. Cada abordagem tem suas particularidades e contribui de maneiras distintas para o ensino de Matemática.

Ainda sobre a terceira e última abordagem, Onuchic e Allevato (2004), afirmam:

[...] Ensinar matemática através da Resolução de Problemas não significa, simplesmente, apresentar um problema, sentar-se e esperar que a mágica aconteça. O professor é responsável pela criação e manutenção de um ambiente matemático motivador e estimulante em que a aula deve transcorrer. Para se obter isso, toda aula deve compreender três partes importantes: antes, durante e depois. Para a primeira parte, o professor deve garantir que os alunos estejam mentalmente prontos para receber a tarefa e assegurar-se de que todas as expectativas estejam claras. Na fase do “durante”, os alunos trabalham e o professor observa e avalia o trabalho. Na terceira, “depois”, o professor aceita a solução dos alunos sem avaliá-los e conduz a discussão enquanto os alunos justificam seus resultados e métodos. Então, o professor formaliza os novos conceitos e novos conteúdos construídos (Onuchic; Allevato, 2004, p. 221).

Nesse contexto, Allevato e Onuchic (2009) introduzem a expressão Ensino-Aprendizagem-Avaliação, que descreve uma abordagem em que ensino e aprendizado acontecem simultaneamente na construção do conhecimento, com o professor como guia e os alunos como co-construtores. No contexto da Matemática, esse processo culmina na avaliação, que é realizada tanto para os alunos quanto para o professor. A avaliação é essencial,

pois orienta as práticas pedagógicas, permitindo ajustes e melhorias contínuas no ensino.

As atividades de Ensino-Aprendizagem-Avaliação estão profundamente interconectadas, formando um todo que visa promover o desenvolvimento do professor e a aprendizagem do aluno. O professor guia o aluno na construção de novo conhecimento, enquanto a avaliação, integrada ao ensino, aprimora as práticas de ambos (Huanca, 2007).

Onuchic e Allevato (2011, p. 81) reforçam as ideias expostas, destacando que

Ao considerar o ensino-aprendizagem-avaliação, isto é, ao ter em mente um trabalho em que estes três elementos ocorrem simultaneamente, pretende-se que, enquanto o professor ensina, o aluno, como um participante ativo, aprenda, e que a avaliação se realize por ambos. O aluno analisa seus próprios métodos e soluções obtidas para os problemas, visando sempre à construção de conhecimento. Essa forma de trabalho do aluno é consequência de seu pensar matemático, levando-o a elaborar justificativas e a dar sentido ao que faz. De outro lado, o professor avalia o que está ocorrendo e os resultados do processo, com vistas a reorientar as práticas de sala de aula, quando necessário.

Para atender à necessidade de fornecer aos alunos os conhecimentos prévios essenciais para o desenvolvimento mais produtivo da metodologia, Onuchic e Allevato (2011) propuseram um roteiro que organiza as atividades durante a Resolução de Problemas, em nove etapas: preparação do problema; leitura individual; leitura em conjunto; resolução do problema; observar e incentivar; registro das resoluções na lousa; plenária; busca do consenso; formalização do conteúdo.

Atualmente, a Resolução de Problemas constitui um tema central nas pesquisas sobre o Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática, sobretudo no contexto da sala de aula (Onuchic; Allevato, 2011). Em 2014, as autoras incorporaram ao roteiro de nove etapas uma nova etapa, denominada Proposição de Problemas, sugerindo que ela também integre o processo de ensino, dada sua importância no desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos. Essa ampliação favorece novas oportunidades de aprendizagem, permitindo que os alunos não apenas resolvam problemas, mas também participem ativamente da criação e formulação de novos desafios

matemáticos. A seguir, apresentamos o roteiro proposto (atividades) pelas autoras para ser utilizado como dinâmica em sala de aula: (1) proposição do problema, (2) leitura individual, (3) leitura em conjunto, (4) resolução do problema, (5) observar e incentivar, (6) registro das resoluções na lousa, (7) plenária, (8) busca do consenso, (9) formalização do conteúdo, (10) proposição e resolução de novos problemas.

As autoras não propõem um método definitivo para promover a aprendizagem, mas um direcionamento para facilitar essa construção. A estratégia de ensino deve ser cuidadosamente planejada para evitar sua aplicação inadequada, que pode resultar em uma aprendizagem superficial. Onuchic e Allevato (2014) destacam que, para os alunos, entender Matemática significa estabelecer relações. Assim, a capacidade de identificar se um estudante compreende, interpreta incorretamente ou não entende conceitos matemáticos geralmente se revela durante a resolução de problemas.

4 Procedimentos metodológicos e o desenvolvimento da atividade

A pesquisa de campo, também denominada coleta de dados, foi

conduzida no segundo semestre de 2024 com uma turma da disciplina Cálculo Diferencial e Integral II. Os alunos participantes pertenciam aos cursos de Licenciatura Plena em Matemática e Física de um *campus* da Universidade Estadual do Ceará (UECE), e o encontro foi realizado no período da manhã.

Em seguida, apresentamos a plataforma Desmos e suas ferramentas básicas, incluindo a calculadora gráfica, a calculadora científica, a calculadora para operações básicas e raiz quadrada, cúbica, a calculadora matricial e o ambiente para construções geométricas. Esses recursos foram rapidamente explorados pelos alunos, proporcionando uma rápida familiarização com a plataforma dentro do tempo disponível.

Após as orientações teóricas, foi fornecido um código de acesso à atividade, e os grupos iniciaram a discussão do problema. Os alunos foram organizados em dois grupos: um composto por quatro alunos e o outro por três. Esses grupos foram identificados como GRUPO 1 e GRUPO 2. Ao inserir o código da atividade, os grupos eram direcionados ao problema envolvendo o movimento de uma partícula abaixo.

Uma partícula se move ao longo de uma reta tal que sua velocidade no tempo t é $v(t) = t^2 - t - 6$ (medido em metros por segundo).

- a) Encontre o deslocamento da partícula durante o período $1 \leq t \leq 4$;
- b) Determine a distância percorrida durante este período.

O problema, extraído do livro de Stewart (2017, p. 406), foi selecionado por sua relevância conceitual e pela integração entre Matemática e Física, envolvendo o cálculo da integral definida para a determinação do deslocamento e da distância percorrida. Utilizamos o ambiente virtual Desmos, em conjunto com atividades instantâneas, para que os alunos solucionassem o problema do movimento de uma partícula de forma progressiva. Para isso, dividimos o problema em 11 (onze) telas na plataforma, seguindo o roteiro de

atividades baseado na metodologia de Resolução de Problemas, conforme proposto por Onuchic e Allevato (2011).

Essas onze telas juntamente com o roteiro de nove atividades da Resolução de Problemas facilitam a compreensão e formalização do conteúdo. O professor-pesquisador monitora todas as ações dos grupos por meio do painel de controle, que possibilita acompanhar o progresso e ritmo dos alunos individualmente, sem precisar percorrer a sala de aula (Figura 4).

Figura 4 - Acompanhamento virtual do problema

	1 Preparar...	2 Compr...	3 Compr...	4 Compr...	5 Configu...	6 No DES...	7 Visualiz...	8 Cálculo...	9 Cálculo...
GRUPO 1	—	•	•	—	•	•	•	•	•
GRUPO 2	—	•	•	—	•	•	•	•	•

Fonte: Elaborado pelos autores.

A primeira tela da atividade continha o problema proposto, onde solicitava a leitura atenciosa do problema. Na segunda tela, os alunos foram questionados sobre o que eles

compreendiam sobre os conceitos de distância percorrida e deslocamento. As respostas foram registradas no ambiente, como vemos na Figura 5 abaixo.

Figura 5 - Tela 2 do problema

O que você entende por deslocamento e distância percorrida no contexto de uma partícula em movimento?

☐ GRUPO 1

No deslocamento, consideramos o sinal como informação para o sentido no plano, já a distância, pode ser considerada em módulo, indicando apenas a diferença do ponto de partida para o ponto final.

☐ GRUPO 2

Deslocamento é o caminho total percorrido, a distância percorrida, a distância final menos a inicial

Fonte: Elaborado pelos autores.

A resposta do GRUPO 1 abordou corretamente o deslocamento em relação ao sinal, destacando que o deslocamento é uma grandeza vetorial que considera direção e sentido. Além disso, mencionou corretamente que a distância é uma grandeza escalar, medida em módulo, sem considerar a direção. Por outro lado, o GRUPO 2 usou a expressão “caminho total percorrido”, o que é uma boa definição para a distância. No entanto, a descrição “distância final menos a inicial” precisa de ajustes, pois o deslocamento é a diferença entre as posições final e inicial, e não a distância

percorrida. O GRUPO 2 confundiu o deslocamento com distância ao afirmar que o deslocamento é “o caminho total percorrido”, quando, na realidade, é a diferença entre as posições inicial e final.

Na terceira tela da atividade, os grupos foram provocados a representar as respostas da segunda tela através de um desenho (Figura 6). Para isso, foi disponibilizado um quadro que possibilita a criação de desenhos através de uma caneta digital, inserindo imagens, textos e informações gráficas de uma função.

Figura 6 - Tela 3 do problema



Fonte: Elaborado pelos autores.

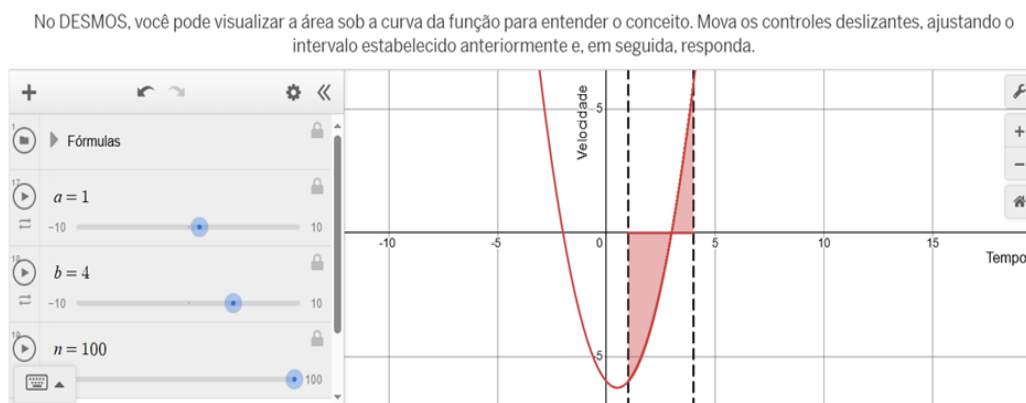
Na quarta tela, solicitamos a representação gráfica da função, que foi

realizada de forma satisfatória pelos grupos na quinta tela da atividade. Na

sexta tela, alguns comandos já estavam pré-definidos e os grupos foram orientados a mover os controles

deslizantes a , b e n para que fosse possível visualizar a área sob o gráfico da função (Figura 7).

Figura 7 - Tela 6 do problema



Fonte: Elaborado pelos autores.

Na sétima tela, questionamos o que os grupos compreendiam sobre a integral definida e como ela pode ser utilizada para o cálculo da área sob o gráfico de uma função (Figura 8). O objetivo da pergunta era verificar a compreensão dos alunos acerca de um

conteúdo já estudado por eles anteriormente.

Figura 8 - Tela 7 do problema

(a) Como você descreveria o processo de cálculo da integral definida?

☐ GRUPO 1

a) A integral definida nos mostra a área sob a curva

b) calculando a integral da função da velocidade, foi possível encontrar o deslocamento da partícula no intervalo entre 1 a 4 segundos, resultando em -4,5 m (o deslocamento é retrogrado).

(b) Como a integral definida pode ser usada para calcular a área sob a curva da função $v(t)$?

☐ GRUPO 2

a) ela vai nos mostrar um cálculo da área debaixo de uma curva

b) integramos a função calculando a função da velocidade para sabermos o deslocamento num certo período de 1 a 4 segundos para obtermos o gráfico anterior

Fonte: Elaborado pelos autores.

A resposta do GRUPO 1 ao item (a) indica que a integral definida “nos mostra a área sob a curva”, o que é uma

descrição correta e concisa, mas um pouco vaga. O mesmo ocorre no GRUPO 2. Porém, ambas poderiam ser

melhoradas ao incluir que a integral definida é o limite da soma de áreas de retângulos sob a curva à medida que o número de retângulos aumenta, relacionando também com a soma de Riemann. No item (b), a inclusão do resultado “deslocamento retrógrado” pelo GRUPO 1 foi positiva, pois demonstrou uma compreensão prática do conceito. O GRUPO 2 falou sobre integrar a função para “sabermos o

deslocamento num certo período”, mas a formulação não é clara.

Na oitava tela, os alunos realizaram o cálculo da integral da função $v(t) = t^2 - t - 6$, onde $1 \leq t \leq 4$, além disso, questionamos sobre qual seria a interpretação dessa integral em termos de deslocamento da partícula. A seguir, podemos observar as respostas apresentadas por cada grupo (Figura 9).

Figura 9 - Tela 8 do problema

GRUPO 1

$$v(t) = t^2 - t - 6$$

$$s(t) = \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 6t \right]_1^4$$

$$s(4) = \left(\frac{4^3}{3} - \frac{4^2}{2} - 6 \cdot 4 \right) - \left(\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} - 6 \cdot 1 \right)$$

$$s(4) = \frac{64}{3} - \frac{16}{2} - 24 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 6 \right)$$

$$s(4) = \frac{64}{3} - 8 - 24 + \frac{1}{2} + 6$$

$$s(4) = \frac{64}{3} - 8 - 24 + 0,5 + 6$$

$$s(4) = -4,5$$

GRUPO 2

$$\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 6t \Big|_1^4$$

$$\frac{64}{3} - \frac{16}{2} - 24 - \left(\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} - 6 \cdot 1 \right)$$

$$\frac{64}{3} - \frac{16}{2} - \frac{1}{2} - 24 - 6 = 17,5$$

Fonte: Elaborado pelos autores.

A resolução apresentada pelo GRUPO 1 está correta, pois corresponde ao resultado exato da integral calculada. No entanto, os intervalos de integração escritos em vermelho estão colocados de forma incorreta, uma vez que eles já foram empregados na função na linha anterior. Já a resolução do GRUPO 2 está incorreta. O valor não corresponde ao resultado final e não reflete o deslocamento da partícula. O erro pode ter ocorrido devido a um cálculo errado na operação com números fracionários ou uma interpretação inadequada do

problema. A falta de organização na resposta do grupo pode ter contribuído para o erro na resposta.

Nesse momento, observamos que nenhum dos grupos fez a interpretação da integral relacionada ao deslocamento da partícula. Assim, o professor-pesquisador aproveitou para incentivar os alunos, enfatizando que

Professor-pesquisador: a integral definida $\int_1^4 v(t) dt$ fornece o deslocamento da partícula no intervalo de tempo de $t = 1$ a $t = 4$. Um resultado negativo, como $-4,5$ m, significa que a partícula se moveu em direção oposta ao sentido

positivo, sugerindo que sua posição diminuiu nesse intervalo.

Após essa intervenção, os alunos refletiram sobre a direção do movimento, como observamos nas falas dos alunos E5 e E9.

E5: no deslocamento faz sentido levar em consideração o sinal porque ele indica qual a direção e a distância não têm direção...

E9: A gente tem que considerar o sinal porque tipo se o ponto tá aqui né, se a gente colocar o deslocamento e posição positivo ele está indo para lá, no caso é negativo o movimento dele vai ser retrógrado.

Na nona tela solicitamos o cálculo da integral definida $\int_1^4 |v(t)| dt$ e realizassem a interpretação dessa integral. O GRUPO 1 apresentou a solução abaixo (Figura 10) como resposta do problema, porém o resultado encontrado está incorreto.

Figura 10 - Print da resposta do GRUPO 1 ao problema

Handwritten work for the integral of absolute velocity. The student defines $v(t) = \frac{t^3}{3} - \frac{2t^2}{2} - 6 \cdot 3$. They then calculate the definite integral from 1 to 4: $\Delta() = \left(3 - \frac{16}{2} - 18\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1^2}{2} - 6\right)$. The final result is $10,83$.

Fonte: Elaborado pelos autores.

Durante as discussões no GRUPO 1 ficou evidente que os alunos não compreenderam o que é a integral do módulo dessa função e o que ela representa.

E5: a gente diminui do quatro menos o três (se referindo a diferença entre os intervalos de integração) que a gente achou aqui. A gente achou o que no quatro? Nós achamos negativo? Há tá certo, é negativo? Tá certo isso? Eu não confio no meu potencial não, viu querido?.

E9: Mas, por que a gente tem que garantir se ele vai está no módulo, então vai ser o módulo...

E5: Não, o módulo é o segundo, de três até quatro...

E9: Então assim, o sinal em si, vai papocar...

E5: Vai papocar por que é a distância, não existe distância com esse sinal (se referindo ao sinal negativo) é positiva por que é consequência...

Partindo dessas discussões, percebemos que a fala da estudante E5 reflete uma insegurança sobre a validade dos resultados. A dúvida sobre se o valor encontrado é negativo indica um entendimento de que, ao integrar a função de velocidade, o sinal pode afetar a interpretação física do resultado, por exemplo, se estamos lidando com distância, que deve ser positiva. Além disso, a insistência na utilização do módulo da função sugere uma compreensão clara de que a distância

O uso da palavra “papocar” indica uma linguagem informal e dinâmica, mas também mostra um entendimento de que, em contextos físicos, o sinal negativo deve ser desconsiderado para o cálculo de distância. Destacamos também, o raciocínio sobre a diferença entre os intervalos de integração e a ênfase em “três até quatro” reforçam a necessidade de atenção aos limites, garantindo que todos os valores relevantes para a integral sejam considerados, mesmo que a função possa ser negativa em certos intervalos.

Figura 11 - Print da resposta do GRUPO 2 ao problema

[illegible]

Após a resposta do GRUPO 2, o professor-pesquisador realizou uma intervenção buscando esclarecer algumas dúvidas sobre o problema. Nesse momento, utilizamos o recurso pausa do ambiente e retornamos ao gráfico da função $v(t) = t^2 - t - 6$ que os alunos construíram anteriormente. Aproveitamos o momento para destacar a importância do uso do módulo ao calcular a integral no item (b) do problema proposto. Ao analisarem o gráfico, os alunos perceberam que, no intervalo de 1 a 3, a área sob a curva se localizava abaixo do eixo x , indicando a necessidade de considerar o sinal negativo nesse intervalo. O diálogo abaixo evidencia essa situação.

EMR-RS - ANO 26 - 2025 - número 26 - v.1 – p. 16

deslocamento. Então, aqui é negativo por que essa região está abaixo do eixo x , então indicamos com o sinal negativo, vocês compreendem isso?

E9: Então, o resultado vai da negativo?

P: Não necessariamente. Mas, você tem que calcular a integral de 1 a 3 menos a função.

E4: No caso o valor da função que vai ficar positivo.

E9: Ah, entendi.

Seguindo para as discussões finais do problema, na décima tela os

alunos foram questionados sobre a diferença entre deslocamento e distância percorrida, retomando os cálculos das integrais definidas de $v(t)$ e $|v(t)|$. As respostas foram inseridas no ambiente virtual do Desmos (Figura 12).

Figura 12 - Print da resposta do GRUPO 2 ao problema

Retomando as discussões sobre a diferença entre deslocamento e distância percorrida, responda: ☐ GRUPO 1 Quando se trata de deslocamento, podemos ter valores negativos. Já em distância, utilizamos o módulo pois ela não pode ser negativa.	Como as integrais definidas de $v(t)$ e $v(t)$ ajudam a entender essas diferenças? ☐ GRUPO 2 Ajuda por meio da visualização do gráfico e dos cálculos feitos na integral
---	--

Fonte: Elaborado pelos autores.

A resposta do GRUPO 1 é direta e aponta corretamente que o deslocamento pode assumir valores negativos, enquanto a distância percorrida deve ser sempre positiva. Enquanto o GRUPO 2 menciona a importância da visualização gráfica e dos cálculos, o que é essencial para entender as diferenças entre as duas integrais. Assim, ambas as respostas abordam aspectos importantes, mas poderiam ser aprimoradas com explicações mais

detalhadas e conexões entre os conceitos estudados.

Chegando ao fim do encontro, o professor-pesquisador direcionou os grupos a responderem a última tela desse problema. As seguintes questões foram apontadas: “Quais dificuldades você encontrou ao calcular as integrais? Como você resolveu essas dificuldades? Como a área sombreada sob a curva ajuda a entender o resultado da integral definida?”. Com esses questionamentos,

o professor-pesquisador buscou desenvolver uma compreensão mais profunda das integrais definidas e suas interpretações geométricas, ao mesmo

tempo em que se identificam e superam as dificuldades enfrentadas durante o processo de cálculo (Figura 13).

Figura 13 - Tela 11 do problema

☐ GRUPO 1

- a) Não apresentamos dificuldades ao resolvermos a integral.
- b) Seguimos o que acreditamos que estava certo.
- c) A partir dos dados do gráfico podemos comprovar se o resultado obtido na integral está correto ou não, levando em consideração o sinal da integral e a área expressa do gráfico.

☐ GRUPO 2

As dificuldades tanto na interpretação quanto nos sinais, porém o gráfico ajudou bastante, ajudou na interpretação, pois melhorou a visualização no gráfico

Fonte: Elaborado pelos autores.

A resposta do GRUPO 1 indica que o grupo não enfrentou dificuldades, o que pode sugerir confiança na abordagem utilizada. No entanto, essa afirmação pode levantar questões sobre a profundidade do entendimento dos alunos, já que dificuldades são comuns em temas complexos como integrais. Já o GRUPO 2 reconhece que houve dificuldades, especialmente na interpretação e nos sinais. A menção específica a esses desafios é importante, pois oferece uma visão mais realista e comum do processo de aprendizado.

5 Resultados e discussões

Ao longo da atividade, o uso de recursos visuais, como o gráfico da função e os controles deslizantes, disponíveis no ambiente virtual da

plataforma Desmos, possibilitou aos alunos a visualização da área sob a curva da função, uma das interpretações fundamentais para a integral definida. A manipulação direta da função e a visualização da área sob a curva ajudaram os alunos a entender melhor o conceito de deslocamento e distância percorrida.

A proposta de dividir o problema em etapas (telas de atividade) transformou a forma como os alunos abordaram a resolução. Alinhada à metodologia de Resolução de Problemas, cada etapa trouxe questionamentos relevantes sobre o estudo da integral definida, afastando-se do método tradicional, que se baseia apenas na manipulação algébrica. Esse formato permitiu observar um cuidado e uma preocupação nas respostas

apresentadas, mesmo que os alunos tivessem dúvidas sobre sua correção. As discussões e as opiniões divergentes dentro do grupo contribuíram significativamente para a compreensão do assunto em estudo.

Além disso, as interações dos alunos, como as respostas do GRUPO 1 e GRUPO 2 sobre os conceitos de deslocamento e distância, evidenciam que, ao longo da atividade, os alunos tiveram que aplicar seus conhecimentos prévios de maneira prática e reflexiva. As respostas dos grupos, como a descrição do deslocamento em relação ao sinal, apontam a compreensão da natureza vetorial do deslocamento, que considera direção do movimento, um ponto importante no ensino de Cálculo e no estudo de integrais.

A intervenção do professor-pesquisador, ao explicar que o resultado negativo na integral indicava movimento retrógrado, foi crucial para a compreensão do conceito de deslocamento no contexto físico do problema. Isso exemplifica a importância do acompanhamento constante e da intervenção do professor durante a resolução do problema, conforme defendido por Onuchic e

Allevato (2011), que destacam a relevância da mediação pedagógica para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos.

O problema proposto revisitou assuntos já estudados anteriormente pelos alunos, como a integração do módulo da função, o que possibilitou uma revisão sobre o tema. A intervenção do professor-pesquisador, ao utilizar o gráfico para ilustrar a importância do módulo, foi uma estratégia para superar a dificuldade de lidar com as áreas negativas, uma das dificuldades frequentemente encontradas pelos alunos ao trabalhar com integrais definidas.

O uso do módulo reflete a necessidade de considerar as áreas acima e abaixo do eixo x de forma distinta. A insegurança expressa pelos alunos, como a dúvida sobre o sinal da integral e a necessidade de usar o módulo, também reflete um processo natural de aprendizagem, evidenciando a importância da prática reflexiva e do aprendizado baseado na resolução de problemas.

Embora as respostas do GRUPO 1 e do GRUPO 2 mostrem avanços na compreensão do conteúdo, também foi

possível identificar limitações no entendimento dos conceitos. O GRUPO 2, por exemplo, teve dificuldades na interpretação correta da integral definida e na organização de sua resposta, o que resultou em erros. Já o GRUPO 1 apresentou uma boa compreensão do conceito de deslocamento, mas com algumas falhas na notação e na interpretação de resultados intermediários, como os intervalos de integração.

6 Considerações finais

O ambiente virtual da plataforma Desmos, aplicado no contexto do ensino de Matemática superior, mostrou-se uma ferramenta valiosa na aplicação da metodologia de Resolução de Problemas, especialmente no estudo do conceito de integral. A proposta de trabalho se baseou na resolução de um problema de movimento de uma partícula, utilizando o cálculo de integrais definidas para determinar deslocamento e distância percorrida.

No ambiente do Desmos, os grupos puderam registrar suas respostas e explorar graficamente as funções, o que facilitou a compreensão e formalização do conteúdo. O monitoramento do progresso por parte do professor, por meio do painel de controle do Desmos, permitiu um

acompanhamento individualizado, essencial para fornecer o suporte necessário e garantir que todos os alunos estivessem no ritmo adequado, sem a necessidade de deslocamentos físicos.

As dificuldades enfrentadas durante o encontro foram tratadas de maneira construtiva pelo professor, que estimulou os alunos a refletirem sobre o significado físico e matemático dos cálculos realizados, reforçando a aprendizagem através da resolução de problemas.

Referências

ALLEVATO, Norma Suely Gomes; ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. Ensinando matemática na sala de aula através da resolução de problemas. **Boletim GEPEM, Rio de Janeiro**, v. 33, n. 55, p. 133-156, 2009.

ANTUNES, Gladson; CAMBRAINHA, Michel. Modelos de exploração matemática na plataforma Desmos ensinar e aprender em um ambiente virtual de aprendizagem. **IV Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática, SBM**, 2020.

AZEVEDO, Eliane Bihuna de; PALHARES, Pedro Manuel Baptista; FIGUEIREDO, Elisandra Bar de. Adaptação no roteiro da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática do GTERP para ensinar Cálculo Diferencial e Integral através da Resolução de Problemas. **Revista de Educação Matemática**, v. 17, p. e020012-e020012, 2020. DOI: 10.37001/remat25269062v17id252.

CÂNDIDO, José Valério Moreira. **Sala Invertida de Funções Trigonométricas usando a Camada de Computação do Desmos**. 2022. 39 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em

Matemática em Rede Nacional - Profmat, Universidade Federal do Pará, Castanhal, 2023.

FRANÇA, Jéssica de Aguiar. **Proposta para o ensino de funções usando a ferramenta digital Desmos**. 2022. Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Florianópolis, 2022.

HUANCA, Roger Ruben Huaman. A Resolução de Problemas no Processo Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática na e além da sala de aula. **Boletim de Educação Matemática**, v. 20, n. 27, 2007.

HUANCA, Roger Ruben Huaman; SILVA, Diego Jonathan Bezerra; SOUZA, Pammella Queiroz de. **Cálculo Diferencial sob a Perspectiva da Resolução de Problemas**. Campina Grande: Eduepb, 2021, 144p.

JESUS, Marcos Antonio Santos de. As atitudes e o desempenho em cálculo diferencial e integral de estudos de engenharia. In: GODOY, Elenilton Vieira; GERAB, Fábio (Orgs). **Ensino e aprendizagem na educação superior: inovações, propostas e desafios**. Rio de Janeiro: Atlas Books, 2018. 320 p.

NUNES, Almir. **Resolução de Problemas: uma abordagem atual e dinâmica no ensino da matemática**. 2007. 73 p. Dissertação de Mestrado. Seropédica: Instituto de Agronomia. Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. 2007.

NUNES, Célia Barros; ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; PIRONEL, Márcio; ANDRADE, Cecília Pereira de. Resolução de Problemas em sala de aula. **Com a Palavra, o Professor**, [S. l.], v. 7, n. 18, p. 57–59, 2022. DOI: 10.23864/cpp.v7i18.867.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiabi (org.). **Pesquisa em Educação Matemática**. São Paulo: Editora Unesp, 1999. p. 199-220.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Formação de Professores: mudanças urgentes na Licenciatura em Matemática. In: FROTA, Maria Clara Rezende; NASSER, Lilian (orgs.). **Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates**. Brasília: SBEM, 2009, p. 169-187.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. **Educação matemática: pesquisa em movimento**. São Paulo: Cortez, p. 213-231, 2004.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATO; Norma Suely Gomes. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: Por que através da resolução de problemas? In: ONUCHIC, L. R. (Orgs.) **Resolução de Problemas: Teoria e prática**. Jundiaí: Paco Editorial, 2014.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATO; Norma Suely Gomes. Novas reflexões sobre o ensino e aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. de C. (Org.). **Educação matemática: pesquisa em movimento**. São Paulo: Cortez, 2004. p. 213-231.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATO; Norma Suely Gomes. Pesquisa em resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 5, n. 41, dez, 2011.

SCHROEDER, Thomas L.; LESTER, Frank K., JR. Developing understanding in mathematics via problem solving. In:

TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Eds.). **New directions for elementary school mathematics**. Reston: NCTM, 1989, p. 31-42.

STEWART, James. **Cálculo**. 7 ed. Cengage Learning, 2017.

Recebido em: 10/03/2025

Aceito para publicação em: 02/05/2025