



## Matemática Dinâmica e Raciocínio Hipotético-Dedutivo: estudo envolvendo quadriláteros com o Geogebra

Dynamic Mathematics and Hypothetical-Deductive Reasoning: study involving quadrilaterals with Geogebra

<https://doi.org/10.37001/emr.v26i71.2051>

Jaqueline Molon<sup>1</sup>

Claudiomir Feustler Rodrigues de Siqueira<sup>2</sup>

Marcus Vinicius de Azevedo Basso<sup>3</sup>

Sérgio Roberto Kieling Franco<sup>4</sup>

### Resumo

Este artigo analisa a integração de Tecnologias Digitais de Comunicação e Informação (TDICs) na formação docente, em especial, a contribuição de um ambiente de Geometria Dinâmica (GD) no ensino, aprendizagem e avaliação de uma proposta pedagógica sobre quadriláteros e suas propriedades. A intervenção foi realizada com 18 participantes, licenciandos em matemática, em duas etapas, a primeira sem o auxílio de recurso tecnológico digital e a segunda com a construção geométrica dinâmica. Através desse estudo exploratório, discute-se como o pensamento geométrico pode ser favorecido pelo dinamismo das construções através da manipulação, da observação de invariantes, da elaboração de conjecturas, da argumentação lógico-matemática e prova matemática. Os resultados indicam que atividades voltadas ao pensar sobre conceitos geométricos num cenário de GD contribuem para o uso do raciocínio hipotético-dedutivo e o desenvolvimento de habilidades matemáticas, auxiliando a superar obstáculos tanto de natureza empírica quanto conceitual.

**Palavras-chave:** Tecnologias digitais. Geometria Dinâmica. Raciocínio HipotéticoDedutivo. Quadriláteros.

### Abstract

<sup>1</sup> Doutoranda em Informática na Educação no Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação (PGIE/UFRGS), Mestra em Matemática; Professora do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul (IFRS) - *Campus* Canoas, RS, Brasil, e-mail: jaqueline.molon@canoas.ifrs.edu.br

<sup>2</sup> Doutorando em Informática na Educação no Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação (PGIE/UFRGS), Mestre em Ensino de Matemática; Professor do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul (IFRS) - *Campus* Canoas, RS, Brasil, e-mail: claudiomir.siqueira@canoas.ifrs.edu.br.

<sup>3</sup> Doutor em Informática na Educação e mestre em Psicologia do Desenvolvimento pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Professor do Pós-Graduação em Informática na Educação (UFRGS) e do Pós-graduação em Ensino de Matemática (UFRGS).

<sup>4</sup> Psicólogo, Mestre e Doutor em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Professor do Pós-Graduação em Informática na Educação (UFRGS) e da Faculdade de Educação (UFRGS), RS, Brasil, e-mail: sergio.franco@ufrgs.br.

This article analyzes the integration of Digital Technologies of Communication and Information in teacher education, especially, the contribution of a Dynamic Geometry (DG) environment in teaching, learning and evaluation of a pedagogical proposal about quadrilaterals and their properties. The intervention was carried out with 18 participants, undergraduates in mathematics, in two stages, the first without the digital technological resource aid and the second with the Dynamic Geometric construction. With this exploratory study, it is discussed how geometric thinking can be favored by the dynamism of constructions through manipulation, invariants observation, conjectures elaboration, logical-mathematical argumentation and mathematical proof. The results indicate that activities focused on thinking about geometric concepts in a DG scenario contribute to the use of hypothetical-deductive reasoning and the mathematical abilities development, helping to overcome obstacles of both empirical and conceptual nature.

**Keywords:** Digital Technologies. Dynamic Geometry. Hypothetical-Deductive reasoning. Quadrilaterals.

## 1. Introdução

O trabalho em ambientes de Geometria Dinâmica (GD) com foco nos processos de ensino e de aprendizagem de tópicos da geometria tem se consolidado como uma temática de grande interesse dos professores de matemática, bem como de pesquisadores que buscam investigar os processos relacionados à integração de tecnologias na educação (SINCLAIR *et al.*, 2016). Neste cenário, discutir acerca das mudanças que podem ocorrer nas formas de estruturar o pensamento matemático através da utilização de um recurso de GD, como o Geogebra, em atividades que demandam construção, identificação de propriedades, conjectura e prova matemática, apresenta-se como possibilidade de qualificação desses processos educativos incluindo os relacionados à avaliação.

Práticas pedagógicas desenvolvidas com esse viés oportunizam aos estudantes o desenvolvimento de competências e habilidades cognitivas, tendo em vista que exigem do sujeito ações coordenadas e tomadas de decisões com consciência dos resultados desejados de acordo com cada desafio lançado. Esse processo, no qual o aprendiz participa ativamente, colabora com a construção de novas estruturas cognitivas ou a sua reorganização, impulsionando seu pensamento, propiciando processos de abstração reflexionante<sup>1</sup> (PIAGET, 1977/1995) e, conseqüentemente, a construção de conhecimento.

---

<sup>1</sup> Para Piaget (1977/1995), por meio do processo de abstração reflexionante, o sujeito é capaz de construir conhecimentos (conhecimento-estrutura) a partir da coordenação a partir da coordenação de suas ações (inicialmente práticas e mais tarde principalmente mentais) sobre os objetos. Em matemática, a compreensão da definição de quadrado como figura geométrica com ângulos e lados congruentes, por exemplo, pressupõe a realização pelo sujeito, de muitas abstrações reflexionantes, em relação à diferentes níveis de compreensão desse mesmo conceito até a elaboração da definição formal.

No presente trabalho são investigadas as relações entre a integração das Tecnologias Digitais de Comunicação e Informação (TDICs) e a aprendizagem matemática, com base em uma intervenção utilizando o software de geometria dinâmica - Geogebra. Aspectos vinculados ao raciocínio hipotético-dedutivo e ao desenvolvimento do pensamento geométrico são fundamentados na proposição de atividades que visam a utilização do dinamismo oferecido pelo recurso tecnológico utilizado, a partir da manipulação, da observação de invariantes<sup>2</sup>, da elaboração de conjecturas e da argumentação lógico-matemática. Este artigo, portanto, traz uma contextualização teórica sobre o tema, em seguida descreve a prática desenvolvida e, por fim, apresenta os resultados dessa investigação, dialogando com pesquisas e autores que abordam tal problemática, tomando como fio condutor para essa discussão a análise dos registros produzidos pelos estudantes participantes do estudo.

## 2. Geometria: do esquecimento ao ressurgimento

A geometria tem ganhado força nos documentos oficiais que norteiam a educação básica. Nesse sentido, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) enfatiza a importância do conhecimento geométrico, da utilização de diferentes representações matemáticas (numérica, algébrica e geométrica) de forma integrada e a utilização de *softwares* de GD. Esse documento enfatiza a contribuição da geometria para modelar e resolver problemas das diferentes áreas do conhecimento, bem como situações do mundo físico e destaca a necessidade de desenvolvimento do pensamento geométrico, ao longo de toda a educação básica, salientando que a construção, a representação e a interdependência são ideias fundamentais dentro dessa temática. Em relação ao Ensino Médio, de forma mais específica, uma das competências que deve ser desenvolvida é a utilização de “estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente” (BRASIL, 2018, p. 535).

No entanto, a relevância da aprendizagem de geometria já estava presente nos

---

<sup>2</sup> Propriedades que se mantém (invariantes) em uma construção na medida em que são aplicadas um conjunto de transformações. Por exemplo: dois quadrados de tamanhos diferentes continuam apresentando as mesmas características que os definem, lados de mesma medida e ângulos retos, bem como não variam propriedades como a congruência entre as diagonais, a interseção das mesmas nos respectivos pontos, entre outras.

Parâmetros Nacionais Curriculares (PCN) ao destacarem que ela é um “campo fértil de situações-problema que favorece o desenvolvimento da capacidade para argumentar e construir demonstrações” (BRASIL, 1998, p.122). Esses documentos explicitavam a necessidade de evidenciar, nos currículos, o papel fundamental do pensamento geométrico. O estudo da geometria, em geral, viabiliza “desenvolver um tipo de pensamento particular para compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo” (BRASIL, 1998, p.122) além de oportunizar aos estudantes os “primeiros contatos com a necessidade e as exigências estabelecidas por um raciocínio dedutivo” (p.86).

Contudo, o estudo de tópicos de geometria na educação básica tem sido deixado de lado ou quando trabalhado é realizado de forma superficial, baseado em informações triviais acerca de áreas e perímetros de determinadas figuras e, muitas vezes, seguindo a reprodução de figuras prototípicas ou estereótipos. Aliado a esses aspectos, a ênfase algébrica dada ao seu ensino, “pode estar prejudicando a formação dos alunos por privá-los da possibilidade do desenvolvimento integral dos processos de pensamento necessários à resolução de problemas matemáticos” (PAVANELLO, 1993, p.16).

Ressaltando a origem do problema, Laborde *et al.* (2006) trazem que alguns pesquisadores atribuíram à ausência de registros representacionais e ao fato dos docentes utilizarem-se apenas de pensamento dedutivo para expressar significados matemáticos. O papel das representações geométricas, no entanto, passou a ser considerado primordial para alguns pesquisadores, conforme descrito por Laborde *et al.* (2006), especialmente por envolver habilidades como: diferenciar relações gráficas espaciais e relações geométricas teóricas; distinguir objetos teóricos de suas relações gráficas bem como reconhecer e relacionar objetos geométricos. Essas habilidades são favorecidas pela exploração - interpretação, conjectura e prova - através da possibilidade de trabalho concomitante entre representações espaciais e conhecimento teórico (LABORDE *et al.*, 2006).

Esse cenário adverso para a geometria escolar, de acordo com Laborde *et al.* (2006), foi fortalecido a partir do Movimento da Matemática Moderna, pois a problemática do ensino de geometria passou a enfrentar uma dualidade empírica-teórica: o excesso de formalismo e o abandono de diagramas. Na mesma linha, Lorenzato (1995) também faz críticas a esse movimento, destacando que antes da sua chegada ao Brasil, o “ensino geométrico era marcadamente lógico-dedutivo, com demonstrações” (p.3), no entanto, a matemática moderna tentou sem êxito algebrizar a geometria, “mas conseguiu eliminar o modelo anterior, criando assim uma lacuna nas nossas práticas pedagógicas, que perdura até hoje” (LORENZATO, 1995, p.3). Como consequência disso, o autor afirma que ocorreu um

empobrecimento docente, pois se tem uma geração que não estudou geometria e, dessa forma, fica mais difícil ensiná-la.

Considerar esses aspectos no ensino e na aprendizagem de geometria na formação de licenciandos em Matemática é imprescindível para que tais situações sejam problematizadas, alguns paradigmas desconstruídos e esse quadro seja revertido. No contexto das instituições formadoras, estimular o desenvolvimento de práticas pedagógicas que visem superar as lacunas de aprendizagem e despertar ou resgatar o gosto pela geometria dos futuros docentes pode representar um passo em direção à superação dos obstáculos apontados em relação ao ensino de geometria, favorecendo o desenvolvimento do pensamento geométrico e do raciocínio hipotético-dedutivo também na Educação Básica, em longo prazo, a partir da atuação docente desses egressos.

## **2.1 Ambientes de Geometria Dinâmica e o raciocínio hipotético-dedutivo**

Os ambientes de Geometria Dinâmica (GD) abriram caminho para o resgate da grandeza do pensamento geométrico para a educação matemática. Gutierrez (2016 *apud* NOTARE; BASSO, 2016) afirma que recentemente está ocorrendo um crescimento, ainda que tímido, da valorização da geometria como um aspecto relevante para a boa formação matemática dos estudantes da Educação Básica. Este acontecimento é reforçado “pela disponibilidade de novas ferramentas de matemática dinâmica, como o Geogebra, para apoiar a aprendizagem de Geometria” (NOTARE; BASSO, 2016, p.1).

O amadurecimento e relevância da temática vêm se consolidando na medida em que múltiplos trabalhos têm sido publicados com esse enfoque. Em uma rápida pesquisa, na base de dados *Scopus*, é possível identificar 158 publicações nos últimos dez anos na área da matemática contendo a expressão “*dynamic geometry*” entre suas palavras-chave. Além disso, tem crescido o compartilhamento de materiais, aplicativos, experiências de sucesso, etc., tendo como grande incentivador o Geogebra, que disponibiliza gratuitamente em seus repositórios enorme variedade de sugestões, construções e artefatos para serem usados em distintos níveis de ensino, os quais são produzidos ou adaptados mundo afora com seu *software/aplicativo*.

A contribuição do Geogebra para a área acadêmica tem sido muito significativa. Além de ser um software livre, desde que foi lançado em 2001, vem evoluindo, aprimorando e incorporando novos recursos. Inicialmente e, até bem pouco tempo atrás, ele consistia em uma plataforma que integrava geometria, álgebra e cálculo. Hoje, no entanto, distingue-se em janelas 2D e 3D, permite fazer construções tridimensionais, incrementou planilha eletrônica,

sistema de álgebra computacional, estatística, probabilidade e outras ferramentas para cálculo e, recentemente, recursos para realidade aumentada. Ainda, o Instituto Geogebra disponibiliza repositórios online – *GeogebraTube*, através do qual é possível compartilhar construções, vídeos, *applets* e outros materiais relacionados ao aplicativo e *GeogebraBook*, um recurso que permite a criação de livros digitais com inserção de *applets*, vídeos, imagens e textos.

O Geogebra é uma tecnologia multiplataforma, disponível para *Windows, Linux, Mac OS X, Android, iOS e Windows RT*, com versões para *desktop, smartphones, tablets, etc.*, e sua interface tem se tornado mais clara, intuitiva e prática. Dessa forma esse recurso - que vai muito além da GD - aproxima-se cada vez mais do ambiente escolar, facilitando a diversificação das práticas didático-pedagógicas, auxiliando no contexto da compreensão dos conceitos e do estímulo ao pensamento hipotético-dedutivo, favorecendo e diversificando o processo de aprendizagem dos estudantes. Além disso, contribui também para o desenvolvimento profissional dos professores que, nesse cenário, colocam-se muito mais como tutores do que expositores de conhecimento, auxiliando no desenvolvimento de práticas didático-pedagógicas pautadas pelo construtivismo, distanciando-se da ênfase a transmissão de conteúdos.

Os ambientes de geometria dinâmica não apenas permitem a construção/reprodução gráfica dos objetos, possibilitando a abstração de propriedades e conceitos geométricos envolvidos durante a resolução de situações-problema como, também, enriquecem “o pensar” ao possibilitar a interação a partir da possibilidade de extrapolar a manipulação e experimentação aliada a movimentos, que sem o auxílio dos artefatos tecnológicos digitais ficaria muito restrito. Assim, cria-se um contexto que converge para o que Fiorentini (1995) apontou como tendência de ensinar matemática sob uma prática pedagógica concebida pensando em uma matemática viva, dinâmica e historicamente construída, possibilitando ao aluno “aprender construindo os conceitos a partir de ações reflexivas sobre materiais e atividades, ou a partir de situações-problema e problematizações do saber matemático” (FIORENTINI, 1995, p.5). Nesse cenário, o professor assume o “papel de orientar, guiar e manter a atividade construtiva do aluno” (MAURI; ONRUBIA, 2010, p. 125).

O processo de “pensar com a tecnologia”, cuja relação amplia o desenvolvimento de habilidades e características próprias do raciocínio hipotético-dedutivo, a partir da variedade de estímulos para pensar, testar, conjecturar, aprender e criar - a integração de tecnologias digitais passa a ocorrer na sala de aula sob a perspectiva de “experimentos de pensamento”. Assim, a finalidade volta-se a auxiliar na exteriorização, diversificação e ampliação dos

pensamentos do estudante favorecendo na mudança em patamar de conhecimento dos alunos - de empírico a hipotético-dedutivo (GRAVINA; BASSO, 2012).

Portanto, é dessa forma que dispendo da geometria como tópico essencial do currículo aliado a processos de integração de tecnologias digitais pensados com e para a atividade matemática que podemos contribuir para o desenvolvimento do pensamento geométrico, bem como superar as dificuldades tanto de ordem empírica quanto conceitual. Com isso, é possível fazer transcender o próprio conteúdo na medida em que se passa a “enxergar” a geometria como recurso para a compreensão do mundo, não apenas diante de seus aspectos matemáticos, mas por sua contribuição na resolução de problemas de ordem geral cuja busca de soluções pode ser facilitada na medida em que se desenvolve o raciocínio hipotético-dedutivo, ou seja, a essência do raciocínio matemático.

### **3. O caminho percorrido por esse estudo**

A presente investigação foi realizada a partir da aplicação de uma sequência de atividades envolvendo o estudo de quadriláteros e suas propriedades a uma turma de estudantes da disciplina de Geometria I, de um curso superior de licenciatura em matemática de uma instituição pública situada no Rio Grande do Sul. A coleta dos dados ocorreu no primeiro semestre de 2018. O estudo contou com a participação de 18 alunos, identificados ao longo desse texto por A1, A2, ... e A18 (estudantes de licenciatura – 3º semestre – disciplina de Geometria I).

Os dados foram coletados a partir das produções escritas e dos arquivos construídos por cada estudante no *software* Geogebra e submetidos no ambiente virtual de aprendizagem, organizado e estruturado a partir da plataforma *Moodle*. As atividades propostas foram desenvolvidas ao longo de dois encontros semanais de quatro horas cada.

A primeira etapa, realizada sem o auxílio de recurso tecnológico digital objetivou levantar conceitos, definições e conhecimentos dos estudantes acerca de cada um dos quadriláteros que seriam objeto de estudo nas atividades posteriores. Na sequência as atividades foram estruturadas de forma a contemplar, a construção geométrica dinâmica de cada figura e, através de questionamentos e processos de investigação, possibilitados pela GD, foi solicitado aos estudantes a elaboração de conjecturas, sobre propriedades relativas a cada quadrilátero e a escrita de argumentação lógica-dedutiva como fundamentação ou demonstração matemática acerca de tais conjecturas.

#### **3.1 Análise das atividades realizadas sem o Geogebra**

Na primeira etapa, foi solicitado a cada estudante que, a partir de seus conhecimentos, escrevesse uma definição e tentasse construir, com régua e compasso, uma representação geométrica para algumas figuras, sendo: quadrilátero, trapézio, paralelogramo, retângulo, losango e quadrado. A partir disso, foram investigados os/as conceitos/definições de cada quadrilátero apresentados pelos estudantes antes de qualquer intervenção, e se utilizavam (ou consideravam) tais características ao construir as respectivas representações geométricas com régua e compasso. Compreende-se que utilizar tais tecnologias também é uma tarefa inerente ao trabalho do professor de matemática e, que a utilização desses recursos engloba habilidades distintas das exigidas no uso de um *software* de GD para a realização da mesma atividade.

No contexto deste trabalho, a carência de conhecimentos geométricos básicos, bem como dificuldades de relacionar representação geométrica e conceituação teórica, já pode ser percebida durante a resolução da primeira etapa das atividades. Entre as tentativas apresentadas pelos estudantes, analisando suas construções, foram identificados equívocos, entre eles a apresentação de algumas definições contraditórias e de outras que incluíam propriedades na própria definição, bem como representações sem identificação adequada dos elementos (lados, vértices e ângulos), além de representações incompletas, por não contemplarem elementos destacados nas definições.

No quadro 1 estão sintetizados os resultados das construções dessa etapa, explicitando o quantitativo de alunos em cada uma das categorias de análise definidas tanto para as definições quanto para a representação geométrica.

Em relação ao quadrilátero, observou-se que 13 respostas apresentaram definições incompletas à definição geral, bem como representações também incompletas. Além disso, embora apenas 2 (dois) estudantes tenham definido corretamente quadrilátero, (05) cinco conseguiram representá-lo corretamente.

Quanto ao trapézio, das 18 respostas, foram obtidas 16 representações estereotipadas, sendo 13 relativas às de um trapézio isósceles de base maior inferior posicionada na horizontal e 3 (três) de trapézios escalenos de base maior inferior também posicionada na horizontal. Nesse caso, erros conceituais estavam presentes em 13 definições.

**Quadro 1:** Quantitativos de respostas por categoria na atividade 1

<b>Categorias analisadas</b>	<b>Quadrilátero</b>	<b>Trapézio</b>	<b>Paralelogramo</b>	<b>Retângulo</b>	<b>Losango</b>	<b>Quadrado</b>

Definição	Definição errada (erro conceitual)	3	13	7	3	4	0
	Definição correta e completa (com todos os elementos necessários)	2	3	6	12	10	13
	Definição incompleta	13	1	1	0	0	5
	Definiu só apresentando propriedades	0	1	4	3	4	0
Representação	Representação errada (erro conceitual)	0	1	0	0	2	0
	Representação correta e completa	5	5	5	8	7	7
	Representação incompleta (falta identificação de elementos)	13	12	13	10	9	11
	Representação estereotipada (formato e/ou posição no plano)	não se aplica	16	16	16	14	18

**Fonte:** elaborado pelos autores.

Ao explorar o paralelogramo, 7 (sete) definições com erros conceituais e 6 (seis) definições corretas foram obtidas. Quanta às representações estereotipadas, 16 eram de um paralelogramo com lados consecutivos de medidas distintas, sendo o maior lado disposto na horizontal.

O número de estudantes que apresentou corretamente as definições de retângulo, losango e quadrado foi, respectivamente, 12, 10 e 13. Esse resultado foi ligeiramente melhor se comparado ao desempenho nas definições apresentadas anteriormente. Apesar disso, foi possível notar que as representações incompletas ainda apareceram em número elevado, embora em menor número se comparadas às realizadas antes dessas.

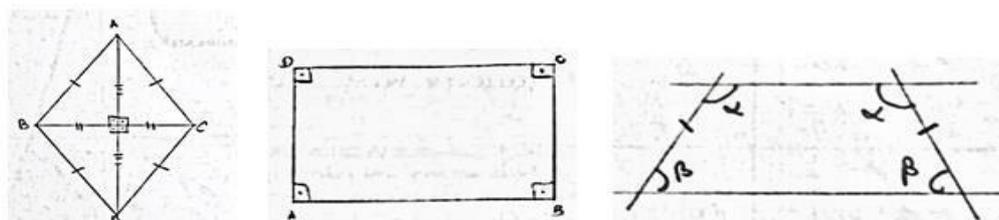
Um aspecto que se sobressaiu foi o elevado número de representações estereotipadas, que na representação do quadrado alcançou a totalidade das respostas, uma vez que, nenhum dos alunos representou o quadrado em outras posições diferentes da apresentação de dois lados na horizontal (e dos outros dois na vertical, conseqüentemente).

Foram obtidas, para o retângulo, 8 (oito) definições corretas e 7 (sete) erradas. No entanto, 4 (quatro) respostas, apesar de conter a definição correta, foram classificadas como erradas, pois incluíram outros elementos relacionados às propriedades do retângulo.

Desenharam uma representação estereotipada, um retângulo com lados perpendiculares de medidas distintas, sendo os lados maiores dispostos na horizontal, 16 estudantes. De modo semelhante, ao tratar do losango, 14 representações no “formato de pipa” foram realizadas, sendo 10 (dez) com a diagonal maior na vertical, 3 (três) com a diagonal maior na horizontal e 1(um) com diagonais congruentes.

Ao analisar os dados, fica em evidência o fato dos estudantes, mesmo sendo licenciandos em matemática, terem construído esses quadriláteros de acordo com “estereótipos” padrão – figuras construídas sempre do mesmo modo, por exemplo, ao realizar a construção do retângulo, apresenta-se sempre a imagem do retângulo com base maior na horizontal e altura na vertical). A Figura 1 apresenta ilustrações dessa afirmação, exemplos identificados na atividade.

**Figura 1:** Construções realizadas por A3, A18 e A10, respectivamente.



**Fonte:** acervo dos autores.

O tratamento estereotipado dado aos elementos de geometria na Educação Básica é uma problemática que também já foi constatada por Gravina (1996). De acordo com a pesquisadora,

Os livros escolares iniciam com definições, nem sempre claras, acompanhadas de desenhos bem particulares, os ditos desenhos prototípicos. [...] Isto leva os alunos a não reconhecerem desenhos destes mesmos objetos quando em outra situação. E mais, para os alunos, a posição relativa do desenho ou seu traçado particular, passam a fazer parte das características do objeto, quer no aspecto conceitual ou quer no aspecto figural, estabelecendo desequilíbrios na formação dos conceitos (GRAVINA, 1996, p.2).

As atividades que seguiram esse pré-teste foram estruturadas de forma a contemplar a realização da construção geométrica dinâmica de cada um dos quadriláteros, de modo, que as características constantes nas respectivas definições, fornecidas como ponto de partida, fossem mantidas ao utilizar o comando “mover” do software utilizado, conforme detalhado na seção a seguir.

### **3.2 Análise das atividades realizadas com o Geogebra**

A principal característica dos ambientes de Geometria Dinâmica é a possibilidade de movimentação das construções. No Geogebra, recurso utilizado nesta atividade, esse comando é o que permite arrastar e movimentar os objetos que são construídos de forma livre, ou seja, os objetos que não estão vinculados ou dependentes de outros já construídos. Dessa forma, após concluída a primeira etapa, foi proposto aos estudantes o trabalho com

essa ferramenta de GD em atividades que envolveram construção, investigação, conjectura e prova relacionadas às propriedades de cada quadrilátero, a partir das respectivas definições adotadas por Dolce e Pompeo (2006).

Os estudantes foram orientados a observar em cada construção determinados entes geométricos (ângulos, lados e/ou diagonais) e, por meio de questionamentos e de processos de investigação, ou seja, da utilização da GD, foram incentivados a levantar hipóteses com a finalidade de elaborar conjecturas a partir da identificação de regularidades mantidas diante da movimentação do objeto construído. Na sequência, as atividades exigiam, de cada estudante, a busca de elementos para a organização e escrita de argumentação lógicadedutiva com o objetivo de confirmar ou refutar cada conjectura realizada.

Dessa forma foram estudados, inicialmente, os quadriláteros convexos sem paralelismo de lados e, em seguida, os trapézios (escaleno e isósceles), o paralelogramo, o retângulo, o losango e o quadrado. A ordem adotada para a exploração desses polígonos obedeceu a lógica da inclusão de classes com o objetivo de verificar, também, se os estudantes conseguiriam identificar, a cada nova construção, suas propriedades características e considerar válidas, de imediato, as propriedades já investigadas para o quadrilátero de classe mais geral, as quais já haviam sido identificadas ao realizar as atividades anteriores.

Assim, durante a exploração do quadrado, por exemplo, verificou-se se os participantes do estudo foram capazes de perceber suas propriedades específicas e, simultaneamente, admitir válidas as propriedades já trabalhadas acerca dos retângulos e losangos, por exemplo, uma vez que o quadrado está incluído nesses dois últimos agrupamentos, de acordo com a definição adotada.

Optou-se por direcionar a presente análise ao estudo do quadrado, suas propriedades específicas e de classe mais geral, deixando o detalhamento acerca dos demais quadriláteros para outra publicação. Esta atividade foi concluída por 14 estudantes (2 estudantes não compareceram ao segundo encontro e 2 chegaram após a realização dessa etapa). No que se refere a construção adequada<sup>3</sup> da figura no ambiente de GD, todos os estudantes obtiveram êxito. Após a construção, os estudantes foram desafiados a conjecturar propriedades características do quadrado.

O objetivo principal da sequência de atividades desenvolvida era de que através da construção, da manipulação e observação os estudantes fossem capazes de perceber que o

---

<sup>3</sup> Entende-se por adequada a construção realizada a partir dos elementos constantes na definição fornecida e que mantém suas propriedades diante da utilização do recurso “mover” no ambiente de GD.

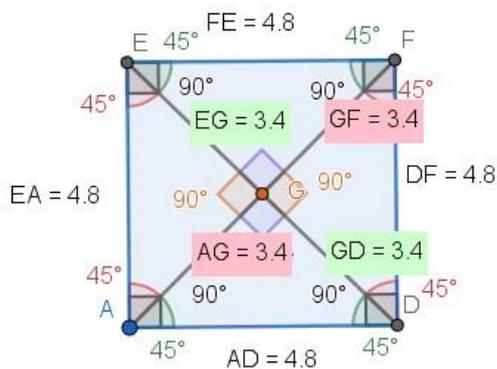
quadrado é o quadrilátero que possui o maior número de propriedades, pois acumula as propriedades do losango, do retângulo, do paralelogramo e do trapézio (escaleno). Ao longo da atividade, os alunos foram instigados a realizar conjecturas, de forma mais específica, vinculadas às diagonais do quadrado a fim de perceber que estas se cruzam nos respectivos pontos médios (característica dos paralelogramos), são congruentes (característica dos retângulos) e são perpendiculares (característica dos losangos).

Apesar dos estudantes deixarem explícito, em sua maioria (12 alunos), apenas uma dessas conjecturas dando-se por satisfeitos pela obtenção desta e não explorando as demais, eles conseguiram perceber a inclusão de classes no que se refere ao quadrado em relação aos paralelogramos. Ao responderem ao questionamento realizado no item D da atividade “Todas as propriedades válidas para os paralelogramos são válidas também para os quadrados? Justifique!”, 10 (dez) alunos responderam e apresentaram justificativa relacionada ao fato de que “*todo quadrado é paralelogramo*”, como exemplificado na Figura 2, pelas construções dos alunos A1 e A10.

Destaca-se que foi possível perceber que a sequência de atividades desenvolvidas com auxílio do Geogebra foi importante para que os estudantes chegassem a essa conclusão com brevidade. No entanto, entre as 4 (quatro respostas) não consideradas corretas houve confusão entre as características necessárias à construção do quadrado (lados e ângulos congruentes) e o fato de que os paralelogramos possuem como propriedade “os lados e ângulos opostos congruentes”, como pode ser observado na Figura 2, na resposta do aluno A10.

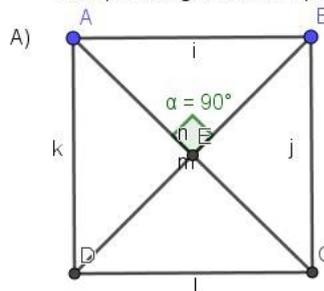
**Figura 2:** Construção e resposta dos alunos A1 e A10.

d) Sim, pois o quadrado terá as propriedades do paralelogramo, mas as diagonais congruentes e perpendiculares entre si



Construção e resposta do aluno A1.

D) Não, porque por exemplo as diagonais de um paralelogramo nem sempre formam um ângulo de  $90^\circ$ , já para ser um quadrado tem que formar um ângulo de  $90^\circ$ , ou seja, todo quadrado é um paralelogramo, mas nem todo paralelogramo é um quadrado.



Construção e resposta do aluno A10.

**Fonte:** Imagens extraídas das atividades submetidas pelos respectivos alunos.

Essa constatação identificou a necessidade de retomar para melhor compreender as propriedades específicas de cada quadrilátero, o que também foi possível esclarecer, posteriormente à intervenção, a partir da análise de ambas as construções realizadas pelos próprios alunos, sem a necessidade de intervenção direta do professor.

Na última etapa, com base nas construções e nas conclusões obtidas a partir da experimentação, conjectura e argumentação ao longo da sequência de atividades, os alunos analisaram a veracidade de proposições que englobam questões de inclusão de classes de quadriláteros. A Tabela 1, a seguir, traz o percentual de acerto dos respondentes (16 alunos) em relação às proposições que envolviam a análise de propriedades do quadrado.

Ao analisar os resultados dessa atividade, é possível perceber que as afirmações que envolviam maior número de elementos para análise, ou seja, as proposições 18 e 21, apresentaram taxa de insucesso mais elevada na justificativa e julgamento.

Chamamos atenção para a proposição 21 e contrapomos ao resultado obtido na parte 2 da atividade. Essa proposição é falsa, pois para garantir que o referido quadrilátero será quadrado é necessário que suas diagonais sejam: perpendiculares, congruentes e que se interceptam nos respectivos pontos médios. Este último fato não é colocado entre as hipóteses da afirmação.

**Tabela 1:** Proposições vinculadas ao quadrado - análise da 3ª etapa da sequência didática

	antes da intervenção	após a intervenção
--	----------------------	--------------------

Proposição (verdadeira ou falsa)	Julgamentos corretos	Julgamentos corretos	Justificativas corretas
3. Todo quadrado é retângulo. (verdadeira)	6	13	12
4. Todo retângulo é quadrado. (falsa)	15	15	13
6. Todo quadrado é losango. (verdadeira)	3	13	10
7. Todo retângulo que tem dois lados congruentes é quadrado. (falsa)	13	15	14
18. As diagonais do quadrado são bissetrizes de seus ângulos e são perpendiculares. (verdadeira)	5	12	8
21. Se as diagonais de um quadrilátero são congruentes e perpendiculares, então ele é quadrado. (falsa)	1	3	0

**Fonte:** elaborada pelos autores.

Cabe salientar que esse dado está de acordo com o observado anteriormente, uma vez que os estudantes, ao realizarem conjecturas acerca das diagonais do quadrado, consideraram apenas uma (poucos alunos consideraram duas) dessas afirmações, surgindo a necessidade de retomar essa construção posteriormente. Nota-se, ainda que, apesar dos estudantes concluírem que todas as propriedades válidas para os paralelogramos são válidas também para o quadrado, a propriedade de que as diagonais de todo paralelogramo se interceptam nos respectivos pontos médios não foi “transferida automaticamente” no momento da análise dessa situação.

#### 4. Reflexões a partir dos resultados

A sequência de atividades desenvolvida no presente estudo conduziu à busca pela compreensão de aspectos vinculados ao ensino de geometria e ao desenvolvimento do pensamento geométrico e do raciocínio hipotético-dedutivo. Dentro dessa problemática, Gravina (1996) constatou que estudantes de um curso de licenciatura em matemática apresentavam dificuldades de aprendizagem dos conceitos geométricos, causados principalmente por problemas cognitivos advindos da formação básica.

A autora resumiu que essas dificuldades estavam relacionadas ao fato de que os estudantes chegam à universidade “sem terem atingido níveis mentais superiores de dedução e rigor” (p.1) e, que aliado a isso, possuem “pouca compreensão dos objetos geométricos, confundindo propriedades do desenho com propriedades do objeto” (Gravina, 1996, p.1).

Dessa forma, e, sabendo ainda que “axiomas, definições, propriedades e teoremas são conceitos confusos, sem hierarquização” (Gravina, 1996, p.1) ela salienta que, possuindo esses déficits cognitivos, dificilmente, os estudantes conseguirão estruturar uma

demonstração matemática. Como demonstrar em geometria é um requisito fundamental, então, um caminho tentado para a superação dessas lacunas de aprendizagem foi essa experiência que a autora protagonizou.

Com base nos resultados desse estudo, Gravina (1996) definiu os artefatos/ambientes de GD como excelentes ferramentas para auxiliarem na superação de dificuldades associadas ao aprendizado, pois destaca que nesses ambientes os “conceitos geométricos são construídos com equilíbrio conceitual e figural; a habilidade em perceber representações diferentes de uma mesma configuração se desenvolve” (Gravina, 1996, p.13). O controle sobre configurações geométricas proporciona a descoberta de propriedades novas e interessantes que auxiliam na consolidação da aprendizagem e no desenvolvimento cognitivo (Gravina, 1996).

Os resultados obtidos no estudo aqui desenvolvido, conforme relatado nas seções anteriores, alinha-se aos resultados do trabalho de Gravina (1996). A Geometria Dinâmica (GD) revelou-se, também nessa investigação, como um possível caminho para a superação de obstáculos dessa ordem, além de auxiliar os estudantes, também, a distinguir quais são os elementos primários de cada construção, ou seja, os que se relacionam de forma direta com cada definição.

Ao longo do desenvolvimento da proposta, percebeu-se que os estudantes conseguiram identificar os elementos secundários, nesse sentido, deixando-os vinculados às propriedades de cada quadrilátero e não diretamente com a definição, superando dificuldades que apresentaram no pré-teste realizado. É essa distinção que precisa ser considerada para que a figura construída em ambiente de GD mantenha suas propriedades diante do movimento, uma vez que a construção é “uma das atividades que leva o aluno ao domínio de conceitos geométricos” (Gravina, 1996, p.2)

### **Considerações Finais**

Este estudo, a partir de uma proposta pedagógica voltada à exploração de propriedades de quadriláteros, buscou analisar as contribuições da utilização da GD através do software *Geogebra*, para a construção de conjecturas, elaboração de argumentação lógico-matemática e prova matemática. Discutiui-se como o dinamismo das construções pode favorecer a construção de conhecimentos por parte dos estudantes. As tarefas demandaram dos estudantes observação de invariantes e a estruturação de argumentação hipotético-dedutiva ao longo dos desafios de construção e investigação.

Pode-se verificar, também, como os estudantes estruturam o pensamento matemático baseados na construção dinâmica de objetos, conforme suas respectivas definições, utilizando o *software Geogebra* e, se (e neste caso como) a partir da construção, da manipulação, da observação e de questionamentos direcionados a observação de elementos específicos, os mesmos eram capazes de levantar hipóteses, elaborar conjecturas e utilizar-se de argumentação lógico-matemática para demonstrar suas afirmações.

Da mesma forma como apontado em outros estudos, trazidos à discussão ao longo desse texto, foi possível identificar as contribuições da GD para o desenvolvimento do pensamento geométrico dos estudantes. Percebeu-se que a partir da tecnologia utilizada estes conseguiam refutar ou corrigir hipóteses incorretas além de buscar elementos adequados para a elaboração das provas matemáticas das afirmações válidas elaboradas por eles próprios. Inicialmente recorrendo a argumentações pautadas sob medições, mas evoluindo, ao longo da atividade, para argumentos baseados em invariantes geométricos.

Dessa forma, a utilização de um ambiente de GD, nesta prática, mostrou-se como um campo fértil para o trabalho simultâneo entre conceituação e representação geométrica, uma vez que o dinamismo que caracteriza esse terreno exige de seus exploradores a articulação de saberes teóricos para garantir a manutenção das características desejadas em cada construção de forma antecipada à realização do movimento. Ainda, a utilização da GD estimula o desenvolvimento de competências vinculadas ao encadeamento lógico, enquanto que a realização de atividades vinculadas ao pensar dedutivamente os conceitos geométricos em um cenário de GD contribui para o desenvolvimento do raciocínio hipotético-dedutivo e de habilidades matemáticas. Por fim, tais constatações conduzem à afirmação de que o trabalho com a GD pode auxiliar na promoção de um entendimento mais amplo acerca da própria geometria como recurso para modelar e resolver situações problemas, e dessa forma, contribuir para a superação de dificuldades tanto empíricas quanto conceituais apontadas ao longo do texto.

### **Agradecimentos**

O presente trabalho foi realizado com apoio do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul (IFRS).

## Referências

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998. 148p

\_\_\_\_\_. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio (1ª versão)**. Brasília: MEC/SEB, 2018.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos da matemática elementar**. Vol. 9. São Paulo: Atual, 2006.

FIORENTINI, D. Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. In: **Revista Zetetiké**, ano 3, n. 4, p. 1-38, 1995.

GRAVINA, M. A. Geometria dinâmica uma nova abordagem para o aprendizado da geometria. In: **Simpósio Brasileiro de Informática na Educação**, 7., 1996, Belo Horizonte, Anais. Porto Alegre: Sociedade Brasileira de Computação, 1996. p.1-14.

\_\_\_\_\_; BASSO, M. V. A. Mídias digitais na educação matemática. In: GRAVINA, M. A *et al.* (Orgs). **Matemática, mídias digitais e didática: tripé para formação de professores de matemática**. Porto Alegre: Evangraf, 2012, p.12-36.

LABORDE, C., KYNIGOS, C. HOLLEBRANDS, K., STRASSER, R. Teaching and learning geometry with technology. In: GUTIÉRREZ, A., BOERO, P. (eds.). **Handbook of research on the psychology of mathematics education: past, present and future**. Rotterdam: Sense Publishers, 2006, p. 275-304.

LORENZATO, S. A. Porque não ensinar geometria? **A Educação Matemática em Revista**. Brasília, v.3, n.4, 1995, p.3-13.

MAURI, T.; ONRUBIA, J. O professor em ambientes virtuais: perfil, condições e competências. In: COLL, C.; MONEREO, C. **Psicologia da educação virtual: Aprender e Ensinar com as Tecnologias da Informação e da Comunicação**. Porto Alegre: Artmed, 2010.

NOTARE, M.; BASSO, M. V. A. Geometria dinâmica 3D: novas perspectivas para o pensamento espacial. **RENOTE**. Porto Alegre: CINTED-UFRGS, v. 14. n. 2, 2016, p. 1-10.

PIAGET, J. [1977] **Abstração reflexionante: relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

PAVANELLO, M, R. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. **Zetetiké**, São Paulo, v.1, n.1, p.7-18, mar. 1993.

SINCLAIR, N.; BUSSI, M. G. B.; VILLIERS, M.; JONES, K.; KORTENKAMP, U.; LEUNG, A.; OWENS, K. Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report. **ZDM Mathematics Education**. Berlin, v. 48, n. 5, p.691-719, 2016.

Recebido em: 08 de junho de 2019.

Aprovado em: 23 de agosto de 2021.