# Relato de Experiência

## Estudantes de Anos Iniciais da Educação de Jovens e Adultos Resolvendo Problemas Combinatórios com Listagens e com Árvores de Possibilidades[6]

*Fernanda Lopes Sá Barreto*[7]
*Rute Elizabete de Souza Rosa Borba*[8]

**Resumo**
Investigou-se a influência de diferentes representações simbólicas na resolução de problemas combinatórios por alunos dos anos iniciais da Educação de Jovens e Adultos. Participaram 24 alunos, separados em três grupos. Antes do ensino, os alunos realizaram um teste e após o ensino também. Ambos os testes foram compostos por situações-problema contendo diferentes significados da Combinatória. Nas aulas foram resolvidos os problemas do primeiro teste, sendo que em cada grupo foram usadas formas de representação simbólica distintas: listagens e/ou árvores de possibilidades. No primeiro teste verificou-se que a maioria das respostas dos alunos não apresentou relação combinatória e, entre as representações simbólicas, a listagem foi a mais utilizada. Durante as aulas buscou-se chamar a atenção dos participantes para propriedades e relações combinatórias. No teste após a aula observou-se que houve avanço significativo no desempenho dos participantes e que os grupos progrediram de modo semelhante. A listagem foi a representação simbólica mais usada também no teste após a aula em todos os grupos, inclusive naquele que não fez uso de tal representação na aula, mas após a aula os alunos haviam aprendido a fazer uso sistemático desse recurso.
**Palavras-chave:** Combinatória; Representações simbólicas; Educação de Jovens e Adultos.

### Introdução

O estudo que será relatado buscou analisar a influência de distintas formas de representação simbólica no desenvolvimento do *raciocínio combinatório* de estudantes de anos iniciais da Educação de Jovens e Adultos (EJA). A temática foi escolhida por se considerar importante o papel que sistemas de sinais exercem sobre o aprendizado matemático, por serem problemas combinatórios ricos em possibilidade de desenvolvimento de raciocínio lógico-matemático, embora pouco explorados em sala de aula, e pela modalidade de EJA necessitar ser foco de mais estudos específicos dentro de Educação Matemática, em particular no que diz respeito à Combinatória.

O *raciocínio combinatório* é, segundo Borba (2010), uma forma de pensamento que analisa a formação de

[6]Trabalho parcialmente financiado pela FACEPE (APQ-1095-7.08/08), pelo CNPq (476665/2009-4) e por bolsa de mestrado pela Capes.
[7]Participante do Geração – Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório do Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco e docente da rede municipal de ensino do Recife. E-mail: fernandasabarreto@gmail.com.
[8]Líder do Geração – Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório do Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco e docente do EDUMATEC – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica. E-mail: resrborba@gmail.com.

grupos de possibilidades a partir de critérios específicos – considerando repetição, ou não, de elementos, a escolha dos mesmos e sua ordenação. No presente estudo foi utilizada a organização indicada por Pessoa e Borba (2009) para os significados de Combinatória a serem trabalhados ao longo de todo o Ensino Básico: *arranjo, combinação, permutação e produto cartesiano.*

Referente a conceitos matemáticos, a Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1986) traz importantes reflexões para a prática docente, pois apresenta uma concepção de articulação entre os conceitos. A Combinatória está inserida no campo conceitual das *estruturas multiplicativas* e é importante ressaltar que os problemas combinatórios apresentam natureza multiplicativa mais complexa. Esta complexidade foi observada por Lima e Borba (2010), no estudo que realizaram com estudantes da EJA, o qual mostrou que entre os problemas que abordam as estruturas multiplicativas, os que envolvem os significados da Combinatória são aqueles em que os alunos apresentam desempenhos mais baixos.

Ainda de acordo com Vergnaud (1986), os conceitos são formados por três dimensões interligadas – situações que dão significado ao conceito, invariantes (propriedades/relações do conceito) e representações simbólicas do conceito. No desenvolvimento do *raciocínio combinatório* é imprescindível a abordagem de diferentes situações e distintas representações simbólicas para operar com esse conceito, já que cada uma pode deixar mais evidentes determinadas propriedades e relações da Combinatória.

**Como o estudo foi desenvolvido**

O objetivo do estudo consistiu em investigar a influência de diferentes tipos de representações simbólicas na resolução de problemas combinatórios por alunos da Educação de Jovens e Adultos (EJA). Participaram 24 estudantes de escolas públicas da Região Metropolitana do Recife, os quais pertenciam a turmas da modalidade da EJA correspondentes ao 4º e 5º anos do Ensino Fundamental regular. Foram investigadas três turmas de escolas públicas diferentes, formando-se três grupos, cada um composto por oito estudantes de uma mesma turma.

O estudo foi desenvolvido em três momentos: um teste inicial realizado em um dia, uma aula em outro dia e um teste final em dia posterior à aula. Primeiramente, as turmas da EJA realizaram um teste com o objetivo de verificar o desempenho dos estudantes anterior à aula e para selecionar os participantes do estudo, formando três grupos. O teste inicial foi composto por oito problemas, sendo dois de cada tipo: *arranjo, combinação, permutação e produto cartesiano*. O Quadro 1 apresenta quatro dos problemas usados no teste inicial.

- Maria tem em sua casa sete tipos de frutas (morango, acerola, cajá, graviola, laranja, pitanga e uva). Ela fabrica sucos em casa e decidiu fazer sucos que combinem duas frutas. Quantos são todos os tipos de sucos diferentes que ela pode fabricar combinando duas dessas frutas? (***combinação***)
- Quatro competidores (José, Marcos, Bruno e Sérgio) estão disputando uma corrida. De quantas maneiras diferentes pode-se ter o 1º e 2º lugares? (***arranjo***)
- Para entrar em um estádio de futebol, Pedro pode passar por quatro portões de entrada (A, B, C, D). Depois do jogo, para sair do estádio, Pedro possui cinco opções de saídas diferentes (E, F, G, H, J). De quantas maneiras diferentes ele poderá entrar e sair do estádio? (***produto cartesiano***)
- Quatro costureiras (Alda, Vera, Joana e Creusa) formaram um grupo para participar de uma competição. Elas precisam dar um nome ao grupo, combinando as letras iniciais dos seus nomes. Quantos nomes diferentes elas podem formar? (***permutação***)

Quadro 1: Exemplos de problemas utilizados no teste inicial.
Fonte: (BARRETO, 2012).

Em nenhuma das três turmas havia sido abordada a multiplicação. Dessa forma, pode-se perceber que ainda não havia ocorrido a introdução formal às estruturas multiplicativas e, consequentemente, à Combinatória.

A aula consistiu na resolução dos oito problemas do teste inicial. A distinção entre os grupos se deu em relação às formas de representação simbólica usadas em cada um desses. As representações exploradas foram a listagem e a árvore de possibilidades, ambas representações simbólicas escritas. No Grupo 1 foram usadas a listagem e a árvore de possibilidades; no Grupo 2 utilizou-se apenas a árvore de possibilidades e no Grupo 3, apenas a listagem. A realização da aula foi de modo coletivo, permitindo que a prática pedagógica se aproximasse da realidade que é vivenciada no cotidiano escolar, sendo as questões resolvidas seguindo a ordem do teste inicial e para isso utilizou-se o quadro da sala.

De um modo geral, na realização da aula utilizou-se, em cada turma, um período de aproximadamente duas horas e durante a resolução foram lançadas perguntas problematizadoras para estimular a reflexão e envolver os estudantes nas resoluções. No decorrer das resoluções buscou-se chamar a atenção dos estudantes para as propriedades e relações da Combinatória.

Após esse momento, foi realizado o teste final, no qual os alunos resolveram uma nova relação de oito problemas para que fossem avaliados os possíveis avanços na resolução de problemas combinatórios. O Quadro 2 mostra quatro problemas pertencentes ao teste final.

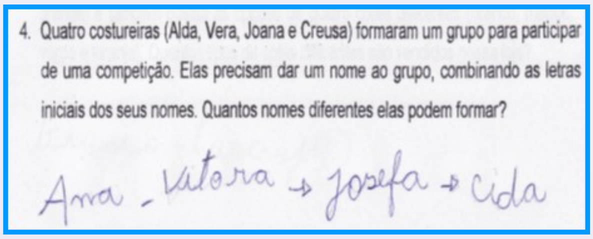
- Uma empresa tem cinco funcionários no setor de vendas (Emílio, Ricardo, Adriana, Luíza e Gabriela). Desses, dois funcionários serão escolhidos para uma equipe de segurança. De quantas formas diferentes esses funcionários podem ser escolhidos? (***combinação***)
- Em uma lanchonete existem cinco opções de suco (laranja, maracujá, goiaba, caju e pitanga) e dois tipos de salgados (coxinha e cachorro-quente). De quantas formas diferentes uma pessoa pode escolher um tipo de suco e um tipo salgado? (***produto cartesiano***)
- Cinco candidatos (Lucas, Vitor, Cláudio, Jorge e Marina) são os finalistas de um concurso de cantores. De quantas formas diferentes pode se ter o primeiro e o segundo lugares? (***arranjo***)
- Utilizando os algarismos 2, 4 e 6, de quantas maneiras diferentes pode-se escrever números de três algarismos diferentes? (***permutação***)

Quadro 2: Exemplos de problemas utilizados no teste final.
Fonte: (BARRETO, 2012).

## Resultados obtidos

### Resultados do teste inicial

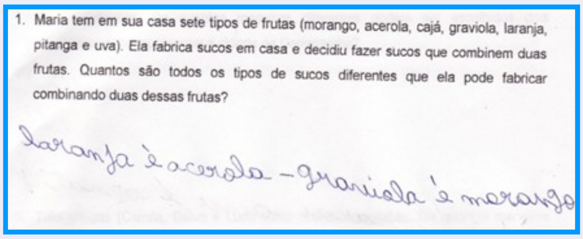
Nas análises do teste inicial não foram encontradas respostas plenamente corretas. As respostas encontradas foram categorizadas em: *incorreta sem relação combinatória* (Figura 1) e *incorreta com relação combinatória* (Figura 2). As *respostas incorretas sem relação* não evidenciavam o estabelecimento de relação combinatória. Já nas *incorretas com relação*, verificou-se o estabelecimento de relação combinatória, atendendo de forma parcial ao que foi solicitado na questão, uma vez que eram apresentados um ou dois casos pertencentes à resposta correta. Dessa maneira, essas respostas foram consideradas como acertos parciais, sendo esse o tipo de resposta com maior nível de elaboração que foi encontrado no teste inicial.



4. Quatro costureiras (Alda, Vera, Joana e Creusa) formaram um grupo para participar de uma competição. Elas precisam dar um nome ao grupo, combinando as letras iniciais dos seus nomes. Quantos nomes diferentes elas podem formar?

Ana - Vitora + Josefa + Cida

Figura 1: Exemplo de resposta incorreta sem relação combinatória.
Fonte: (BARRETO, 2012).



1. Maria tem em sua casa sete tipos de frutas (morango, acerola, cajá, graviola, laranja, pitanga e uva). Ela fabrica sucos em casa e decidiu fazer sucos que combinem duas frutas. Quantos são todos os tipos de sucos diferentes que ela pode fabricar combinando duas dessas frutas?

laranja e acerola - graviola e morango

Figura 2: Exemplo de resposta incorreta com relação combinatória (Acerto parcial).
Fonte: (BARRETO, 2012).

Ao selecionar os participantes do estudo, objetivou-se formar grupos que apresentassem médias de acerto semelhantes, para que, assim, os três grupos partissem de desempenhos iniciais similares. Nos grupos não havia diferenças de representações simbólicas utilizadas pelos estudantes no teste inicial, sendo a listagem a mais utilizada.

**Resultados ocorridos durante as aulas**

De um modo geral, durante as aulas, os três grupos foram bastante semelhantes no que diz respeito às dúvidas e compreensões dos estudantes. Durante as resoluções, buscou-se, por meio de questionamentos, chamar a atenção dos estudantes para a compreensão de propriedades e relações da Combinatória: esgotamento de possibilidades, número de elementos utilizados em cada possibilidade e influência da ordem dos elementos para a formação, ou não, de novas possibilidades.

No que diz respeito ao esgotamento de possibilidades, inicialmente os estudantes em todos os grupos não demonstraram atenção à necessidade de serem encontrados todos os casos que faziam parte das respostas. De uma forma geral, na resolução dos primeiros problemas, os estudantes diziam uma ou duas possibilidades, que, muitas vezes, estavam associadas à preferência pessoal deles. Não havia uma preocupação, que partisse dos alunos, em utilizar estratégias para alcançar o esgotamento das possibilidades, o que, em todos os grupos, teve que ser enfatizado ao longo da aula. Na aula, foi notável o progresso dos estudantes em relação ao levantamento de casos, superando, desse modo, a concepção inicial de haver apenas uma ou, no máximo, duas possibilidades em cada resolução.

Em relação ao número de elementos utilizados em cada possibilidade, apenas houve dúvida dos estudantes sobre a quantidade de elementos que deveriam ser usados na *permutação*. Foi necessário ressaltar que na *permutação* em todos os casos seriam usados todos os elementos, sendo necessária a escolha de cada um destes. Desse modo, percebe-se que, diferentemente dos outros tipos de problemas, a *permutação* apresenta um maior número de etapas de escolha, o que gerou equívocos na resolução dos estudantes.

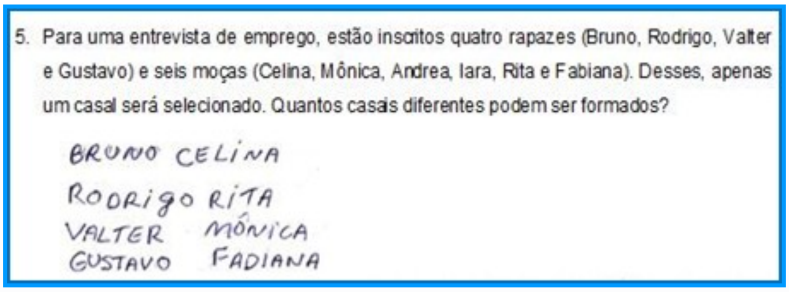
A respeito da ordem dos elementos, quando os estudantes chegavam à compreensão do problema, entendiam com facilidade se a ordem dos elementos determinaria, ou não, novas possibilidades. A maior dificuldade estava relacionada à interpretação textual dos enunciados dos problemas. Depois que conseguiam interpretá-los, os estudantes analisavam com facilidade a influência da ordem dos elementos.

**Resultados do teste final**

Diferente do teste inicial – no qual os alunos apresentaram apenas *resposta incorreta sem relação combinatória* e *acerto parcial* – no teste final também foram observados, em todos os grupos, outros tipos de respostas que demonstram um maior nível de compreensão. No que diz respeito aos acertos parciais, foram encontradas, além da forma já verificada no teste inicial, mais duas outras formas desse tipo de resposta, ambas apresentando um nível maior de elaboração. Desse modo, os acertos parciais foram categorizados em: *acerto parcial 1*(resposta que também verificou-se no teste inicial), *acerto parcial 2* e *acerto parcial 3*, esses dois últimos apresentados apenas no teste final, sendo o *acerto parcial 3* o que estava mais próximo da resposta correta. Também foram observadas respostas nas quais os estudantes atingiram o resultado esperado.

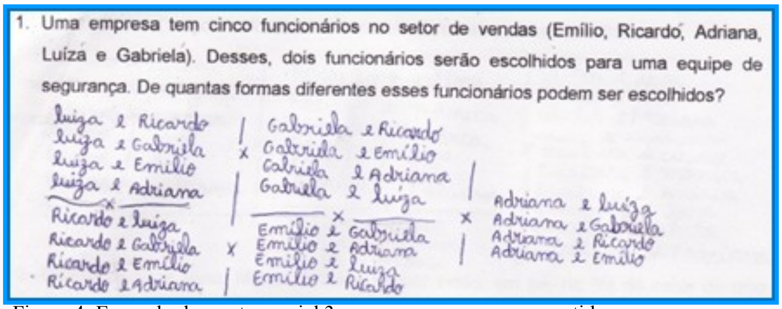
No *acerto parcial 2,* a resposta apresentava relação combinatória, mas o número de casos estava restrito ao número de elementos do conjunto. A Figura 3 exemplifica essa forma de resposta. Ao resolver o problema, o estudante demonstra compreender que o número de possibilidades está limitado à quantidade de elementos do conjunto de rapazes, pois forma uma possibilidade com cada um dos rapazes, mas não percebe que com cada um desses poderiam ser formados mais cinco pares diferentes.

Foram considerados *acertos parciais 3*, as respostas que apresentaram relação combinatória e foram elencados diversos casos, entretanto, não há o esgotamento ou limitação das possibilidades, uma vez que faltam casos ou são apresentados casos repetidos. Na Figura 4 há um exemplo de *acerto parcial 3*, no qual o participante ao resolver um problema de *combinação* não elimina os casos repetidos, não percebendo, dessa forma, que a ordem dos elementos não gera novas possibilidades.


5. Para uma entrevista de emprego, estão inscritos quatro rapazes (Bruno, Rodrigo, Valter e Gustavo) e seis moças (Celina, Mônica, Andrea, Iara, Rita e Fabiana). Desses, apenas um casal será selecionado. Quantos casais diferentes podem ser formados?

BRUNO CELINA
RODRIGO RITA
VALTER MÔNICA
GUSTAVO FADIANA

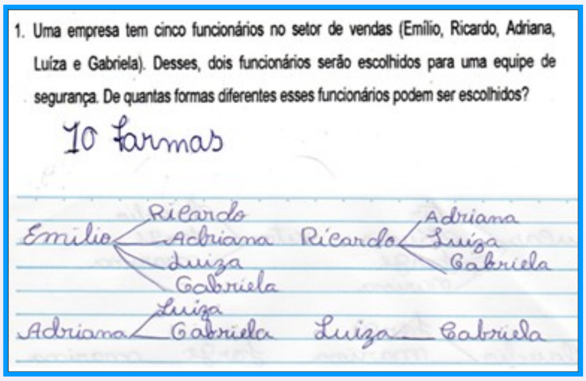
Figura 3: Exemplo de acerto parcial 2, limitado pelo número de elementos do conjunto.
Fonte: Relatório da pesquisa.


1. Uma empresa tem cinco funcionários no setor de vendas (Emílio, Ricardo, Adriana, Luíza e Gabriela). Desses, dois funcionários serão escolhidos para uma equipe de segurança. De quantas formas diferentes esses funcionários podem ser escolhidos?

Luiza e Ricardo
Luiza e Gabriela
Luiza e Emilio
Luiza e Adriana
Ricardo e Luiza
Ricardo e Gabriela
Ricardo e Emilio
Ricardo e Adriana
Gabriela e Ricardo
Gabriela e Emilio
Gabriela e Adriana
Gabriela e Luiza
Emilio e Gabriela
Emilio e Adriana
Emilio e Luiza
Emilio e Ricardo
Adriana e Luiza
Adriana e Gabriela
Adriana e Ricardo
Adriana e Emilio

Figura 4: Exemplo de acerto parcial 3 em que ocorrem casos repetidos.
Fonte: (BARRETO, 2012).

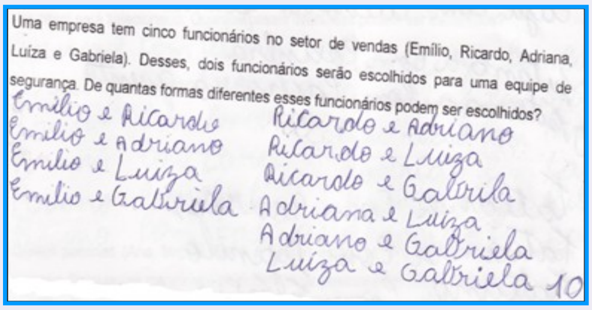
As Figuras 5 e 6 mostram respostas corretas, sendo que na primeira delas foi usada a árvore de possibilidades e na segunda a listagem de possibilidades.


1. Uma empresa tem cinco funcionários no setor de vendas (Emílio, Ricardo, Adriana, Luíza e Gabriela). Desses, dois funcionários serão escolhidos para uma equipe de segurança. De quantas formas diferentes esses funcionários podem ser escolhidos?

10 formas



Figura 5: Exemplo de resposta correta com uso árvore de possibilidades.
Fonte: (BARRETO, 2012).


Uma empresa tem cinco funcionários no setor de vendas (Emílio, Ricardo, Adriana, Luíza e Gabriela). Desses, dois funcionários serão escolhidos para uma equipe de segurança. De quantas formas diferentes esses funcionários podem ser escolhidos?

Emilio e Ricardo
Emilio e Adriana
Emilio e Luiza
Emilio e Gabriela
Ricardo e Adriano
Ricardo e Luiza
Ricardo e Gabriela
Adriana e Luiza
Adriano e Gabriela
Luiza e Gabriela 10

Figura 6: Exemplo de resposta correta com uso de listagem.
Fonte: (BARRETO, 2012).

Os resultados mostraram que todos os grupos apresentaram avanços significativos em relação ao teste inicial e que não houve diferenças significativas entre os grupos no que diz respeito ao teste final, ou seja, após a aula, os grupos desenvolveram-se de modo semelhante.

A Tabela 1 apresenta os desempenhos dos participantes por tipo de resposta em cada tipo de problema no teste inicial e no teste final. Os dados não foram separados por grupo, já que esses avançaram semelhantemente. Na tabela, é possível perceber que os alunos progrediram na compreensão de todos os tipos de problema. Com apenas uma aula, os estudantes conseguiram atingir *acertos parciais 3*. Provavelmente com mais aulas seriam alcançados resultados melhores. No teste final, a maior dificuldade dos estudantes permaneceu relacionada à resolução das *permutações,* o que possivelmente estava associado às etapas de escolha desse tipo de problema. Ressalta-se, assim, a necessidade de se trabalhar mais com os alunos as propriedades da *permutação*, para que as dificuldades sejam superadas.

| Tipo de problema | Resposta incorreta sem relação combinatória | | Acerto parcial 1 | | Acerto parcial 2 | | Acerto parcial 3 | | Resposta correta | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Teste inicial | Teste final | Teste inicial | Teste final | Teste inicial | Teste final | Teste inicial | Teste final | Teste inicial | Teste final |
| Arranjo | 75 | 14,6 | 25 | 22,9 | 0 | 6,2 | 0 | 52,1 | 0 | 4,2 |
| Combinação | 47,9 | 6,2 | 52,1 | 27,1 | 0 | 8,3 | 0 | 47,9 | 0 | 10,4 |
| Permutação | 91,7 | 50 | 8,3 | 14,6 | 0 | 0 | 0 | 35,4 | 0 | 0 |
| Produto cartesiano | 91,7 | 12,5 | 8,3 | 27,1 | 0 | 4,2 | 0 | 43,7 | 0 | 12,5 |

Tabela 1: Percentuais de tipos de resposta em cada tipo de problema no teste inicial e no teste final.
Fonte: (BARRETO, 2012).

No que diz respeito ao uso das representações simbólicas, a listagem foi, nos três grupos, a estratégia mais utilizada no teste final, até mesmo no Grupo 2 que trabalhou exclusivamente com a árvore de possibilidades. Esse resultado aponta que os estudantes deram preferência ao uso da representação que já utilizavam antes do ensino e a aula os auxiliou no aprimoramento do uso dessa forma de representação.

## Considerações finais

Os resultados apontam que apenas uma aula de aproximadamente duas horas de duração pode auxiliar expressivamente no desenvolvimento do *raciocínio combinatório* de estudantes de anos inicias da EJA, já que os participantes do estudo foram capazes de perceber distinções entre os problemas e usar formas de representação eficientes para resolvê-los. Possivelmente, mais algumas aulas resultariam em maiores avanços ainda no desenvolvimento do *raciocínio combinatório*. Portanto, uma das principais contribuições do presente estudo, trata-se em apresentar evidências de que conceitos em que os estudantes apresentam baixos desempenhos podem ser desenvolvidos e ter suas dificuldades significativamente superadas, desde que o professor possibilite um trabalho sistemático que auxilie as reflexões sobre esses conceitos, por meio do uso eficiente de representações simbólicas que fazem sentido para os alunos.

Mesmo sem instrução anterior em problemas multiplicativos menos complexos, a instrução em problemas combinatórios mostrou-se eficiente, pois os alunos puderam compreender as situações apresentadas, baseando-se em seus conhecimentos cotidianos e na aula da qual participaram, a qual ressaltou como representações simbólicas podem ser utilizadas na compreensão de propriedades e relações combinatórias. Destaca-se, também, a relevância do trabalho com os diferentes tipos de problemas, pois os estudantes têm a oportunidade de compará-los, percebendo e diferenciando as propriedades de cada situação, melhorando também a sistematização das representações simbólicas e, consequentemente, podem apresentar desempenhos melhores. Nesse sentido, ressalta-se a importância de se considerar as três dimensões conceituais apresentadas na Teoria dos Campos Conceituais defendida por Vergnaud (1986): situações que dão significado aos conceitos, propriedades e relações dos conceitos e símbolos utilizados em sua representação.

**Referências**

BARRETO, F. **O papel das representações simbólicas no desenvolvimento do raciocínio combinatório na educação de jovens e adultos**, 2012. 104 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2012.

LIMA, R.; BORBA, R. O raciocínio combinatório de alunos da educação de jovens e adultos: do início da escolarização até o ensino médio In:X ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10, 2010, Salvador. **Anais**... Salvador, 2010.

PESSOA, C.; BORBA, R. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. **ZETETIKÉ** – Cempem – FE – Unicamp, v. 17, jan-jun, 2009.

VERGNAUD, G. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas Um exemplo: as estruturas aditivas. **Análise Psicológica,** v.1,p. 75-90, 1986.