

**Ordenação de frações do concreto ao abstrato:
possibilidades para a formação de professores**

**Ordering fractions from the concrete to the abstract:
possibilities for the training of teachers**

**Ordenación de fracciones de lo concreto a lo abstracto:
posibilidades para la formación de profesores**

Elisandra Bar de Figueiredo¹

Débora Eloísa Nass Kieckhoefel²

Juliana Elisa Hänsch³

Resumo

Este trabalho apresenta a análise de uma prática de ensino com licenciandos em matemática, utilizando material manipulável, para explorar o processo de ordenação de frações. A atividade foi mediada pela Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas e visou, utilizando as Barras de Frações, abordar uma nova perspectiva para o ensino de frações. A análise dos registros escritos destacou a dificuldade dos licenciandos em utilizar o material manipulável como ferramenta didática, pois focaram mais nas respostas do que no processo de exploração. Além disso, identificou-se a importância das conversões e tratamentos entre diferentes registros de representação semiótica no aprofundamento do conhecimento matemático. Os resultados indicam que a mediação docente é imprescindível para estimular o uso e as reflexões sobre o uso do material manipulável como recurso pedagógico. Ainda, o estudo reforça o potencial desses materiais na compreensão de conceitos abstratos, sugerindo estratégias para aprimorar sua utilização na educação matemática.

¹ Doutora em Ciências. Universidade do Estado de Santa Catarina/ UDESC, Joinville, Santa Catarina, Brasil. elisandra.figueiredo@udesc.br. <https://orcid.org/0000-0003-2101-4009>.

² Mestra em Educação Matemática. Universidade do Estado de Santa Catarina/ UDESC, Joinville, Santa Catarina, Brasil. debora.kieckhoefel@udesc.br. <https://orcid.org/0009-0007-1421-1385>.

³ Licenciada em Matemática. Universidade do Estado de Santa Catarina/ UDESC, Joinville, Santa Catarina, Brasil. julianaelisa2604@gmail.com. <https://orcid.org/0009-0004-9998-7243>.

Palavras-chave: Barras de frações. Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Material concreto. Ensino superior. Ensino de Matemática.

Abstract

This work presents the analysis of a teaching practice with Mathematics Education undergraduate students, using manipulable materials, to explore the process of ordering fractions. The activity was carried out using the Teaching-Learning-Evaluation method in Mathematics through problem-solving, aiming at approaching a new perspective for the teaching of fractions using Fraction bars. The analysis of the written records showed the difficulties the undergraduate students had when using manipulable materials as a didactic tool, since they focused more on the answers than on the exploration process. Furthermore, the importance of conversions and treatments between different registers of semiotic representation in the construction of mathematical knowledge became clear. The results indicate that mediation is crucial to stimulate the use and reflections about manipulable materials as a teaching resource. Finally, this study highlights the potential of such materials in the understanding of abstract concepts, suggesting strategies to enhance their use in Mathematics Education.

Keywords: Fraction Bars. Teaching-Learning-Evaluation Method Through Problem-Solving in Mathematics. Concrete Material. Higher Education. Mathematics Teaching.

Resumen

Este trabajo presenta el análisis de una práctica de enseñanza con estudiantes de Licenciatura en Matemáticas, utilizando materiales manipulativos, para explorar el proceso de ordenación de fracciones. La actividad fue mediada por la Metodología de Enseñanza-Aprendizaje-Evaluación a través de la Resolución de Problemas, en la que, usando las Barras de Fracciones, se buscó abordar una nueva perspectiva para la enseñanza de fracciones. El análisis de los registros escritos reveló la dificultad de los estudiantes en utilizar el material manipulativo como herramienta didáctica, puesto que se enfocaron más en las respuestas que en el proceso de exploración. Además, se identificó la importancia de las conversiones y tratamientos entre diferentes registros de representación semiótica en la profundización del conocimiento matemático. Los resultados indican que la mediación docente es imprescindible para estimular el uso y las reflexiones sobre el uso del material manipulativo como recurso pedagógico. Finalmente, el estudio refuerza el potencial de estos materiales para la comprensión de conceptos abstractos, sugiriendo estrategias para optimizar su utilización en la educación matemática.

Palabras clave: Barras de fracciones. Metodología de Enseñanza-Aprendizaje-Evaluación de Matemáticas a través de la Resolución de Problemas. Material concreto. Enseñanza superior. Enseñanza de matemáticas.

1 Introdução

Há 10 anos, desde as primeiras impressões realizadas em 3D, o Laboratório Fábrica Matemática – FAB3D, um espaço do departamento de Matemática da Universidade do Estado de Santa Catarina, tem por objetivo criar um ambiente de desenvolvimento e socialização de materiais concretos e digitais com as potencialidades das tecnologias da impressão 3D, corte a laser e softwares de geometria dinâmica. Os



Educação Matemática em Revista – Rio Grande do Sul

materiais desenvolvidos e produzidos são utilizados em contextos de ensino, pesquisa e extensão.

Em 2022, o trabalho de Oliveira (2022), que elaborou barras de frações em EVA e abordou com seus alunos três dos cinco significados de fração⁴ (Santos, 2005), instigou-nos. Num primeiro momento, vimos a possibilidade de efetuar melhorias no material ao produzi-lo em MDF⁵ com a máquina de corte a laser. Contudo, mais do que produzir o material, debruçamo-nos sobre como utilizá-lo para ensinar frações. Uma vez que um dos principais desafios para o aprendizado de frações reside em interpretá-las de acordo com o contexto nos quais estão inseridas – compreender os seus significados (Santos, 2005), iniciamos uma pesquisa na qual nos propusemos a elaborar uma sequência didática⁶ que fizesse uso das Barras de Frações, direcionada para a educação básica, e que contemplasse os cinco significados.

Antes de chegar à sala de aula, é necessário, contudo, que o professor tenha domínio sobre frações. Assim, concordando com Kieren (1980 apud Silveira, Souza e Powell, 2024) que todos os significados são importantes e, juntos, auxiliam numa compreensão mais ampla das frações, torna-se necessário apresentá-los aos futuros professores de matemática. Silveira, Souza e Powell (2024) destacam, ainda, que existem indícios de que a compreensão sobre frações por parte dos professores precisa ser melhorada, e que lacunas nessa compreensão aumentam a probabilidade de que ideias equivocadas sejam reproduzidas por eles aos seus alunos. Esse é mais um indicativo da necessidade de abordar, de modo mais amplo, o conceito de fração no contexto da formação inicial e continuada de professores.

Outro aspecto relevante para compreender as frações diz respeito às suas múltiplas representações. Uma fração pode ser representada, por exemplo, como dois números naturais separados por um traço, um número decimal, um ponto na reta numérica, um valor dado em porcentagem, uma figura etc. Nessa perspectiva, a Teoria dos Registros de

⁴ Em Santos (2005), temos que os cinco significados são: parte-todo, número, medida, operador multiplicativo e quociente. Abordaremos cada um deles no capítulo de referencial teórico.

⁵ MDF é a sigla para Medium Density Fiberboard, ou Painel de Fibras de Média Densidade, que é uma placa de madeira reconstituída.

⁶ As atividades revisadas estão disponíveis em <https://educapes.capes.gov.br/handle/capes/1001015>

Representação Semiótica de Duval (2009) fundamenta-se na ideia de que a aprendizagem matemática dá-se por meio da coordenação consciente de diferentes sistemas de representação de um mesmo objeto matemático. Em outras palavras, a compreensão plena de um conceito matemático dá-se à medida em que o aluno é capaz de reconhecê-lo, formá-lo e manipulá-lo, fazendo conversões e tratamentos, em suas diversas formas de representação, em qualquer sistema semiótico, como na linguagem natural, escrita simbólica, figural etc.

Assim, uma vez que estamos inseridas num curso de Licenciatura em Matemática – seja como docentes ou como discente – optamos por aplicar a sequência no nosso curso sob duas perspectivas: identificar possíveis melhorias nas atividades e no material para que pudessem ser “lapidados” antes de serem propostos em salas de aula da educação básica; e discutir sobre frações, seus significados, seu ensino, suas diferentes representações e o uso do material concreto e da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (MEAAMaRP) (Allevato; Onuchic, 2021) com os licenciandos, focando na sua futura prática docente.

Tendo em vista a grande quantidade de dados gerados a partir da aplicação da sequência, que era composta por nove atividades, é inviável, inclusive pela limitação de páginas, apresentar a análise de todas nesse artigo. Então, optamos por trazer um recorte da pesquisa, analisando os dados coletados da resolução da atividade sobre ordenação de frações, destacando as conversões e tratamentos realizados pelos alunos. A atividade, ainda que relativamente simples em termos de conteúdo matemático nesse contexto de aplicação, traz a possibilidade de discutir aspectos que agregam para o ensino de frações, tanto na educação básica quanto na formação de professores.

O trabalho segue organizado em mais quatro seções. Na segunda, apresentamos o referencial teórico acerca do uso de material manipulável, a Teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval e os significados de fração. Na terceira, o contexto da aplicação, descrição do estudo e sobre a MEAAMaRP. Em seguida, trazemos a análise dos dados, apresentando as estratégias de resolução e nossas reflexões sobre o processo. Por fim, as considerações finais.

2 Referencial teórico

Segundo Vale (2002, p. 9), a utilização de materiais concretos no ensino da Matemática é uma prática antiga,

[...] por exemplo, o homem primitivo começou por usar marcas num bastão para fazer a contagem das ovelhas; usou pedras; usou a corda com nós; etc. Mais tarde, com a introdução do sistema de numeração indo-árabe, aparece o ábaco. [...] Posteriormente aparecem na geometria a régua, o compasso e o esquadro.

Porém, de acordo com a autora, no século XV alguns desses materiais deixaram de ser usados e foram substituídos pelos algoritmos. A ideia era que os conhecimentos fossem transmitidos aos alunos que teriam apenas que memorizar ou reproduzir mecanicamente regras de cálculo (Vale, 2002; Fiorentini; Miorim, 1990).

No século XVII, Comenius (1592-1670) questionou esse tipo de ensino, defendendo o uso de materiais concretos. Ele e Pestalozzi (1746-1827) são considerados pioneiros da “escola ativa”, que privilegiava que os alunos envolvessem-se ativamente no processo educacional. Com os seus estudos, os professores ganharam recursos para ilustrar conceitos e procedimentos matemáticos, transformando o ambiente de aprendizado. Depois deles, vieram Decroly (1871-1932) e Montessori (1870-1952), que iniciam o estudo da pedagogia científica e ampliam as visões de Comenius e de Pestalozzi (Vale, 2002; Fiorentini; Miorim, 1990).

Anos depois, Piaget (1896-1980) defende que as crianças aprendem melhor a partir de atividades concretas, quando colocam a “mão na massa”, realizam manipulações e refletem conscientemente sobre esse processo. Diferentemente de Montessori e Decroly, que propunham procedimentos estabelecidos pelo professor ou pelo material nas atividades educativas, Piaget acreditava numa liberdade de construção matemática. Depois dele, vieram Dienes (1916-2014) e Bruner (1915-2016), que trabalharam juntos, estudando e expandindo as ideias de Piaget (Vale, 2002).

Diante dessa construção histórica, diferentes autores definem material concreto e material manipulável de maneiras semelhantes. Optamos por tomar como base a definição de Vale (2002), na qual material concreto é aquele que os alunos podem tocar e usar para representar tridimensionalmente as ideias matemáticas, podendo ser materiais comuns ou educacionais, sendo os comuns os que usamos para diversas finalidades e os educacionais os que foram “construídos para serem usados na sala de aula com fins educativos” (Vale, 2002, p. 8). Ela também define material manipulável como sendo

materiais concretos, de uso comum ou educacional, que permitem que durante uma situação de aprendizagem apelem para os vários sentidos dos alunos devendo ser manipulados e que se caracterizem pelo envolvimento ativo dos alunos como, por exemplo, ábaco, geoplano, folhas de papel (Vale, 2002, p. 8, tradução nossa).

O material manipulável do qual falaremos nesse artigo são as Barras de Frações (Figura 1), construídas em MDF, contendo as frações de um inteiro até $\frac{1}{20}$, que se caracterizam como um material concreto educacional.

Figura 1: Barras de frações

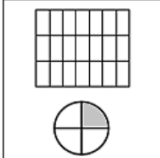
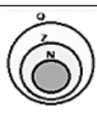


Fonte: Acervo das autoras (2023)

Lorenzato (2012) defende que, para chegar ao abstrato, é preciso partir do concreto. Entendemos que, quando o aluno manipula o material, oportuniza-se pensar **com** e **sobre** os processos que estão sendo realizados acerca do conceito matemático que está sendo trabalhado. Nesse sentido, Vale (1999) discute que é no envolvimento ativo do aluno, na interação com o material, tendo a oportunidade de manipulá-lo repetidas vezes, usar vários sentidos e observar demonstrações feitas pelo professor, que o aluno pode alcançar a abstração.

Por outro lado, a representação de conceitos matemáticos pode ser feita de diversas formas. Cada uma delas é chamada por Duval (2009) de registro de representação semiótica. Tais registros constituem os diferentes sistemas de signos, como a linguagem natural, as notações algébricas, os gráficos e as figuras geométricas, por meio dos quais um objeto matemático pode ser expresso e manipulado. Sua função primordial é viabilizar o acesso a esses objetos que, por sua natureza abstrata, não são diretamente acessíveis aos sentidos. Na Figura 2, exemplificamos alguns dos registros dos números racionais.

Figura 2: Alguns Registros de Representação Semiótica dos Números Racionais

REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO DOS NÚMEROS RACIONAIS				
REGISTRO FIGURAL	REGISTRO SIMBÓLICO		REGISTRO NA LINGUA NATURAL	
CONTÍNUO	NUMÉRICO		ALGÉBRICO	
	Fracionário Ex: $\frac{2}{5}$	Potência de 10 ou Notação científica		
DISCRETO 	Razão Ex: 1 : 2	Percentuais Ex: 4%		
	Decimal exato Ex: 0,2 ou Decimal não exato Ex: 0,3333...		REGISTRO GRÁFICO	
			REGISTRO EM DIAGRAMA	
				

Fonte: Miranda e Rezende (2017, p. 51).

Conforme Duval (2023), os registros de representação semiótica devem permitir três tipos de atividades cognitivas: a formação, o tratamento e a conversão. O autor afirma que a formação pode ser comparada uma tarefa de descrição como a “enunciação de uma frase (compreensível em uma língua natural dada), composição de um texto, desenho de uma figura geométrica, elaboração de um esquema, expressão de uma fórmula, etc.” (Duval, 2023, p.6) e cada uma delas deve respeitar as regras de conformidade do respectivo registro. Por exemplo, ao solicitar que um aluno represente uma fração $\frac{3}{4}$ por meio de uma figura geométrica, espera-se que ele selecione informações relevantes (numerador e denominador) do registro numérico e produza uma representação conforme as regras do registro figural, como a divisão do todo em partes iguais (4) e a pintura de algumas dessas partes (3).

Enquanto isso, “a conversão de uma representação é a transformação desta representação em uma representação em outro registro, conservando a totalidade ou uma parte somente do conteúdo da representação inicial” (Duval, 2023, p.7). Por exemplo, quando passamos da expressão “dois números quaisquer somados resultam em dez” (registro na língua natural) para $x + y = 10$ (registro algébrico), estamos realizando uma conversão. Já o “tratamento de uma representação é a transformação desta representação

no mesmo registro onde ela foi formada” (Duval, 2023, p.7). Por exemplo, no cálculo $\frac{4}{9} + \frac{1}{3} = \frac{7}{9}$, passamos a representar $\frac{4}{9} + \frac{1}{3}$ (registro numérico) como $\frac{7}{9}$ (registro numérico), ou seja, mudamos a representação sem mudar o registro, caracterizando um tratamento.

No contexto da sala de aula, a apropriação de um conceito matemático está intrinsecamente ligada à capacidade do aluno de coordenar diferentes registros de representação semiótica. Conforme aponta Duval (2023), a aprendizagem não se resume à automatização de tratamentos em um registro específico, mas consolida-se na articulação consciente entre as múltiplas formas de representar um mesmo objeto.

A complexidade do conceito de fração é intensificada não apenas pelas suas múltiplas formas de representação, mas, também, pelos significados que assumem a depender do contexto no qual estão sendo aplicadas. Ainda, a própria palavra “significados” pode ser substituída por “interpretações” (Silveira, Souza e Powell, 2024) ou “personalidades” do número racional (Onuchic; Allevato, 2008), a depender do referencial teórico adotado. De modo geral, são definidos cinco significados para as frações⁷ e, aqui, utilizaremos a nomenclatura adotada por Santos (2005).

O primeiro, e mais frequente no ensino fundamental, é o de **parte-todo**, que estabelece a relação entre uma determinada quantidade de partes do inteiro e o próprio inteiro. Por exemplo, $\frac{4}{5}$ significa que foram tomadas quatro de cinco partes iguais. O segundo significado é o de **quociente**, no qual a fração expressa o resultado de uma divisão de dois números inteiros. Nesse caso, $\frac{4}{5}$ é quatro dividido por cinco. Em seu terceiro sentido, a fração atua como um **operador multiplicativo**, funcionando como um fator que modifica uma quantidade específica, ou seja, $\frac{4}{5}$ de uma unidade. O de **medida** surge quando a fração é utilizada para expressar a relação entre duas quantidades. Assim, $\frac{4}{5}$ significa quatro de alguma coisa comparado a cinco de outra coisa. Por fim, o quinto significado é o de **número**, que faz com que a fração seja reconhecida como um elemento do conjunto dos números racionais. No caso da fração $\frac{4}{5}$, correspondente a 0,8, um número que está entre zero e um.

No tópico a seguir, apresentaremos a atividade realizada com os alunos e

⁷ Silveira, Souza e Powell (2024) apresentam a fração em duas perspectivas: da partição e da medição. Nesse texto, estamos considerando a perspectiva da partição. Os significados que esses autores denominam de medida e de razão, na nomenclatura de Santos (2006), são chamados de número e de medida, respectivamente.

abordaremos aspectos relacionados à formação de professores, ao uso do material, à MEAAMaRP e aos registros de Duval.

3 Procedimentos metodológicos

O foco deste artigo é uma atividade de ordenação de frações, aplicada no contexto da formação de professores, que faz parte de uma sequência didática que conta com nove atividades entre problemas geradores, problemas complementares e elaboração de problemas, sendo a atividade de ordenação de frações a terceira. A sequência foi aplicada em duas turmas, uma da segunda fase e outra da quinta, em momentos distintos. O tempo decorrido na aplicação da sequência completa foi de oito aulas de cinquenta minutos, sendo prevista para a atividade de ordenação cerca de meia hora. Durante toda a aplicação, tivemos a participação de 16 licenciandos em matemática (oito de cada fase) e da professora regente, que foram indicados, em ordem alfabética, por $A_1, A_2, \dots, A_{17}$. Como nem todos os alunos estiveram presentes em todas as aulas, os dados obtidos para esse artigo são de 14 alunos (seis da segunda e oito da quinta fase) e da professora regente. Visando favorecer a troca de ideias entre os estudantes, eles foram separados em duplas ou trios, formando sete equipes denominadas $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6$ e E_7 , sendo as quatro primeiras de alunos da quinta fase e da professora regente e as outras três de alunos da segunda fase. As três autoras deste texto, indicadas por P_1, P_2 e P_3 , seguindo a ordem de autoria, atuaram como professoras/pesquisadoras durante toda a aplicação.

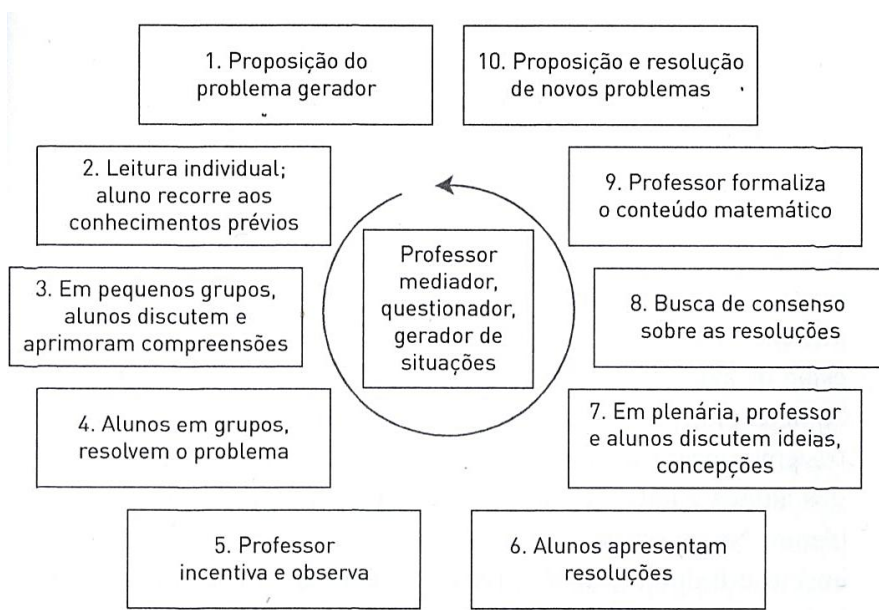
Além dos registros escritos das resoluções de cada grupo, a coleta de dados também foi realizada por meio de gravações de vídeos, fotos e áudios das aulas. Para isso, a autorização de todos os participantes foi obtida por meio de um termo de consentimento. Nesse texto, usaremos para análise os registros escritos e os áudios das plenárias.

Nosso intuito foi propor uma atividade que pudesse ser levada pelos licenciandos para as aulas no ensino básico e apresentar as Barras de Frações e a MEAAMaRP como possibilidade para seu ensino, ampliando o conhecimento matemático a partir da coordenação consciente das conversões e tratamentos entre os registros.

Metodologicamente, optamos por utilizar a MEAAMaRP, tendo em vista que Allevato e Onuchic (2021) defendem que ela pode favorecer a compreensão dos

conteúdos, pois coloca o aluno no centro do processo e incentiva a argumentação e a troca de ideias. Com base nas experiências de seu grupo de pesquisa, as autoras sugerem um roteiro de dez etapas para aplicação da metodologia (Figura 3), abrangendo desde a proposição do problema até a formalização do conteúdo e a resolução de novos desafios.

Figura 3: Etapas da MEAAMaRP



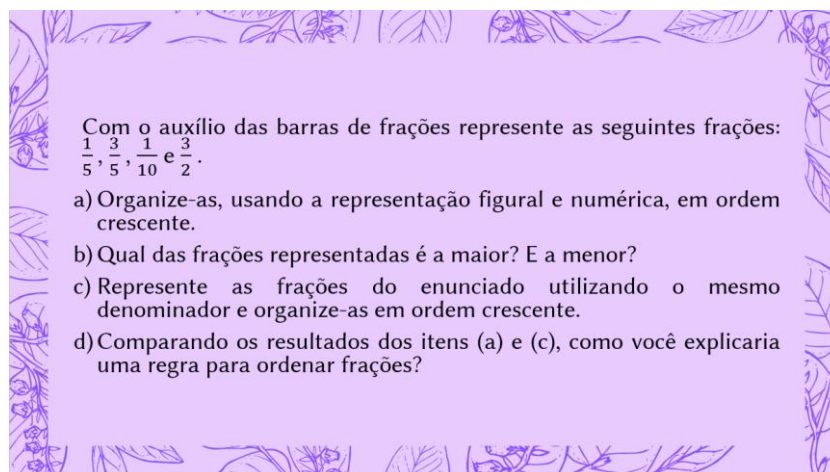
Fonte: Allevato e Onuchic (2021, p.51)

Em posse das Barras de Frações, cada equipe recebeu uma ficha com o mesmo enunciado, conforme ilustra a Figura 4, porém com números diferentes. A variação dos valores tinha como objetivo incentivar uma discussão a respeito da validade, para quaisquer números, dos procedimentos realizados, encaminhando à generalização dos resultados. Não foi feita a leitura conjunta da atividade, assim como não foram explicados previamente termos que constavam na ficha, como representação figural e numérica. Os alunos leram em equipe os enunciados e resolveram as atividades de modo autônomo enquanto as pesquisadoras realizavam a mediação, sanando dúvidas com relação à interpretação do enunciado ou instigando os alunos a refletirem sobre os processos que estavam realizando.

Essa ficha tratava da ordenação de frações, um conteúdo sobre o qual os licenciandos já tinham conhecimento, sendo o objetivo discutir a possibilidade do uso das Barras de Frações em sala de aula sem necessariamente corrigir as respostas. Como conclusão da atividade, era esperado que, a partir da manipulação do material e das reflexões realizadas ao longo dos itens propostos, a equipe conseguisse intuir uma regra

para ordenar frações que não dependesse do uso do material.

Figura 4: Ficha



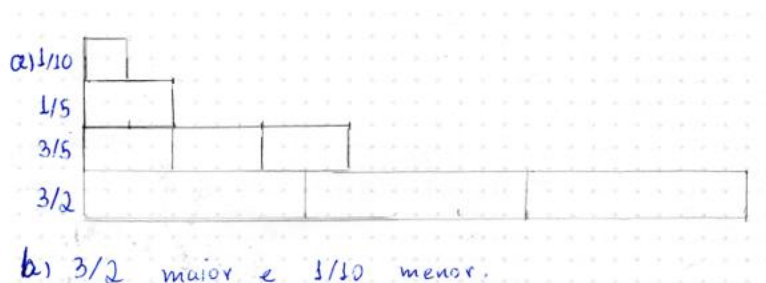
Fonte: Autoras (2024)

A ficha proposta constituía a terceira atividade da sequência. A primeira foi o problema 3, proposto por Onuchic e Allevato (2008), que aborda uma situação contextualizada sobre a divisão de sanduíches e o valor pago por eles. Com esse problema, foi possível explorar vários significados de fração (Figueiredo; Kieckhoefel; Hänsch, 2025). Em seguida, a segunda atividade envolvia equivalência de frações, enquanto a quarta abordava soma de frações e a quinta o significado de medida, todas propostas em formato de fichas. As atividades 2, 3, 4 e 5 foram resolvidas em bloco e discutidas juntas no final. Para esse grupo de atividades, os alunos não apresentaram as suas resoluções no quadro, apenas explicaram seu raciocínio para a turma, indicando dificuldades e conclusões. Assim sendo, entendemos que as etapas 6, 7 e 8 da MEAAMaRP foram desenvolvidas simultaneamente nessa roda de conversa. Para análise, usamos os registros escritos que as equipes entregaram e os áudios dessa discussão final, para compreender melhor as resoluções. A formalização foi feita após a conversa, apresentando os conceitos envolvidos, as conversões e os tratamentos dos registros e os significados de fração envolvidos em cada atividade. O processo e a análise das resoluções são apresentados a seguir.

4 Estratégias de resolução e reflexões sobre o processo

Num primeiro momento, para solucionar os itens (a) e (b) a partir do uso das Barras de Frações, os alunos faziam comparações entre o tamanho das peças, no registro figural, a fim de ordenar e identificar o maior e o menor. Como destaca a fala de A₆, integrante de E₁: “Primeiro a gente teve que colocar em ordem no material, pra depois dividir aqui e representar na folha. Se não tiver o material para desenhar na folha, fica complicado colocar em ordem certinho”. Na Figura 5, que ilustra o registro das conclusões de E₁, observamos que a equipe representou corretamente o registro figural, mas não o numérico, que seria $\frac{1}{10} < \frac{1}{5} < \frac{3}{5} < \frac{3}{2}$. As demais equipes, como esperado, também não demonstraram dificuldade nessa etapa, contudo, por vezes, apresentaram resoluções incompletas, como também ocorreu com E₁.

Figura 5: Resolução itens (a) e (b) de E₁



Fonte: dados da pesquisa (2024)

No diálogo entre P₁ e A₅, também temos a indicação do uso do material concreto para a ordenação:

A₅: Na letra (a) a gente só fez o desenho.

P₁: Mas pra chegar à conclusão de ordem crescente...

A₅: Ah, tá. Pelo tamanho. A gente, primeiro, fez a representação no desenho. [...] Aí, a gente viu, claramente, um era maior que o outro. E a gente só colocou em ordem.

P₁: Então, vocês se apoiaram no material pra fazer o desenho?

A₅: Sim.

Por outro lado, a equipe E₆, primeiro, fez as divisões das frações para analisar os valores decimais:

A₄: Primeiro a gente pensou na ideia de que a gente divide as frações pra ver o valor que dá. Ah, deu 0,3, e a outra deu 0,2. Aí, geralmente, a gente faz assim. Aí, a gente viu depois, que P₃ veio aqui explicar, pra gente utilizar as mesmas bases. Utilizando as mesmas bases, daí fica mais fácil de a gente ver qual que é a fração maior e qual que é a menor.

A equipe na plenária ainda argumentou que sentiu necessidade de confirmar o

resultado, como vemos no diálogo:

A₁₂: A gente fez o desenho primeiro, né? Só que depois a gente, ‘pra confirmar’, a gente dividiu...

A₄: Fez tipo, um dividido por dois. Só pra ter certeza absoluta que ele era o menor.

P₂: Eles transformaram no decimal.

A₅: Entendi. A gente confia no nosso potencial artístico.

A₄: Não, eu confio, mas eu quero ter certeza que eu tô certa.

P₁: Vocês não chegaram a pensar no decimal?

A₅: Não, então, é porque a proporção, ela é bem clara. Tipo, uma parte de dez é bem menor do que uma parte de cinco. Três partes de cinco é maior do que uma parte de cinco. E três partes de dois é maior do que três partes de cinco. Porque é um inteiro e mais alguma coisa.

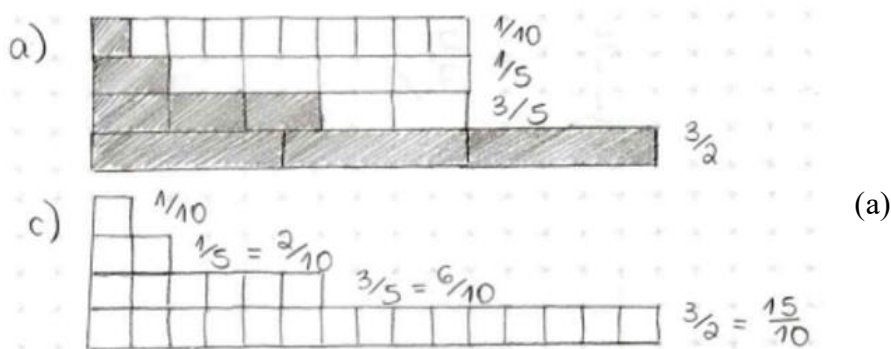
A partir dessas falas, destacamos três aspectos. O primeiro é que, para E₆, a fração é entendida com mais facilidade no significado de número (“a gente divide as frações pra ver o valor que dá”), o que parece contraditório, visto que o significado parte-todo é, em geral, privilegiado (Silveira, Souza e Powell, 2024). Isso parece apontar para uma defasagem nessa aprendizagem, uma vez que esses alunos possuem mais segurança ao trabalhar com o número decimal. O segundo aspecto é que essa dupla parece não compreender o material concreto como uma forma de representar a fração com a qual estão trabalhando. Parece haver uma desconfiança ao usar a peça de $\frac{1}{5}$ (representação concreta), por exemplo, para representar a fração $\frac{1}{5}$ (representação numérica fracionária), pois optam por realizar os cálculos para ter certeza de que a conclusão que chegaram com o material está correta.

Por outro lado, o terceiro aspecto diz respeito à fala de A₅, que interpreta a fração nesse contexto como parte-todo (“uma parte de dez é bem menor do que uma parte de cinco”) e parece compreender bem esse significado. Tendo em vista a clareza da descrição de seu raciocínio, parece-nos que o material seria dispensável para ela. Porém, no campo da Educação Matemática, há evidências de que não são apenas as crianças que podem se beneficiar do uso do material concreto, mas que estudantes de todas as idades podem favorecer-se com o uso desse recurso (Silveira; Powell; Grando, 2025). Portanto, vemos que, também para A₅, o uso do material pode trazer benefícios, talvez não necessariamente em termos de conhecimentos matemáticos, mas da sua formação docente.

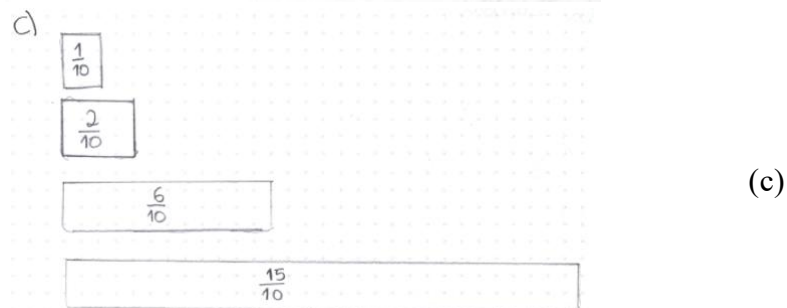
Vale destacar que a atividade anterior à de ordenação referia-se ao conteúdo de frações equivalentes, tanto próprias quanto impróprias, que auxiliou os alunos a familiarizarem-se ainda mais com o material e na construção do conceito de equivalência. Nela, os alunos eram instigados a representar frações no material tendo como ponto de inicial o significado parte-todo. Em seguida, os estudantes eram questionados, por exemplo, quantos $\frac{1}{6}$ eram necessários para formar $\frac{1}{3}$, concluindo que $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$, explorando a equivalência de frações.

Voltando para a ficha, no item (c), esperava-se que, ainda usando as Barras de Frações, os alunos fizessem tratamentos no registro figural de modo a encontrar peças que gerassem frações equivalentes, como o resultado apresentado por E₄ (Figura 6(a)). E₄ fez o tratamento no registro figural, além da conversão para o registro numérico, apresentando todas as frações do enunciado com o denominador igual a dez. Porém, nas resoluções escritas entregues pelas equipes, apenas E₄ fez esse tratamento. Outras equipes apresentaram o tratamento no registro numérico escrevendo a igualdade com frações equivalentes, como a resolução de E₂ na Figura 6(b), ou, ainda, escrevendo frações equivalentes no registro figural, mas sem fazer o tratamento (Figura 6(c), resolução de E₇). Acreditamos que essa situação ocorreu porque os alunos sabiam as respostas numéricas e não se atentaram em refletir sobre a prática com o material concreto, ou o registro figural, preocupando-se apenas em responder à questão. Como evidencia a fala de A₅, integrante de E₇: “A gente fez exatamente os mesmos desenhos, porque é uma representação, então, vai ser o mesmo desenho. Só mudamos os números de base. A gente teve que passar todo mundo para a base 10, porque era o único número que era múltiplo de todo mundo.” Entendemos que tanto a resolução escrita quanto esta fala indicam que eles (E₇) não repensaram a representação figural, apenas a numérica.

Figura 6: Resoluções do item (c)



(b) $\textcircled{c} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{12}, \frac{3}{4} = \frac{9}{12}, \frac{1}{12}, \frac{4}{3} = \frac{16}{12}$



Fonte: dados da pesquisa (2024)

Enxergamos no material potencial para realizar discussões acerca da atividade proposta, especialmente em pontos nos quais os alunos não encontraram a “resposta certa”. Nesse sentido, entendemos que a MEAAMaRP favorece a valorização do processo e da apropriação de conhecimento de cada aluno. Enquanto, por um lado, a MEAAMaRP possibilita a apresentação, a reflexão e a discussão dos resultados junto à turma, por outro, o material serve de suporte para exemplificar, verificar e analisar o que está sendo conversado. Na plenária, a professora regente das turmas pontuou:

Porque quando a gente pinta e desenha todas [peças] do mesmo tamanho, eu percebi que um terço era o mesmo tamanho que quatro partes aqui do um sobre doze. Dois terços eu poderia pegar as oito [peças de $\frac{1}{12}$]. [...] Então, quando tu desenha na mesma dimensão, fica mais fácil para perceber essas relações, para ter o mesmo denominador. Quando a gente desenha assim, numa escala sem nenhuma noção, aí acaba não dando certo. Então, [percebemos] o quanto o material manipulável é importante, porque está todo mundo ali na mesma escala.

Além dos aspectos já destacados, outra reflexão possível é em relação às representações diferentes, mas equivalentes, que poderiam ser dadas como resposta do item (c). Enquanto, no ensino superior, os licenciandos já sabiam a resposta e o foco estava na articulação do conhecimento com o material, no contexto da educação básica, temos como hipótese que os alunos manipulariam o material, comparando, testando e discutindo para encontrar uma resposta. Eles não precisariam ter conhecimentos prévios sobre mínimo múltiplo comum (MMC), por exemplo, para conseguir realizar as atividades e, a depender da manipulação feita, poderiam surgir resoluções diferentes.

décimos. E o três meios ficou 15 décimos. Então, eles ficam certinho em ordem crescente do jeito que a gente precisava identificar.

Figura 8: Resoluções do item (d)

d) Dividimos todas em partes iguais observando que podiam ser escritas no denominador 10. A partir disso, percebemos que os numeradores ficaram em ordem crescente, comprovando o item (a). $\frac{1}{10} < \frac{2}{10} < \frac{6}{10} < \frac{15}{10}$ (a)

$$\frac{1}{10} < \frac{3}{10} < \frac{9}{10} < \frac{30}{10}$$

$$\frac{1}{10} < \frac{1}{6} < \frac{3}{6} < \frac{5}{3}$$

(b)

d) Dividindo o numerador pelo denominador, comparando os resultados para observar qual seria a fração maior. Comparando as letras a e c, podemos observar que frações com a mesma base são mais fáceis de se comparar e obter seus resultados. (c)

Fonte: dados da pesquisa (2024)

Assim, a partir da resolução da sua ficha, E₄ conseguiu explicar uma regra que fosse válida para os números contidos no seu enunciado, não se preocupando com a sua validade para outros valores (Figura 8(a)). Algumas equipes escreveram as frações em ordem crescente usando a representação equivalente obtida no item (c), como exemplificamos na resolução de E₅ (Figura 8(b)). E₆ teve dois raciocínios. No primeiro, sugere um tratamento no registro numérico escrevendo as frações em forma decimal para, então, ordená-las. No segundo, concluiu que frações de mesmo denominador são mais fáceis de comparar, mas não explica como esse procedimento seria feito (Figura 8(c)). Pela fala de um de seus integrantes durante a plenária, fica claro que, num primeiro momento, usaram o significado número, que era mais natural para o entendimento que tinham de fração. Porém, a partir da mediação da professora, começaram a expandir sua compreensão, passando a entender a fração, também, a partir do significado parte-todo.

A₄: Primeiro a gente tinha colocado que dividindo o numerador com o denominador pra gente conseguir um resultado em decimal, que era mais fácil de achar. Depois a gente colocou comparando as letras a e c, a gente consegue observar as frações com a mesma base. A gente coloca em ordem crescente só.
P₁: Como é que vocês colocam em ordem crescente?

A₁₂: Foi o que a gente discutiu com a P₃ lá. De 12 partes a gente pega uma. Então acaba sendo menor. Daí de 12 partes a gente pega três. Acaba sendo assim... De 12 a gente pega nove. Então vai aumentando. Então de 12 partes pra pegar 16 acaba sendo maior do que um inteiro ali, então a gente acaba pegando mais.

Era esperado que, enquanto alunos do curso de licenciatura em matemática, eles escrevessem a regra para a ordenação, concluindo que, uma vez que as frações estivessem escritas com o mesmo denominador, seria suficiente olhar para os numeradores. Por outro lado, para aplicações no ensino básico, como as fichas de cada equipe teriam valores distintos, na plenária, almejar-se-ia que os alunos percebessem que um mesmo procedimento para a resolução do item (c) serviria para todas as equipes. Assim, mediados pelo professor, os alunos poderiam perceber que o padrão repetia-se, chegando ao consenso. Em seguida, o professor, usando esses exemplos, formalizaria a regra para a ordenação de frações.

4 Considerações finais

Vale (1999, p. 14, tradução nossa) defende que

Um dos objetivos que a formação inicial deve prosseguir é o de proporcionar um ambiente de aprendizagem em que os futuros professores, entre outros aspectos, tenham amplas oportunidades de serem confrontados com as mesmas atividades e experiências que deverão propor aos seus futuros alunos.

Nossa proposta de atividade vai ao encontro dessa ideia. No intuito de ampliar o conhecimento matemático a partir das conversões e tratamentos possibilitados pelo uso do material manipulável, os licenciandos tiveram acesso a novas representações e significados de fração, conteúdo que é abordado no ensino básico. Ainda, a atividade proposta a eles pode ser integralmente repetida nas salas de aula da educação básica, mudando apenas a mediação a ser realizada pelo professor.

Quando idealizamos essa proposta para o ensino superior, uma vez que os alunos já tinham conhecimento sobre frações, nossa expectativa era de que eles pudessem ter acesso a uma nova forma de ensinar esse conteúdo, tanto na perspectiva do uso do material manipulável, como da MEAAMaRP. Com relação à metodologia, nós, como mediadoras, incentivamos a reflexão sobre os resultados, indicando cada uma das etapas conforme elas aconteciam. Em relação ao material, como os alunos estavam preocupados em dar as respostas corretas, usaram-no apenas quando induzidos pelo enunciado, não conseguindo enxergá-lo como possibilidade metodológica para suas futuras aulas de matemática.



Educação Matemática em Revista – Rio Grande do Sul

Para aplicações futuras, na formação (inicial) de professores, sugerimos uma mediação que enfatize a realização das conversões e tratamentos entre os registros e a importância do papel do material manipulável nesse processo. Tem-se como finalidade que os (futuros) professores percebam a atividade como uma nova forma de ensinar frações, não apenas como um exercício.

Convém destacar que a mesma atividade pode ser aplicada na educação básica, sem necessidade de adaptações, bastando discutir com os alunos aspectos distintos daqueles trabalhados na formação de professores. Enquanto, na licenciatura, o foco recai sobre como ensinar frações, na educação básica, a discussão deve ser encaminhada para o significado que a fração assume naquele contexto.

No ensino básico, com a mediação, o professor pode instigar os alunos a comparar as peças para determinar a ordenação (resolução do item (a)), além de estar atento à utilização dos símbolos ($<$, $>$ e $=$) na conversão para o registro numérico, orientando-os sobre o seu uso correto. É provável que, na resolução em equipe, os alunos não consigam estabelecer uma regra para ordenar frações (item (d)), sendo papel do professor, na plenária, promover uma discussão que destaque as frações equivalentes obtidas como resposta do item (c), comparando-as às frações originais ordenadas no item (a), de modo a perceber um padrão que leve ao consenso. Por fim, ao formalizar, o professor conclui a regra para ordenação de frações, apresentando um procedimento que é válido para além da necessidade do uso do material.

Portanto, salientamos a importância de que os alunos, independentemente do nível de ensino, tenham a oportunidade de manipular o material repetidas vezes, interagir ativamente e recorrer a vários sentidos, tornando-se participantes engajados no seu processo de aprendizagem. No decorrer da sequência proposta para o ensino superior, a cada nova oportunidade de resolução de problemas com o uso das Barras de Frações em que realizavam conversões e tratamentos sobre elas, os alunos tinham a oportunidade de atribuir novos significados aos objetos matemáticos que estavam estudando.

Agradecimentos

As autoras agradecem à professora que cedeu as aulas para a aplicação das atividades, aos alunos participantes, ao Laboratório Fábrica Matemática (FAB3D) pela

produção dos materiais, ao grupo de Pesquisa em Educação Matemática e Sistemas Aplicados ao Ensino (PEMSA), a Universidade do Estado de Santa Catarina (Udesc) e à Fundação de Amparo à Pesquisa e Inovação do Estado de Santa Catarina (FAPESC) pelo auxílio financeiro.

Referências

- ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. de La R. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: Por que através da Resolução de Problemas? In: ONUCHIC, L. de La R.; ALLEVATO, N. S. G.; NOGUTI, F. C. H.; JUSTULIN, A. M. (Orgs.). **Resolução de Problemas: teoria e prática**. 2. ed. Jundiaí: Paco Editorial, 2021, p. 37-57.
- DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano**: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais. Trad. Lênio F. Levy e Marisa R. A. Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.
- DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **Revemat: Revista eletrônica de educação matemática**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2023. Trad. Mérciles T. Moretti.
- FIGUEIREDO, E. B.; KIECKHOEFEL, D. E. N.; HÄNSCH, J. E. Dá para dividir os sanduíches? Os registros de representação Semiótica e o material concreto na formação de professores. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, [S. l.], v. 14, n. 34, 2025. DOI: 10.33871/rpem.2025.14.34.10083. Disponível em: <https://periodicos.unespar.edu.br/rpem/article/view/10083>. Acesso em: 5 set. 2025.
- FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática. **Boletim da SBEM**. SBM: São Paulo, ano 4, n. 7, 1990.
- LORENZATO, S. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: LORENZATO, S. (org.). **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2012.
- MIRANDA, C. de A.; REZENDE, V. Diferentes representações dos números racionais: uma análise de livros didáticos de matemática. **Debates em Educação Científica e Tecnológica**, Vitória, v. 7, n. 3, p. 46-68, 2017.
- OLIVEIRA, E. N. de. **O aprendizado de frações por meio de materiais concretos**: uma tentativa de superar dificuldades elementares. 2022. TGR (Graduação) - Curso de Licenciatura em Matemática, Centro de Ciências Tecnológicas, Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville, 2022.
- ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. As Diferentes “Personalidades” do Número Racional Trabalhadas através da Resolução de Problemas. **Bolema**, Rio Claro/SP, Ano 21, nº 31, p. 79 a 102, 2008.
- SANTOS, A. dos. **O conceito de fração em seus diferentes significados**: um estudo diagnóstico junto a professores que atuam no Ensino Fundamental. 2005. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.
- SILVEIRA, E.; POWELL, A. B.; GRANDO, R. C. Materiais Manipulativos em Educação Matemática: categorização, usos e equívocos. **VIDYA**, v. 45, n.1, p. 135-152, 2025.
- SILVEIRA, E.; SOUZA, M. A. V. F.; POWELL, A. B. Estudo de Frações: superficialidades, parcialidades ou equívocos. **Bolema**, v. 38, p. 01-28, 2024.



Educação Matemática em Revista – Rio Grande do Sul

VALE, I. Materiais manipuláveis na sala de aula: o que se diz, o que se faz. In: APM (Eds.). **Actas do ProfMat 99**. Lisboa: APM, p. 111-120, 1999.

VALE, I. **Materiais Manipuláveis**. Viana do Castelo: Laboratório de Educação Matemática, 2002.

Recebido em: 20/06/2025

Aceito para publicação em: 01/09/2025