Relato de Experiência

Existe ou Não Existe um Quadrado de Medida de Área *13 cm*^{2}?

Veridiana Rezende[1]
Clélia Maria Ignatius Nogueira[2]

Resumo
Apresentamos neste trabalho quatro atividades para serem desenvolvidas em sala de aula como uma sequência introdutória ao estudo dos números irracionais. Estas atividades têm como objetivo favorecer a reflexão e a possível desestabilização de conhecimentos falsos, mobilizados pelos alunos durante a aprendizagem deste conceito. Elas constituíram parte do instrumento de pesquisa e análises de uma investigação mais ampla que realizamos sobre os números irracionais no Ensino de Matemática.
Palavras-chave: Ensino de Matemática; Números irracionais; Teorema em ação.

Introdução

Os números irracionais são essenciais para a compreensão de diversos conceitos matemáticos que constituem os currículos da Educação Básica brasileira. Particularmente, no campo geométrico abordado neste trabalho, os números irracionais sustentam o estudo de medidas de diagonais de quadrados, áreas de quadrados, altura de pirâmides, áreas e perímetros de circunferências, volumes e áreas de esferas e cones, entre outros.

No sistema de ensino brasileiro, o conceito de números irracionais deve ser institucionalizado a partir do 8º ou 9º ano do Ensino Fundamental (BRASIL, 1998). Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino de Matemática – PCN (BRASIL, 1998), é importante que o aluno vivencie situações em que os números racionais não são suficientes para resolvê-las, tornando-se necessária a consideração de outros números: os números irracionais.

No entanto, embora os números irracionais devam ser estudados desde o 8º ou 9º ano do Ensino Fundamental, Rezende (2013) mostra que esses números são compreendidos e aprimorados pelos alunos no decorrer dos anos de escolarização, ao vivenciarem diversas situações a eles relacionadas. A pesquisadora mostra que, provavelmente por não terem se deparado com diferentes situações matemáticas relacionadas aos números irracionais, até mesmo alunos do

[1]Professora Adjunta do Departamento de Matemática da Universidade Estadual do Paraná – Campo Mourão, Líder do GPEMCAM – Grupo de Pesquisa em Educação Matemática de Campo Mourão. E-mail: rezendeveridiana@gmail.com.
[2]Professora do Centro Universitário de Maringá – CESUMAR, orientadora desta pesquisa. E-mail: voclelia@gmail.com.

4º ano do Curso de Licenciatura em Matemática necessitam de um tempo de reflexão, ou ainda de conhecerem outras situações matemáticas que os levem a compreender e concluir corretamente sobre a existência de segmentos de medidas irracionais algébricas $\sqrt{b}$, sendo b um número real que não é quadrado perfeito. Por isso, para Rezende (2013, p.159), é importante que:

> [...] situações matemáticas envolvendo as ideias base de números irracionais sejam vivenciadas pelos alunos a partir do 8º ano, com o estudo do teorema de Pitágoras, resolução de equações do segundo grau, áreas de figuras planas, trigonometria, para que, com o decorrer do processo escolar, os alunos possam se apropriar desse conceito.

Segundo a pesquisadora, apresentar a definição de números irracionais aos alunos não é suficiente para que eles compreendam esses números. Ela defende que, para que haja sua compreensão, os alunos precisam vivenciar diversas situações, relacionar diversos significantes, passar por momentos de desequilíbrios, para que, ao longo dos anos escolares, eles possam elaborar esse conceito.

Assim, com a intenção de contribuir para o ensino e a aprendizagem dos números irracionais, apresentamos neste texto parte de uma pesquisa realizada por uma das autoras, sob a orientação da outra, relacionada aos conhecimentos sobre números irracionais mobilizados por alunos de três níveis de ensino (Fundamental, Médio e Superior), brasileiros e franceses, que resolveram dez atividades e justificaram suas soluções em entrevistas individuais.

No presente artigo, apresentamos quatro dessas atividades, referentes ao Ensino Fundamental, para serem desenvolvidas como uma sequência introdutória ao estudo dos números irracionais, com o intuito de evidenciar sua existência e, sobretudo, a existência de segmentos de medidas irracionais algébricas. A sequência foi elaborada considerando os conhecimentos que podem ser mobilizados pelos alunos desse nível de ensino ao resolverem estas atividades, e se referem a resultados das análises da pesquisa mencionada, desenvolvida pelas autoras.

Os conhecimentos mobilizados pelos alunos foram modelados na forma de teoremas em ação (VERGNAUD, 1990) que se referem a uma categoria de conhecimentos implícitos nas respostas dos sujeitos. Na maioria das vezes, esses conhecimentos não são verdadeiros cientificamente, eles são construídos pelos alunos na ação e, por isso, são denominados de teoremas em ação falsos.

Existe ou não existe um quadrado de medida de área *13 cm²* ?

Responder corretamente a essa questão, afirmando que existe um quadrado de medida de área *13 cm²*, depende de reconhecer a existência de números irracionais, conforme solicitam os PCN (BRASIL, 1998), para assegurar que o referido quadrado possui lados de medida $\sqrt{13}\ cm$.

Desse modo, a sequência de atividades proposta objetiva favorecer a percepção dos alunos sobre a existência de segmentos de medidas irracionais algébricas, ou seja, segmentos de medidas da forma $\sqrt{b}$, sendo b um número real que não é quadrado perfeito.

Ressaltamos que as atividades foram elaboradas com o objetivo de desestabilizar ou, pelo menos, perturbar localmente possíveis conhecimentos falsos presentes nas respostas dos alunos e, assim, favorecer sua aprendizagem, como sugere Vergnaud (1990).

Atividade 1

i) Existe um quadrado cuja medida de área é $A = 25\ cm^2$?

ii) Existe um quadrado cuja medida de área é $A = 13\ cm^2$?

O objetivo desta atividade é proporcionar reflexões sobre a existência de quadrados com medida do lado igual a um número irracional algébrico. A opção pelo quadrado foi feita porque quando a medida dos lados é um número natural, trata-se de uma figura geométrica conhecida pelos alunos, antes mesmo de seus primeiros anos escolares.

Ao desenvolver esta atividade em sala de aula, é esperado, assim como constatado em Rezende (2013), que os alunos afirmem sobre a existência do quadrado de medida de área *25 cm²*, dizendo que a medida do lado do referido quadrado é *5 cm*. No entanto, no que se refere à existência do quadrado de medida de área *13 cm²*, os conhecimentos mobilizados pelos alunos são outros e merecem atenção especial do professor para possível desestabilização de conhecimentos falsos e posterior reconhecimento de teoremas em ação verdadeiros.

Na pesquisa que realizamos, onze dentre os quatorze alunos entrevistados do Ensino Fundamental (ou nível semelhante francês) responderam que não existe o quadrado de medida de área 13 cm^2 justificando que não existe um número cujo quadrado resulta em 13, conforme atesta a fala de um aluno:

> Não... porque não existe 13 na tábua de multiplicação... nós não podemos encontrar um número que vezes ele mesmo resulte em 13.

Notamos, neste caso, que o domínio numérico do aluno diz respeito aos números inteiros, pois, realmente não existe na tabuada um número que multiplicado por ele mesmo resulte em 13. Assim, o aluno se sustenta em um conhecimento falso para justificar sua resposta, embora para ele sua afirmação se trate de uma verdade.

O teorema em ação falso, implícito na resposta deste aluno é:

> Se $p \in R_+$ não é quadrado perfeito então não existe $x \in R$ tal que $x^2 = p$.

Outro conhecimento que pode estar implícito na resposta do aluno é que a raiz quadrada de um número só existe quando este número for um quadrado perfeito, isto é:

> Seja $a \in R_+$, $\sqrt{a}$ existe se e somente se a é quadrado perfeito.

Notamos que esses conhecimentos falsos levam o aluno a concluir que se um número não possui como raiz quadrada um número inteiro, então ele não pode representar a área de um quadrado. Em linguagem matemática, este último resultado ou teorema em ação falso pode ser expresso como:

> Se $b \in R_+$ não é quadrado perfeito, então não existe um quadrado cuja medida de área é $A = b\ cm^2$.

Assim, as análises das respostas dos alunos (51 alunos de Ensino Fundamental, Médio e Superior), nesta e em outras situações semelhantes, nos permitiram identificar três teoremas em ação falsos que podem ser mobilizados pelos alunos na tentativa de solucionar os problemas apresentados:

i) TAF1: Seja $a \in R_+$, $\sqrt{a}$ existe se e somente se a é quadrado perfeito.

ii) TAF2: Se $p \in R_+$ não é quadrado perfeito então não existe $x \in R$ tal que $x^2 = p$.

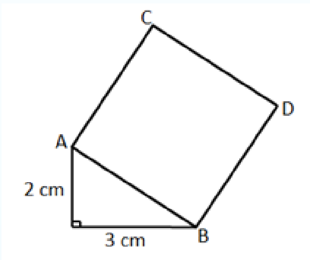
iii) TAF3: Se $b \in R_+$ não é quadrado perfeito, então não existe um quadrado cuja medida de área é $A = b\ cm^2$.

Durante nossa pesquisa, ao constatarmos que a maioria dos alunos do Ensino Fundamental (11 em 14) não reconhecia a existência de um quadrado de medida de área igual a 13 cm^2, buscamos desestabilizar esses conhecimentos, isto é, propomos atividades que levassem os alunos a colocarem em dúvida seus teoremas em ação falsos, pois proporcionavam reflexões sobre suas justificativas para a não existência do quadrado de área 13 cm^2.

Apresentamos aos alunos uma figura geométrica composta por um triângulo retângulo, com catetos de medida 2cm e 3cm, de modo que sua hipotenusa coincidia com o lado do quadrado ABCD, conforme segue:

Atividade 2

A área do quadrado ABCD é *13* cm^2. Você concorda com esta afirmação?



Para os alunos responderem a esta questão, primeiramente, eles precisam calcular a área do quadrado ABCD. Para isso, é importante que o professor conduza discussões que lhes favoreçam perceber que a medida da hipotenusa do triângulo retângulo representado na figura coincide com a medida do lado do quadrado ABCD.

Assim, considerando l a medida da hipotenusa do triângulo retângulo, notamos que, ao calcular a medida da hipotenusa utilizando o Teorema de Pitágoras, os alunos realizaram os seguintes cálculos:

$$l^2 = 2^2 + 3^2 = 13 \Rightarrow l = \sqrt{13}$$

Este momento lhes permite refletir sobre a situação, hesitar, associar com a situação anterior semelhante que eles já vivenciaram, e que os levará a concluir ou não pela existência do quadrado ABCD, conforme ocorreu com os alunos entrevistados em nossa pesquisa. Segundo Vergnaud (1990), esses momentos de desequilíbrios favorecem aprendizagens.

Em nossa pesquisa, dentre os 12 alunos do Ensino Fundamental (e nível correspondente francês) questionados sobre esta atividade, apenas dois indicaram possibilidade de desestabilizar os teoremas em ação falsos TAF1, TAF2 e TAF3, mobilizados na atividade anterior, concluindo pela existência do quadrado de área 13 cm^2, argumentando que o lado do quadrado ABCD é $\sqrt{13}\ cm$. No entanto, nesses casos, é preciso que o professor note que o fato de o aluno não mobilizar conhecimentos falsos indicados em suas respostas anteriores, não significa que ele superou esse conhecimento. É preciso que ele vivencie outras situações relacionadas ao mesmo conceito, conforme as sugeridas a seguir para os números irracionais algébricos, para testar e indicar a possibilidade de desestabilização do conhecimento falso.

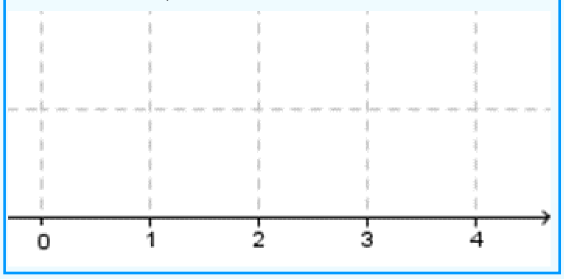
No que diz respeito aos demais dez alunos, não foi possível desestabilizar os conhecimentos falsos indicados por eles na atividade 1. Contudo, ao contrário da atividade anterior, na qual as respostas desses alunos diziam respeito a não existência do quadrado de medida de área 13 cm^2, nesta atividade, ao utilizarem o Teorema de Pitágoras para encontrar a medida $\sqrt{13}$ da hipotenusa do triângulo retângulo, esses alunos teclavam $\sqrt{13}$ n a calculadora, concluindo, portanto, pela existência de um quadrado de área *aproximadamente* igual a 13 cm^2. Notamos que, conforme muda a situação relacionada aos números irracionais, os conhecimentos mobilizados pelos alunos também são distintos. Por isso, um dos principais pressupostos de Vergnaud (1990) para favorecer a aprendizagem de um conceito é considerar diversas situações relacionadas a ele.

O fato de nessa atividade os alunos alegarem a existência de um quadrado de medida de área *aproximadamente* igual a 13 cm^2, indica suas dificuldades em considerar o número *raiz de treze* em suas diferentes representações (DUVAL, 2011), sobretudo na forma de radical $\sqrt{13}$. Pois apesar de encontrarem, por meio do Teorema de Pitágoras, o número $\sqrt{13}$ como solução, os alunos faziam a conversão para sua representação decimal, tomando a raiz quadrada sob um aspecto de operador-algoritmo: $\sqrt{\ } : \rightarrow c$, onde c é o valor aproximado oferecido pela calculadora (BRONNER, 1997), conduzindo-os a concluírem sobre a existência de um quadrado de área *aproximadamente* 13 cm^2. Isto mostra, conforme Assude (1989), a crença de que a calculadora jamais oferece um valor incorreto. Notamos que esta crença é tão resistente para os alunos que os levam a negar a existência de uma figura geométrica plana, estudada desde os anos iniciais de escolarização, como o quadrado.

A terceira atividade de nossa sequência tem por objetivo discutir a possibilidade de representar o número irracional algébrico $\sqrt{2}$ na reta numérica.

Atividade 3

Você acha que é possível representar o número $\sqrt{2}$ na reta numérica?



Numa situação como esta, assim como ocorreu em nossa pesquisa, provavelmente os alunos dirão que não é possível representar $\sqrt{2}$ na reta numérica, ou eles representarão um número decimal aproximado como 1,4 ou 1,41 .

Ressaltamos que em nossa pesquisa, referente à atividade 1 relacionada à existência do quadrado de medida de área 13 cm^2, um aluno foi ágil e preciso em sua resposta, dizendo que o lado do referido quadrado media $\sqrt{13}\ cm$. Esse mesmo aluno, em uma atividade que questionava sobre a existência de um quadrado de medida de área 24 cm^2, também afirmou sobre a existência deste quadrado, dizendo que a medida de seu lado é $\sqrt{24}\ cm$. Diante de respostas como estas, é possível supor que o aluno reconhece a existência de medidas irracionais algébricas, mobilizando o teorema em ação verdadeiro:

> TAV: Seja $b \in R_+$ então existe um quadrado de área $A = b\ cm^2$, cuja medida dos lados é $\sqrt{b}$ cm.

Entretanto, contrariando nossas expectativas, na atividade três esse aluno disse que é possível representar apenas um valor aproximado de $\sqrt{2}$ na reta, conforme mostra sua fala:

> Não, é possível representar apenas um valor aproximado 1,4.

Por conseguinte, a atividade 3 mostra que o teorema em ação verdadeiro TAV: *Seja* $b \in R_+$ *, então existe um quadrado de área* $A = b\ cm^2$*, cuja medida dos lados é* $\sqrt{b}\ cm$ não estava estabilizado nas respostas do aluno. Confirmando, portanto, a necessidade de se vivenciar diferentes situações relacionadas a um conceito para alcançar sua compreensão.

Assim, como última atividade desta sequência, sugerimos a construção da figura que é conhecida nos livros didáticos como Caracol Pitagórico. Neste momento, é importante que o professor e alunos tenham disponível régua e compasso para realizarem a construção dos segmentos.

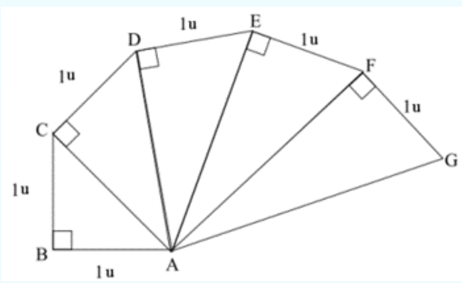
Atividade 4

a) Considere um triângulo retângulo ABC de catetos unitários. Qual é a medida da hipotenusa desse triângulo?

b) Considere o triângulo retângulo ACD, cujo um dos catetos tem a mesma medida da hipotenusa do triângulo precedente e o outro cateto é unitário. Qual é a medida da hipotenusa desse triângulo?

c) Considere o triângulo retângulo ADE, cujo um dos catetos tem a mesma medida da hipotenusa do triângulo ACD e o outro cateto é unitário. Qual é a medida da hipotenusa desse triângulo?

d) Agora que você conheceu um método de construção de segmentos de medidas $\sqrt{n}, n \in Z_+^*$ você representaria na reta o número $\sqrt{2}$ de um modo diferente que você representou na atividade anterior?



Esta atividade favorece o desempenho dos alunos em relação às respostas dadas nas atividades anteriores, conforme mostramos em nossa pesquisa. Afinal, após realizarem a construção de segmentos de medida irracional algébrica, embora nem todos os alunos soubessem ainda representar corretamente $\sqrt{2}$ na reta numérica, eles passaram a considerar a possibilidade da representação dessas medidas, conforme o fragmento da entrevista de F1:

> Agora eu acho que sim! Deixando na raiz. [...] Só que é difícil eu fazer esta dedução porque eu não aprendi isto ainda.

Este aluno demonstra estar diante de uma situação nova, que o levou a refletir sobre a existência de segmentos de medida irracional algébrica, proporcionando-lhe aprendizagens.

Algumas considerações

Após o desenvolvimento dessas quatro atividades em sala de aula, acreditamos ser um momento oportuno para o professor fazer a institucionalização do saber (BROSSEAU, 2008) - medidas irracionais algébricas, retomar as atividades anteriores, mostrar que os segmentos da forma $\sqrt{n}, n \in Z_+^*$ são segmentos construtíveis e justificar a existência de tais medidas, assim como de figuras e segmentos geométricos que dependem dessas medidas. Neste momento, também é importante que o professor institucionalize as diferentes representações para os números irracionais algébricos – representação decimal, representação na forma de radical e representação na forma figural (como um segmento de medida irracional).

Mostramos com as respostas dos alunos que essas atividades possibilitam reflexões sobre a existência de segmentos de medida irracional algébrica, e favorecem possibilidades de desestabilização, ou pelo menos perturbação local, de teoremas em ação falsos possíveis de serem mobilizados pelos alunos, favorecendo momentos de aprendizagens sobre os números irracionais.

Assim, espera-se que as atividades apresentadas sejam desenvolvidas com alunos do 8º ou 9º ano do Ensino Fundamental, embora elas também possam ser desenvolvidas com alunos de Ensino Médio e de Licenciatura em Matemática, para que eles possam refletir sobre os irracionais algébricos e favorecer a elaboração do conceito de número irracional.

Referências

ASSUDE, T. **Racinescarées:** conceptions et mises en situations d'élèves de quatrième et troisième. Petit X, nº 20, 1989,p. 5 - 33.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília, 1998.

BRONNER, A. **Étude didactique des nombres réels, idécimalité et racine carrée**. Thèse, Université J. Fourier, Grenoble, 1997.

BROUSSEAU, Guy**. Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas:** conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

DUVAL, R. **Ver e ensinar matemática de outra forma** : entrar no modo matemático de pensar : os registros de representação semióticas. Org. Campos, T. M. M. São Paulo: PROEM, 2011.

REZENDE, V. **Conhecimentos sobre números irracionais mobilizados por alunos brasileiros e franceses:** um estudo com alunos concluintes de três níveis de ensino. Tese de doutorado. PCM, UEM, 2013.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. **Recherche en Didactique des Mathématiques**. Grenoble : La Pensée Sauvage, vol. 10, n. 2.3, p. 133-170, 1990.