Sociedade Brasileira de Educação Matemática

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA em *Revista*
ISSN 2317-904X

Cubagem de Terras e a Integral de Riemann: uma análise crítica dos modelos

Land Cube and the Riemann Integral: a critical analysis of the models

https://doi.org/10.37001/emr.v26i70.1756

Ailson Lopes Alzeri[1]

Resumo

Neste artigo, apresentamos o desenvolvimento de uma análise crítica e comparativa dos modelos da Cubagem de Terras, técnica normalmente utilizada pelos agricultores para inferir a quantidade de terras no trabalho do campo, e da Integral de Riemann, com ênfase em sua demonstração geométrica. Os modelos são investigados sob uma perspectiva histórica e matemática de sua constituição e desenvolvimento, apontando aproximações, sem, no entanto, indicar com isso grau de superioridade ou inferioridade entre eles. Adotamos como principal referência teórica a Educação Matemática Crítica (SKOVSMOSE, 2013). Para o desenvolvimento dos estudos matemáticos, tomamos como suporte para a obtenção de cálculos e confecção de gráficos o software GeoGebra. Os resultados apontam para modelos matemáticos que, apesar de sua proximidade matemática e histórica, são persistentes e quase incomunicáveis em sua aplicação ao longo do tempo. Também enfatizamos, no processo de análise, o poder de intervenção dos modelos na própria realidade de seus usuários.

Palavras-chave: Cubagem de Terras. Integral de Riemann. Modelos. Análise Crítica.

Abstract

In this paper, we present the development of a critical and comparative analysis of the Land Cube models, a technique normally used by farmers to infer the amount of land in the fieldwork, and the Riemann Integral, with emphasis on their geometric demonstration. The models are investigated from a historical and mathematical perspective of their constitution and development, indicating approximations, without, however, indicating a degree of superiority or inferiority between them. We adopted Critical Mathematics Education as the main theoretical reference (SKOVSMOSE, 2013). For the development of the mathematical studies, the GeoGebra software was taken as support for calculations and graphing. The results point to mathematical models that, despite their mathematical and historical proximity, are persistent and almost incommunicable in their application over time. We have also emphasized in the process of analysis the power of intervention of the models in the own reality of its users.

Keywords: Land Cube. Riemann integral. Models. Critical analysis.

1 Introdução

No Brasil, em especial na Zona Rural, fora dos grandes centros urbanos, é de uso recorrente termos como cubar terras, tarefas de terras, léguas, braças, palmos, dentre outros.

[1] Mestre em Educação Matemática e Tecnológica pela Universidade Federal de Pernambuco. Doutorando em Educação Matemática pela UNESP- Rio Claro (SP). Assistente de Alunos do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE), Crato, Ceará, Brasil. E-mail: ailsonalzeri@gmail.com.

Esses termos expressam medidas convencionais de comprimento ou de superfície, que são utilizadas e podem sofrer variações, dependendo da região do país em que são empregadas. A exemplo da braça, medida de comprimento predominante usada no Nordeste brasileiro, essas variações ganham expressão pelo fato de tais medidas serem localmente reconhecidas e estarem diretamente ligadas à cultura, à necessidade e à prática do cotidiano de cada localidade, fator este que não limita sua validade num sentido matemático e nos possibilita análise pretendida.

Neste artigo, apresentamos especificamente um estudo que caracteriza e relaciona o modelo de Cubagem de Terras e o modelo geométrico da Integral Riemann. Centrado numa percepção de modelos matemáticos e da própria matemática como uma construção humana, intimamente relacionada com as vivências sociais e o aparato cultural nos quais são produzidos. Vista assim, a matemática não é simplesmente descoberta, mas construída, reconstruída e inventada, seguindo padrões aceitos pelos seres humanos e em determinado contexto social (MEYER; CALDEIRA; MALHEIROS, 2017).

Adotamos, como principal referência teórica, os trabalhos desenvolvidos por Ole Skovsmose, dentro do âmbito da Educação Matemática Crítica (SKOVSMOSE, 2007, 2013). Buscamos assim, desenvolver reflexões amparadas no fato de que na matemática não existe resposta única para um problema investigado, nem tão pouco um caminho único e imparcial a ser percorrido. Essa percepção munida de estudos sobre modelos desenvolvidos por autores como Muller (1986), Gowers (2008), Roque e Videira (2013), nos levaram à adoção de uma abordagem crítica que questiona como os modelos são construídos, influenciados e influenciam o meio social em que são usados.

Temos, assim, uma discussão que parte da visão histórica de como a matemática e, em específico, as medidas de superfície são concebidas. Apresentamos, em seguida, os modelos de Cubagem de Terras e do conceito geométrico da Integral de Riemann. Por fim, fazemos simulações e comparações para o uso das duas técnicas para medida de superfície. Não objetivamos com isso, mesmo diante da comparação gráfica utilizada, fazer uma análise quantitativa dos modelos no sentido de apontar vantagens ou desvantagens deles. Buscamos, no entanto, pelo entendimento do processo de construção e uso dos mesmos, vislumbrar aspectos que perfazem suas próprias existências dentro do contexto em que são produzidos e também produzem percepções e ações.

Usamos, também, no referente ao estudo matemático do modelo geométrico da

Integral de Riemann, autores do cálculo integral, com reconhecidas publicações no Brasil, tais como: Stewart (2017), Guidorizzi (2013), Hoffmann e Bradley (2008) e, ainda, a contribuição de Ávila (2006) em análise na reta.

Para a construção das figuras gráficas e também obtenção de alguns cálculos, utilizamos o software educacional GeoGebra. Tecnologia essa com comprovado potencial também para o ensino de Matemática (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2015). Nesse trabalho, desempenhou a função primordial de possibilitar principalmente a obtenção rápida de cálculos e a confecção de gráficos de simulações.

2 Medidas práticas de superfície

A noção de espaço é uma das características matemáticas mais primitivas desenvolvidas pela espécie humana. Inicialmente, a ideia de tamanho e, consequentemente, a medida de comprimento de um objeto foram associadas diretamente com as partes do próprio corpo humano, assim o mais comum era o uso de unidades não convencionais, como o palmo, a polegada, o pé, a jarda e o cúbito[2]. Essas medidas tiveram função primordial como base para organização e desenvolvimento das primeiras comunidades humanas mais organizadas no sentido moderno do termo (SILVA, 2016).

Com o surgimento das primeiras civilizações, houve um considerável aumento na quantidade de indivíduos vivendo em agrupamentos, na divisão das tarefas e também uma subsistência baseada principalmente na agricultura. Para tanto, foi necessária uma maior padronização, mesmo que em termos locais. Temos, ainda segundo Silva (2016), o surgimento de medidas padrão que se tornaram de uso reconhecido para determinados povos, como o Dígito (polegada) para Gregos, Cúbito para Egípcios, Jardas para Ingleses ou ainda o caso da braça para os Portugueses.

As medidas lineares padrão formaram a base para o desenvolvimento de medidas práticas de superfícies. O palmo, por exemplo, é utilizado para determinar o comprimento de uma braça, que, por sua vez, é a unidade que estabelece o comprimento dos lados da região quadrangular originária da tarefa. Com maior ou menor precisão, as técnicas e tecnologias foram sendo empregadas para medir áreas de terras que, de maneira empírica, subsidiaram a adaptação dos seres humanos ao meio natural.

[2] Distância que ia do cotovelo às pontas dos dedos da mão.

Com o avanço da matemática axiomática, muitas técnicas de cálculo anteriormente mencionadas, também passaram a ser exploradas no campo do que viria a ser a matemática pura ou teórica. Segundo Eves (2004), merece destaque nesse contexto a matemática primitiva originária no Oriente, às margens de grandes rios da África e da Ásia, principalmente, entre os povos Babilônios e Egípcios. Para esses povos, a principal dificuldade foi a adaptação às exigências climáticas impostas pela natureza. Era, então, imperativo, conhecer técnicas de mensuração prática, sobretudo, que subsidiassem o fornecimento constante de alimentos cultivados às margens dos rios.

Os babilônios estavam familiarizados com as regras gerais para o cálculo da área de um retângulo, da divisão deste em triângulos, que, a partir de então, usavam como ferramenta para a composição e cálculo da área de diversas outras formas geométricas. Um obstáculo, já encontrado por esses e outros povos, foi, no entanto, o cálculo da área de regiões com lados não retos ou circulares, sendo que a principal técnica empregada era a da quadratura, ou seja, uma aproximação por meio da superposição de figuras geométricas quadrangulares. É possível afirmar que "provavelmente nenhum outro problema exerceu um fascínio maior ou mais duradouro do que aquele de construir um quadrado de área igual à área de um círculo dado" (EVES, 2004, p. 140). Os egípcios, por sua vez, conseguiram uma boa aproximação para esse problema, de maneira que a área do círculo fosse igual à área de um quadrado de lado igual 8/9 do diâmetro do referido círculo.

Resumidamente podemos ressaltar duas características que são marcantes e remontam o desenvolvimento dos métodos para o cálculo das medidas prática de superfície, e, também, de parte da Matemática. A primeira é o fato de que algumas medidas, baseadas em partes do corpo humano, tenham culturalmente perpassado ao longo dos séculos, chegando a vários povos na modernidade. A segunda é marcada pelo já citado método da quadratura, usado para apropriação e aproximação do cálculo para muitas regiões de lados curvos.

Essas características balizam os modelos associados em nossas discussões, em especial, o da Cubagem de Terras, conforme passaremos a melhor detalhar.

2.1 Cubagem de terras

A Cubagem de Terras é um modelo prático para calcular a área de superfícies, tem como unidade de medida padrão a tarefa, que, por sua vez, é composta por subdivisões denominadas braça e quadro. Essas são medidas predominantemente agrárias e não estão diretamente associadas ao Sistema Internacional de Pesos e Medidas (SI). São utilizadas no Brasil, principalmente, como maneira de medir regiões destinadas ao preparo, ao plantio ou à colheita de produtos agrícolas diversos.

A braça é uma unidade de medida linear que remonta a já citada técnica de usar partes do corpo como unidade básica para obtenção de um padrão. Normalmente, é utilizada pelo homem do campo com o auxílio de uma vara[3] (régua de madeira) de aproximadamente 2,2m de comprimento. Conforme observam Vizolli e Mendes (2012, p.8), o comprimento da vara é costumeiramente estabelecido de forma prática e é "expressa da seguinte maneira: 4 palmos(p) + 4 dedos(d) + 4 palmos(p) + 4 dedos(d) + 1 chave(c). Como a braça tem 2,2m, temos que 4p + 4d + 4p + 4d + 1c = 2,2m. Em outros termos, 2,2m = 1 braça".

Com algumas variações na técnica de obtenção, a braça mantém um padrão aproximado no Brasil. Teve, como origem histórica, a influência portuguesa, que implantou o referido sistema ainda no período de colonização, sobretudo, no Nordeste brasileiro. Vale ressaltar que outras unidades, que também eram padrão em Portugal até o século XIX, tiveram influência no Brasil, é o caso da polegada e do palmo. No caso específico da braça, é citada por Pero Vaz de Caminha, na carta enviada ao rei de Portugal, ao descrever distâncias referentes ao que avistava nas novas terras (FREITAS, 2010).

No caso da medida do quadro, remonta a técnica da obtenção de áreas por intermédio da quadratura, aproximando-se à forma quadrangular. Como unidade intermediária, o quadro apresenta uma maior variação em tamanho de uma região para outra. No Ceará, por exemplo, é utilizada a unidade de uma braça quadrada para representação de um quadro, já, nos estados da Bahia, Goiás e Tocantins, a medida de um quadro corresponde à região quadrada com 15 braças de lado.

Para o cálculo da quantidade de tarefas, e, portanto, a efetivação da cubagem de uma determinada região, também existe algumas diferenças a depender da região do país em que é calculada. No Ceará, uma tarefa é composta por 625 quadros, ou seja, uma área de 25 braças quadradas[4]. Em alguns outros estados, como os anteriormente mencionados, a tarefa é composta por quatro quadros, consequentemente, uma área de 30 braças quadradas.

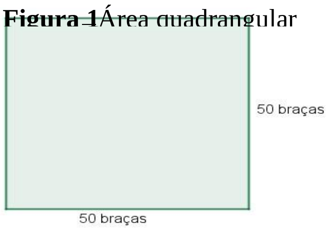
---

[3] Pedaço de madeira padrão com comprimento de uma *braça*. Não confundir com a antiga unidade portuguesa *Vara*, que correspondia a 5 *palmo*s, aproximadamente meia *braça*.

[4] Por questão metodológica passaremos a utilizar nas discussões seguintes à tarefa conforme calculada no Ceará.

Quando visto sob uma perspectiva da matemática formal, ensinada em muitas escolas brasileiras, com figuras geométricas regulares, é razoavelmente simples cubar a área de uma região quadrangular usando a técnica e as unidades expostas anteriormente. Conforme representada na *Figura 1*, temos:

Figura 1 Área quadrangular



Fonte: Acervo da pesquisa

Multiplicando os lados $50 \times 50 = 2500$ e dividindo por 625 (quantidade de quadro) obtém-se 4 *tarefas*.

No mundo real, em que essas medidas são utilizadas de acordo com a prática e necessidade das pessoas, raramente as áreas se apresentam de maneira regular e de cálculo facilitado como ilustrado na *Figura 1*. Ao contrário, diante da complexidade da realidade observável, Borba e Skovsmose (2013, p.131) ressaltam que a "matemática pode ser aplicada a problemas apenas se eles são "cortados" de uma forma apropriada, para se adequar à matemática, e a matemática é "perfeita" apenas quando construímos um contexto suficientemente adequado para essa proposta".

No caso, em específico, da Cubagem de Terras, o mais comum são regiões com contornos geométricos pouco definidos, estabelecidos por obstáculos da natureza, como pedras, rios ou declives, ou ainda por obras do ser humano, como açudes, divisórias (cercas), estradas, dentre outras, em que, no processo de medição, são necessárias aproximações que adaptem o pensamento matemático à realidade encontrada.

Dessa maneira, em um contexto representado pela área de uma determinada plantação de milhos, por exemplo, pode haver diferenças tanto no comprimento quanto nas formas dos lados da região a ser cubada. No primeiro caso, conforme elencamos, a cubagem é realizada pelo produto da média dos lados opostos, ou seja, em uma região quadrangular com lados opostos 40 e 36, e também 72 e 64, teremos: $\frac{40+36}{2} = 38$ e $\frac{72+64}{2} = 68$, portanto, um total aproximado de $(38 \times 68) \div 625 = 4{,}134$ tarefas. Essa aproximação, por intermédio das médias, pode ocasionar diferença considerável no resultado final.

O segundo caso, quando os lados são não lineares, a aferição é realizada da mesma maneira, como se os lados fossem retos. Com o auxílio da braça, é feita uma medida aproximada por superposição, por falta ou por excesso, visto que o pedaço de madeira linear não se ajusta totalmente às curvas ou obstáculos. Dessa forma, é feito um ajuste da região de maneira a transformá-la na forma quadrangular.

Os fatores, anteriormente elencados, fazem parte das escolhas impostas pelo modelo matemático para a Cubagem de Terras e são socialmente aceitos por seus usuários. Não têm, portanto, conotação de falhas ou erros dentro do próprio sistema cultural em que são empregados. Podem, quase sempre, serem observados ou contestados somente a partir de uma análise ou validação mais rigorosa do modelo em questão.

3 Medidas de Superfície e a Integral de Riemann

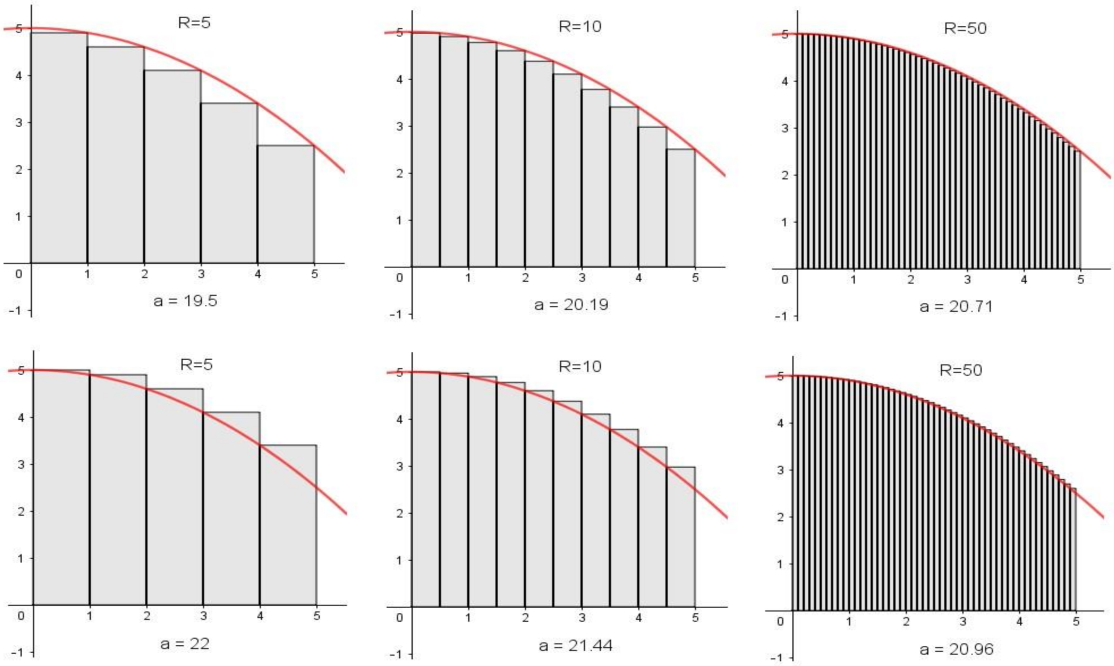
A relação estabelecida entre a Cubagem de Terras e a Integral de Riemann, quando abordada sob um ponto de vista da história da matemática, revela-se mais propícia à compreensão. Podemos observar que o desenvolvimento dos sistemas de medidas de terras, com o uso de unidades como a braça e a tarefa, teve suas origens presentes em civilizações do Oriente antigo, origens essas também marcadas pela problemática que deu ao cálculo integral, uma vez que:

> [...] o desenvolvimento histórico do cálculo seguiu a ordem contrária à daquela dos textos e cursos básicos atuais sobre o assunto: ou seja, primeiro surgiu o cálculo integral e só muito tempo depois o cálculo diferencial. A ideia de integração teve origem em processos somatórios ligados ao cálculo de certas áreas e centos volumes e comprimentos (EVES, 2004, p. 417).

Assim, temos que o problema da obtenção da medida da área de regiões delimitadas por lados não lineares, que esteve presente desde os povos antigos, como egípcios e mesopotâmios, passou pela formalização da matemática grega com a contribuição de nomes, como Eudoxo e Arquimedes, que fixaram bases para o que seria o desenvolvimento do cálculo integral moderno com Leibniz e Newton.

É, portanto, nessa perspectiva geométrica, que a Integral de Riemann teve origem, baseando-se na técnica que consiste em dividir uma região em um número crescente de retângulos, conforme destacamos nas representações apresentadas na *Figura* 2, que segue.

Figura 2 – Somas de Riemann



Fonte: Acervo da pesquisa

Na *Figura 2*, os gráficos são delimitados superiormente pelo ramo da parábola da função $f\ (x)\ = -0.1x^2 + 5$, inferiormente pelo eixo x das abscissas no intervalo [0 ; 5], e lateralmente pelas retas $x = 0$ e $x = 5$. Realizamos uma divisão da região em diferentes quantidades de retângulos com respectiva soma das áreas deles, processo conhecido como Soma de Riemann.

Na primeira fileira de gráficos, a aproximação é realizada por falta, na segunda é realizada por excesso. Os resultados podem ser visualizados no *Quadro 1*.

Quadro 1 – Resumo das somas de Riemann

Quantidade de retângulos	**Soma das áreas = área total da região**	
	Por falta	**Por excesso**
5	19,50	22,00
10	20,19	21,44
50	20,71	20,97

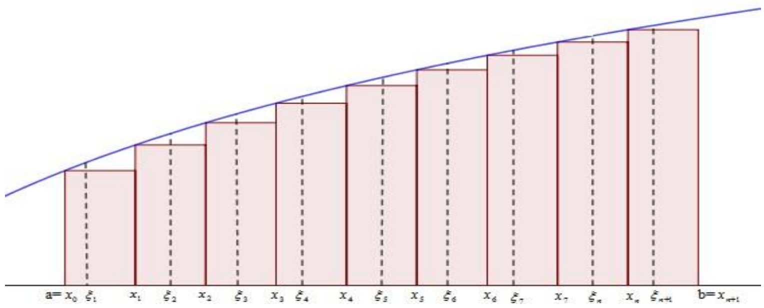
Fonte: Acervo da pesquisa

É possível constatarmos que quanto maior a quantidade de retângulos, melhor será a aproximação para um preenchimento da região delimitada pela curva, e que, ao aumentarmos a quantidade de retângulos, aproximamo-nos cada vez mais de uma medida de área que está entre 20,71 e 20,97. Nesse ponto, temos a indicação intuitiva do estudo do comportamento da função quando aumentamos a quantidade de pontos que a divide no intervalo. Essa noção do estudo de comportamento de uma função f(x), quando x se aproxima de um valor c, que pode inclusive não pertencer ao domínio de f(x), é a base para o conceito intuitivo de limites, o qual potencializa o cálculo como ramo extremamente poderoso da matemática aplicada (HOFFMANN; BRADLEY, 2008).

De maneira geral, se tivermos, no eixo das abscissas, um intervalo fechado [a , b] com uma função f(x) definida neste intervalo, podemos tomar um conjunto de pontos A { x_0 =a, x_1, x_2 , x_3, ... , x_n , x_{n+1}= b}, com $x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < ... < x_n < x_{n+1}$. Esse conjunto de pontos dividem intervalo [a , b] em subintervalos do tipo [x_0 , x_1], [x_2 , x_3], [x_n , x_{n+1}], e o conjunto desses subintervalos é denominado de partição do [a, b]. A amplitude desses subintervalos é indicada por $\Delta_x = x_n - x_{n-1}$ e pode ser visualizada sua representação na

Figura 3, a seguir.

Figura 3 - Gráfico da Soma de Riemann



Fonte: Dados da pesquisa

A amplitude é indicada pela noção do comprimento da base das faixas retangulares, já a escolha de pontos arbitrários, em cada subintervalo ξ_1, ξ_2, ξ_3, ... , ξ_n , aplicadas na função f(x), determinam os valores f(ξ_1), f(ξ_2), f(ξ_3), ... , f(ξ_n), correspondente às alturas das faixas. Dessa maneira, a área da região pode ser aproximada pela Soma de Riemann escrita na forma $\sum_{i=1}^{n} \Delta_x f(\xi_i) = \Delta_x f(\xi_1) + \Delta_x f(\xi_2) + \Delta_x f(\xi_3) + ... + \Delta_x f(\xi_n)$.

O desenvolvimento do cálculo, a partir do século XVII, potencializou o trabalho em diversos ramos da matemática, em particular, no caso da Soma de Riemann, com o uso da informação de que quanto maior a quantidade de faixas retangulares melhor a aproximação, e, com o uso de limites, foi possível definir como Integral de Riemann o lim (

$n \to \infty$

n

$\square\square_x f(\square_i))$, simbolicamente representada por $\int_0^n f(x)dx$.
$i=1$

Esse modelo, adotado para a formalização da Integral de Riemann, é costumeiramente empregado de maneira introdutória nos cursos de cálculo, tendo como desvantagem o fato de estar diretamente associado à noção de área, fator este desnecessário quando se trata de uma formalização mais abstrata. Resgata, no entanto, o importante raciocínio que evidencia interessante proximidade com o método para o cálculo de áreas por quadratura que, no caso da Integral de Riemann, assim como na Cubagem de Terras, tem em comum a técnica da soma dos retângulos que compõem a região em estudo.

4 Análise e Resultados

Para um melhor entendimento do leitor, vale esclarecer o que entendemos por Análise Crítica de Modelos. Analisar um modelo significa, de maneira geral, discutir as potencialidades e limitações que ele apresenta ao representar determinado fenômeno. Tradicionalmente, a análise de modelos, se aproxima da matemática aplicada, envolve o estudo das escolhas e ferramentas matemáticas utilizadas para a composição inicial do modelo. Nesse sentido, um primeiro e importante enfoque que merece destaque é a percepção que, ao analisar um modelo, temos da matemática como criação humana, resultado de um processo de escolhas dependentes dos objetivos e interesses de quem o produz (SOARES; JAVARONI, 2013).

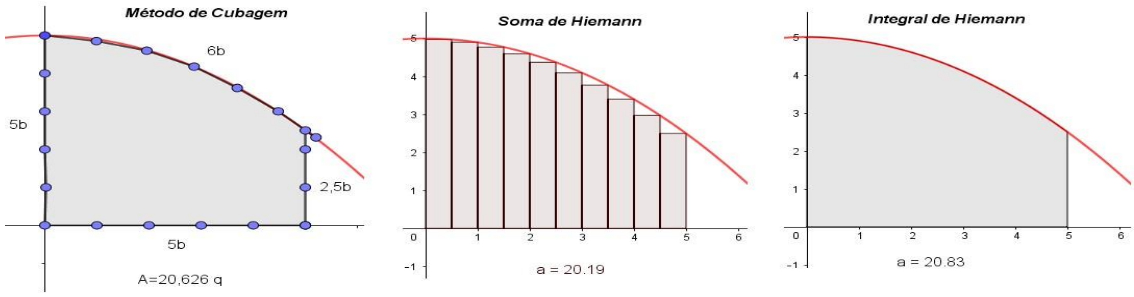
Entretanto, ao aderir a uma análise crítica de modelos, aproximamo-nos também dos conceitos apresentados pela Educação Matemática Crítica. Buscamos ir além do estudo das características matemáticas do modelo, entendemos que os modelos matemáticos têm uma influência real na vida das pessoas, ou seja, “maneiras de calcular impostos, auxílio às crianças, salários, estratégias de produção etc. não são apenas modelos de pensamento, elas têm uma influência real nas nossas vidas” (SKOVSMOSE, 2013, p. 81).

Os modelos, uma vez construídos e aceitos em uma determinada sociedade, passam a operar de forma implícita, não demonstram características, escolhas e falhas típicas de sua construção. A matemática então é apresentada como um algoritmo, tornando-se, muitas vezes, uma diretriz indiscutível do que se deve fazer. Cabe, então, à análise crítica de modelos matemáticos discutir, não apenas a adequação do modelo ao fenômeno estudado, mas também avaliar sua relação e influência com o meio sociocultural em que é utilizado.

Não é importante, portanto, nesse contexto, um estudo dos modelos que nos leve à indicação de qual é matematicamente o modelo mais eficiente, mais adequado ou superior. Priorizamos uma análise que leva em consideração também o alcance, as características e a maneira como o modelo é gerido no meio em que é utilizado.

A *Figura 4* representa uma simulação a partir de uma região que tem sua área expressa por modelos obtidos com o uso de diferentes técnicas. Para tanto, foi utilizado o software GeoGebra que possibilitou a confecção dos gráficos e os cálculos necessários.

Figura 4 - Simulação



Fonte: Dados da pesquisa

Nos três gráficos confeccionados, exceto no que se refere ao cálculo de integral, é utilizado o cálculo por falta, ou seja, a região é demarcada internamente. Da esquerda para direita, temos, no primeiro gráfico, uma simulação de uma região medida por um seguimento de reta equivalente a uma braça, o seguimento é sobreposto internamente sob o lado da figura, simulando o que normalmente é feito para obtenção de uma região a ser cubada, os lados correspondem a 5, 6, 2,5 e 5 braças. Com base no método da cubagem de terras, foi obtido um resultado 20,625 braças quadradas ou 20,625 quadro (q).

No segundo gráfico, a região foi sobreposta por retângulos, calculado a área deste e então realizada a soma (Soma de Riemann), processo intermediário ao método geométrico da obtenção da integral. Vale salientar que não encontramos registros de sua utilização de maneira prática. Foi obtida, com a aproximação, uma área de 20,190 q.

No terceiro e último gráfico, foi calculada a Integral de Riemann para a área em estudo. Com essa técnica, foi obtido o resultado de 20,830 q. Nesse caso, com o uso do cálculo integral, foi possível generalizar uma cobertura da região quando tomamos as subdivisões tendendo ao infinito, o que possibilitou uma aproximação matemática mais rigorosa que as demais técnicas.

Ao comparar as áreas obtidas pelo processo de Cubagem de Terras e pela Integral de Riemann, constatamos que existe uma diminuição no valor da primeira em relação à segunda, em torno 1%. Naturalmente, esse valor poderá variar dependendo das aproximações realizadas na cubagem. Também o valor poderia ser maior ou menor, dependendo de como foi realizado o processo de medição da região, se tomado externo ou internamente. Salientamos, no entanto, que rotineiramente em um sistema de trabalho rural, em que são cubadas as terras, as medidas são feitas internamente à região, sobretudo, quando estas se relacionam à preparação para o cultivo das terras.

Com um foco centrado mais no processo e menos nos resultados, é possível constatar, conforme discutido anteriormente que, quando diminuímos a unidade medida para aferir regiões curvas ou pouco regulares, melhoramos consideravelmente a aproximação numérica para a medida de sua área, ou seja, se utilizarmos, no lugar da braça (2,2 m), uma unidade menor, aumenta-se consideravelmente a aproximação com a área desejada, chegando-se à precisão do Cálculo Integral.

Então, poderíamos indagar o porquê do uso de um modelo em oposição a outro? Ou mesmo o porquê da sobrevivência de modelos como o da Cubagem de Terras durante longos períodos? Desconsiderando o aprofundamento filosófico que pede a questão, podemos apontar, em concordância com D'Ambrosio (2011), que os modelos encontram justificativas no próprio meio social em que são aplicados, ou seja, estão associados e resolvem problemas relacionados às pulsões de sobrevivência e transcendência dos seres humanos, as representações estão associadas às percepções em um tempo e espaço. Assim, a técnica de Cubagem de Terras teve uma valoração bem maior para os problemas inerentes ao cultivo de terras em países como o Brasil, se comparado a um modelo como o uso do Cálculo Integral que, na forma moderna, teve seu desenvolvimento somente a partir do século XVII, e seu domínio e popularidade ainda é fator desafiante, restringindo-se em grande parte ao meio acadêmico.

Outro fator que consideramos importante, quanto ao emprego de modelos numa maneira geral e em específico na Cubagem de Terras, é que os resultados obtidos são geralmente considerados como o fim do processo, inquestionáveis, perdendo, ao longo do tempo, a possibilidade de avaliação crítica por parte de seus principais usuários, passando, assim, a serem considerados uma verdade absoluta. O objetivo principal para aprender o modelo é sua aplicação prática, para tanto, o mais importante é que um grupo domine as técnicas de cálculo envolvidas nesse processo, mesmo que de maneira prescritiva.

Tomada a braça como unidade padrão e a técnica de Cubagem de Terras imutável por mais de cinco séculos, remete-nos ao que Skovsmose (2013) denominou, na sociedade moderna, de abstrações concretizadas. A matemática tem, nesse sentido, um poder formatador, que não se reduz a consequências pontuais. “Tomamos decisões baseadas em modelos matemáticos e, dessa forma, a matemática molda a realidade; portanto, não podemos restringir a discussão de modelos a ‘aproximações’” (BORBA; SKOVSMOSE, 2013, p. 135).

É necessário observar, segundo a perspectiva da Matemática Crítica, que quando o trabalhador do campo usa o modelo de Cubagem de Terras, ele não só produz uma ação com consequências imediatas sobre a maneira como será retribuído por seu trabalho, mas, também, à forma como passa a pensar seu esforço empreendido, em que dias, horas ou meses de trabalho poderão ser pensados e substituídos em termos de tarefas cultivadas, influenciando tanto no esforço quanto no ritmo do trabalho empreendido. Portanto, o uso de um modelo vai além de quantificar um valor imediato, intervém, também, na realidade de quem os utiliza.

Esses fatores apontam que, para a concepção de uma sociedade mais igualitária e democrática, é necessário o desenvolvimento de uma alfabetização matemática (SKOVSMOSE, 2013) que passe a considerar a aprendizagem de conhecimentos matemáticos, sua aplicação e, principalmente, a construção de um conhecimento reflexivo, que também analise e avalie o modo como os modelos matemáticos são utilizados.

5 Conclusões

Dentro da percepção que coloca os modelos matemáticos como fruto da realidade e necessidades temporais dos seres humanos, identificamos na pesquisa traços que permeiam a construção geométrica desde as primeiras medições de terras, nas civilizações antigas, até ao conceito básico originário do Cálculo Integral. Fatores estes que indicam a necessária quebra do paradigma que coloca a matemática acadêmica como superior às aplicações mais simples, muitas vezes, percebida como de difícil acesso e compreendida por um mínimo grupo de usuários. Estabelece, assim, uma relação com matemáticas que podem ser usadas tanto na construção geométrica da Integral de Riemann quanto na prática do homem do campo, sobretudo, no uso para Cubagem de Terras no Nordeste brasileiro.

Verificamos, também, no processo geométrico que define a Integral de Riemann, em uma região com lados não lineares, que, quanto maior o número de partições para a obtenção do resultado final, melhor será a aproximação com a área total da região. Este, junto ao aspecto da média dos lados na *Cubagem de Terras*, pode acarretar em um cálculo com perdas ou ganhos no tamanho da área mensurada. Embora esses fatores, normalmente, não sejam devidamente analisados pelos usuários de modelos já socialmente incorporados e aceitos.

Diante das constatações, seria lucrativo, em determinados casos, para o agricultor, apenas com a mudança da unidade de medida, trocando a braça por unidade menor, aumentar o resultado do cálculo da área que cultivou. Temos, no entanto, ao longo de séculos, a manutenção da técnica de cubagem quase imutável. É notório, nessa constatação, como o modelo persiste, impõe-se e lança base não apenas para o presente, por intermédio do trabalho realizado, mas, também, na maneira como são pensadas e administradas situações para o futuro.

Apesar deste trabalho não ter como foco principal a modelagem direcionada para o ensino e aprendizagem de matemática, não desconsideramos a possível contribuição para tal fim, sobretudo, no que concerne à associação de modelos matemáticos culturalmente aceitos em distintos meios, o que reforça seu potencial didático-pedagógico para o ensino.

A análise crítica dos modelos em questão lança, por fim, o desafio para que possamos ir, neste e em outros trabalhos, além do ciclo de aprendizagem restrito à repetição das técnicas de uso dos modelos matemáticos. Acreditamos no necessário aprofundamento, não apenas da validação matemática do modelo frente ao contexto de seu uso, mas, também, na identificação e reflexão de sua produção, ação e impacto sobre o meio social em que é gerido.

Referências

ÁVILA, G. S. S. **Análise matemática para licenciatura**. 3 ed. São Paulo: Blucher, 2006.

BORBA, M. C.; SCUCUGLIA, R. R. S; GADANIDIS, G. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática**: sala de aula e internet em movimento. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2015.

BORBA, M. C.; SKOVSMOSE, O. A Ideologia da Certeza em Educação Matemática. In: SKOVSMOSE, O. **Educação Matemática Crítica**: A questão da democracia. 6. ed. Campinas, SP: Papirus, 2013. p. 127-148.

D'AMBROSIO, U. **Etnomatemática**: elo entre as tradições e a modernidade. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.

FREITAS, J. R. C. **Contexto histórico-sócio-cultural das medidas agrárias não oficiais utilizadas na Mata Sul de Pernambuco e no IFPE Campus Barreiros**. 2010. 101f. Dissertação (Mestrado em Ciências) – Programa de Pós-Graduação em Educação Agrícola, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Seropédica, 2010.

GOWERS, Timothy**. Matemática: uma breve introdução**. Lisboa: Gradiva Publicações, S. A., 2008.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de Cálculo.** Rio de Janeiro: LTC, 2013. 1 v.

HOFFMANN, L. D.; BRADLEY, G. L. **Cálculo**: um curso moderno e suas aplicações. 9.ed. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2008.

MEYER, J. F. C. A; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS, A. P. S. **Modelagem em Educação Matemática**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2017.

MULLER, Maria C. **Modelos matemáticos no ensino da matemática**. 1986. Dissertação (Mestrado). Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1986. 140f.

ROQUE, T.; VIDEIRA, A. A. P. A noção de modelo na virada do século XIX para o século XX. **SCIENTIÆ Studia**, São Paulo, v. 11, n. 2, p. 281-304, 2013.

SILVA, J. R. N. **Etnomatemática**: abordagem dos diversos tipos de unidades de medidas e sua utilização no sertão alagoano. 2016. 101f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal de Alagoas. Maceió, 2016.

SKOVSMOSE, O. **Educação Crítica**: Incerteza, Matemática, responsabilidade. Tradução de Maria Aparecida Viggiani Bicudo. São Paulo, SP: Cortez, 2007.

SKOVSMOSE, O. **Educação Matemática Crítica**: a questão da democracia. 6. ed. Campinas, SP: Papirus, 2013.

SOARES, D. da S.; JAVARONI, S. L. Análise de Modelos: possibilidades de trabalho com Modelos Matemáticos em sala de aula. In. BORBA, M. C; CHIARI, A. (Org.). **Tecnologias Digitais e Educação Matemática**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2013. p. 195 - 219.

STEWART, J. **Cálculo**. 8. ed. São Paulo: Pioneira Cengage Learning, 2017. 1 v.

VIZOLLI, I.; MENDES, A. N. Cubagem de Terras: *braça*, quadro e tarefa. In: Congresso Brasileiro de Etnomatemática, 4. 2012, Belém, **Anais ...** . Belém: Universidade Federal do Pará, 2012. Disponível em: < http://www.cbem4.ufpa.br/anais/eixo1_cbem4.htm >. Acesso em: 28 mai. 2018.

Recebido em: 07 de fevereiro 2019.

Aprovado em: 24 de novembro de 2020.