Relato de Experiência

Sistemas de Inequações Lineares: Uma Ferramenta para Resolver Problemas de Programação Linear

Uéric Silva Oliveira[9]
Gilson Bispo de Jesus[10]

Resumo
Este artigo representa um recorte da monografia: A Programação Linear e a Geometria Analítica no Ensino Médio: relações e contribuições. Apresentamos a nossa escolha teórica, Registros de Representação Semiótica, destacamos aspectos ligados à metodologia, analisamos as atividades e as respostas dadas a elas por duas duplas de alunos do 3º ano do Ensino Médio. Nosso objetivo era dar condições para que os alunos construíssem o ferramental matemático (sistemas de inequações lineares e sua representação gráfica e algébrica), em geral, necessário para resolver problemas de Programação Linear. Ao final apresentamos algumas considerações a respeito da problemática em questão, destacando o processo de aprendizagem do objeto matemático estudado.
Palavras-chave: Programação Linear; Sistema de Inequações Lineares; Aprendizagem de Geometria Analítica.

Introdução

Ao participarmos de um grupo de estudos voltado para a Programação Linear[11], percebemos que em alguns dos seus problemas utilizam-se métodos gráficos para determinar suas soluções. Tais métodos, em nossa concepção, poderiam ser desenvolvidos com alunos do Ensino Médio, o que nos fez refletir sobre o tema, mais especificamente no conteúdo de Geometria Analítica. Segundo as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2008), a Geometria Analítica tem por objetivo central a manipulação de objetos matemáticos do campo da Geometria em suas representações algébrica e gráfica. Nesse contexto, destacamos os sistemas inequações lineares, que podem ser utilizados para resolver problemas que em sua solução envolvam uma abordagem geométrica de alguns problemas algébricos.

Com essa motivação, elaboramos um conjunto de atividades com suporte no

[9]Colégio Estadual José Malta Maia. E-mail: ueric.s@hotmail.com
[10]Universidade Federal do Recôncavo da Bahia. E-mail: gilbjs@bol.com.br
[11]A Programação Linear se apresenta como um ramo da matemática aplicada em que se faz uso da Geometria Analítica. O foco desse estudo foi, ao final, resolver alguns problemas de otimização.

ambiente informático *WINPLOT*, que tinha como objetivo favorecer a construção do ferramental matemático que possibilitasse a alunos do 3º ano do Ensino Médio resolver alguns problemas de Programação Linear.

Para esse trabalho, apresentamos um conjutnto de atividades com foco nas representações algébrica e grafica de inequações lineares, o que poderia dar condições aos alunos de construírem conhecimentos a respeito da região viável, conceito fundamental para resolver alguns problemas de Programação Linear. Além disso, procedemos com as análises dessas atividades antes e após socialização com duas duplas de alunos do 3º ano do Ensino Médio. Ao final, apresentamos algumas considerações no que diz respeito ao trabalho desenvolvido.

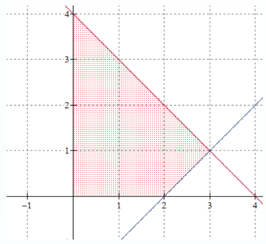
1. Fundamentação teórica

Segundo Duval (2008), os registros de representações semióticas são fundamentais para um sujeito objetivar uma ideia ainda confusa, um sentimento subentendido, para explorar informações ou simplesmente para poder se comunicar com outros sujeitos. Dessa forma, entendemos que a aquisição e o desenvolvimento do conhecimento se dão pelo uso dos Registros de Representação Semiótica. Na matemática temos como registro de representação semiótica: a língua natural, as notações simbólicas, os gráficos, as figuras geométricas, dentre outros.

De acordo com Damm (2010), é de fundamental importância a distinção do objeto matemático nas suas diferentes representações, uma vez que pode ocorrer uma confusão entre o objeto matemático e sua representação, por exemplo, o objeto matemático sistema de inequações lineares e sua representação algébrica. Devemos ter em mente que a representação algébrica de um sistema de inequações lineares não representa o conteúdo em si, mas sim uma maneira de representá-lo.

Nas atividades desse artigo são abordadas representações presentes no objeto matemático sistema de inequações lineares, voltadas para a aprendizagem de Geometria Analítica no Ensino Médio, sendo os principais utilizados: o registro algébrico e o registro gráfico. O quadro 1 ilustra essas representações e, a partir de sua análise, notamos que podemos interpretar e associar o objeto matemático sistema de inequações lineares em seus diferentes registros de representação semiótica.

A análise de um objeto matemático na perspectiva educacional em termos dos registros de representação semiótica será feita, por meio do *tratamento* e da *conversão* que, segundo Duval (2008), são transformações de representações semióticas radicalmente diferentes.

Registro de Representação Semiótica e Sistemas de Inequações lineares	
Registro algébrico	Registro gráfico
$\begin{cases} x + y \leq 4 \\ x - y \leq 2 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$	

Quadro 1: Registros de Representação Semiótica de um sistema de inequações lineares.
Fonte: Elaborado pelos autores do trabalho.

No tratamento, o objeto matemático permanece no mesmo registro de representação semiótica, tomando como exemplo a inequação: $2x + 2y > 0$, ela é equivalente à outra inequação cuja representação algébrica é obtida a partir de sua simplificação, ou seja, a inequação $x + y > 0$. Nesse caso, dividimos por 2 todos os termos componentes da inequação em ambos os membros da desigualdade e o objeto matemático continuou no mesmo registro, ou seja, o registro algébrico. O tratamento, segundo Duval (2008, p. 15), é a transformação mais utilizada em procedimentos de justificação, acreditamos que isso ocorra devido à praticidade desses para a apreensão do objeto matemático pelos estudantes.

Na conversão, o objeto matemático muda de uma representação para outra equivalente, mas não permanecendo no mesmo registro. Por exemplo, $x + y > 0$ é equivalente ao conjunto dos pontos do plano cartesiano que têm soma das coordenadas maior que zero. Nesse caso, passamos do registro algébrico para o registro da língua natural. A respeito da conversão, Duval (2008, p. 15) afirma que muitos alunos não reconhecem um dado objeto matemático por meio de duas representações diferentes, cremos que esse fenômeno ocorra devido à primazia do tratamento em detrimento da conversão.

Com relação à apreensão do conhecimento, Duval (2008, p. 16) afirma que a atividade de conversão é a transformação representacional mais importante. Acreditamos que isso acontece pelo fato do aluno poder reconhecer um dado objeto matemático sob a visão de vários registros de representação semiótica.

2. Aspectos metodológicos

As atividades propostas em nossa

pesquisa foram realizadas em uma sala de informática, houve contato direto entre o pesquisador com o ambiente de pesquisa e os pesquisados. Os dados coletados foram de caráter descritivo, com o auxílio de observadores e também pela observação do pesquisador que tentou se envolver com os participantes ao analisar suas expressões, seus sentimentos e suas descobertas. Assim, o pesquisador buscou, por meio de algumas evidências, comprovar o objeto pelo qual se destinava esse estudo. Diante disso, segundo Lüdke e André (2008), a pesquisa desenvolvida neste trabalho é classificada como qualitativa.

No que diz respeito aos procedimentos, utilizamos a observação direta e trabalhamos com uma amostra intencional, duas duplas de alunos do 3° ano do Ensino Médio do turno matutino de um colégio estadual localizado na cidade de Jiquiriçá – Bahia. Além disso, para coletar os dados durante as observações, utilizamos o registro escrito. Assim, aplicamos as atividades com suporte num ambiente informático *WINPLOT*, com o objetivo de mobilizar os objetos matemáticos nos campos da álgebra e da geometria (registros de representação semiótica algébrico e gráfico). As identidades dos estudantes foram preservadas (Participante 1, Participante 2, Participante 3 e Participante 4) e as duplas foram organizadas do seguinte modo: Dupla I composta pelos participantes 1 e 2 e a Dupla II composta pelos participantes 3 e 4.

No desenvolvimento das atividades, cada dupla ficou em um computador e como os alunos não conheciam o *software WINPLOT*, realizamos algumas atividades de familiarização para que eles explorassem suas ferramentas e construíssem conhecimentos que lhes possibilitassem realizar algumas representações gráficas.

3. As atividades e suas análises

Sem perder de vista o nosso objetivo, isto é, favorecer a construção do ferramental matemático (investigar sistemas de inequações lineares em suas representações algébrica e gráfica) que possibilitasse a alunos do 3º ano do Ensino Médio resolver alguns problemas de Programação Linear, as atividades focaram as conversões entre os registros de representação semiótica algébrico e gráfico, além de estimularem alguns tratamentos nesses registros. Assim, entendemos, segundo Duval (2008), que a aprendizagem dos objetos matemáticos envolvidos nelas poderia acontecer.

ATIVIDADE 1: Considere os pontos A (1, 1), B (–1, 0), C (2, 1), D (0, –3), E (4, 2), F (3, 1), G (–2, 3), H (–1, 4), I (–2, 0), J (–1, –4), L (4, –1), M (0, 5), N (3, –2), O (–5, –2) e as inequações $x > 0$ e $y > 0$.

a) Represente graficamente esses pontos.

b) Represente graficamente a inequação x > 0. Quais pontos pertencem à região determinada por essa inequação?

c) Represente graficamente a inequação y > 0. Quais pontos pertencem à região determinada por essa inequação?

d) Oculte os pontos representados graficamente, em seguida represente as duas inequações no plano. O que você obteve?

e) Volte a exibir os pontos. Há pontos que pertencem às duas regiões ao mesmo tempo? Quais são?

f) Existem outros pontos que continuam pertencendo à região determinada simultaneamente pelas inequações? Represente graficamente e algebricamente alguns desses pontos.

Com relação a essa atividade, os participantes resolveram os itens *a, b* e *c* sem dificuldades, pois no nosso entendimento, as conversões dos objetos matemáticos, ponto e inequação, do registro algébrico para o registro gráfico por meio do *WINPLOT* tornaram-se congruentes. Já na resolução do item *d* eles representaram as duas inequações no registro gráfico respondendo que:

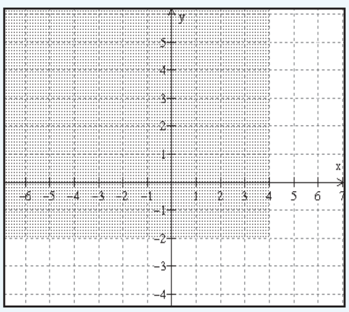
Dupla I: Ficou pintada a quarta parte do plano.

Dupla II: Observamos que as inequações estão presentes no 1° quadrante.

A Dupla I respondeu de forma mais geral, pois com a sua resposta não era possível identificar qual das quatro partes do plano foi selecionada. Já a Dupla II trouxe uma solução mais específica, o que nos leva a inferir que poderia ter uma melhor compreensão do objeto matemático. Compreendemos que a conversão do objeto matemático inequação que está no registro gráfico para o registro algébrico, em nosso entendimento, era não congruente.

Os itens *e* e *f* foram resolvidos sem que os participantes apresentassem dificuldades, contudo, o pesquisador explicou que a região obtida era determinada pela interseção das duas regiões, para tal, foram dados exemplos com conjuntos de objetos destacando os elementos em comum.

ATIVIDADE 2: Observe a região abaixo:



a) Dados os pontos A (1, 1), B (–1, 0), C (2, 1), D (0, –3), E (4, 2), F (3, 1), G (–2, 3), H (–1, 4), I (–2, 0), J (–1, –4), L (4, –1), M (0, 5), N (3, –2) e O (–5, –2), quais desses pontos pertencem a essa região?
b) Existem outros pontos que continuam a pertencer a essa região? Determine alguns deles.
c) Essa região é determinada por inequações, determine essas inequações.

Nessa atividade, inferimos que a conversão do registro gráfico para o algébrico seria, para os participantes, não congruente, logo alguma dificuldade era esperada. Por exemplo, ao tentarem resolver o item *c*, os participantes mostraram-se desmotivados, dizendo que não conseguiam determinar as inequações almejadas, uma vez que eles não sabiam como proceder nessa conversão. O pesquisador interveio por meio de um exemplo, similar ao proposto (x > –1 e y < 2), e fez algumas perguntas aos participantes, iniciando, assim, uma discussão:

Pesquisador: Com relação ao eixo das abscissas, o que podemos afirmar?

Participante 1: Como assim?

Pesquisador: Se vocês observarem este eixo os valores de x possuem um limite?

Participante 3: Hã, o x não passa para o lado esquerdo do –1.

Participante 1: Então ele é maior que –1! E o y é menor que 2.

Pesquisador: Então quais são as inequações?

Participante 3: Ora professor, é o x maior que –1 e y menor que 2.

Essa discussão, provavelmente, contribuiu para que os participantes representassem as inequações no registro algébrico, ou seja, pudessem efetuar conversões do registro de representação semiótica gráfico para o algébrico.

ATIVIDADE 3: Abra outra janela no WINPLOT e represente graficamente as seguintes inequações: .

$$x \geq 0,\ \ y \geq 0,\ \ 2x + 3y \leq 12\ \text{ e }\ -x + 3y \leq 3$$

a) As interseções dos gráficos das inequações formam uma região que pode ser representada algebricamente por

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + 3y \leq 12 \\ -x + 3y \leq 3 \end{cases}$$

Que região foi encontrada?

b) A região encontrada no item anterior é chamada de REGIÃO VIÁVEL. Os vértices da região viável são denominados pontos extremos, determine as coordenadas dos pontos extremos.

c) Represente graficamente os pontos A (1, 1), B (–1, 0), C (2, 1), D (3, 0), E (4, 2), F (3, 2), G (2, 0.5), H (–1, 4), I (–2, 2), L (–1, –4), M (4, –1). Quais desses pontos pertencem a essa região viável?

d) Dado um ponto qualquer, é possível constatar algebricamente se ele pertence a uma região viável? Como?

Na resolução dessa atividade, as duplas responderam de forma geral, não atentando para os valores extremos e nem a representação poligonal formada pelo sistema de inequações. O pesquisador interviu comentando que as restrições da Programação Linear têm representações poligonais contidas no primeiro quadrante.

Essas figuras são chamadas de região viável. Com relação aos itens *b* e *c* os participantes não apresentaram dificuldades e seguiram para o item *d* e afirmaram:

Dupla I: Não é possível constatar.

Dupla II: Sim, podemos, através da utilização das inequações e satisfazendo as mesmas.

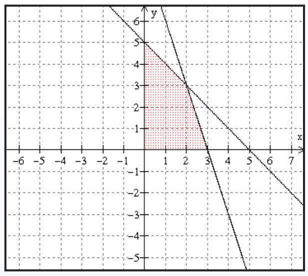
Diante dessa situação, o pesquisador pediu a Dupla II que explicasse a Dupla I como seria possível constatar algebricamente se um determinado ponto pertencia ou não a região viável. Dessa forma, o Participante 4 foi ao quadro e substituiu as coordenadas do ponto C (3, 2) nas inequações e verificou a validade de cada uma delas, mostrando, então, que esse ponto pertencia à região viável.

ATIVIDADE 4: Observe a seguinte representação gráfica.

a) Determine os pontos extremos dessa região viável.

b) Encontre as inequações que geraram essa região, ou seja, a representação algébrica da região viável.

c) Determine todos os pontos que pertencem a essa região viável cujas coordenadas sejam inteiras.



Com essa atividade os participantes puderam realizar conversões do registro de representação semiótica gráfico para o registro algébrico, em nosso entendimento, a conversão de pontos era congruente e a de inequações era não congruente. Assim, eles não apresentaram dificuldades no item *a*, contudo tiveram que determinar a equação de uma reta que passa por dois pontos, obtendo, assim, as inequações representadas pelas retas suportes dos lados do polígono. Não apresentaram dificuldade para exibir x ³ 0 e y ³ 0, contudo foi custoso encontrarem as inequações: x + y £ 5 e 3x + y £ 9. Ao final, quando encontraram todas as inequações pedimos que fizessem a confirmação construindo a representação gráfica, ou seja, convertendo o registro de representação semiótica algébrico para o registro gráfico, o que permitiu alguns ajustes nas inequações encontradas.

Ao final das atividades pôde-se sistematizar que qualquer ponto localizado na região viável pertence ao sistema de inequações, ou então, qualquer ponto cujas coordenadas satisfazem algebricamente o sistema de inequações.

4. Considerações finais

Esta pesquisa se propôs a contribuir com o processo de aprendizagem de Geometria Analítica, sobretudo no que diz respeito às inequações lineares em suas representações algébrica e gráfica. Nesse sentido, o *software WINPLOT* contribui para a representação em duas dimensões dos sistemas de inequações lineares com maior rapidez e eficiência.

A fim de possibilitar a aprendizagem do aluno quando ele fica à frente da construção do seu conhecimento, buscamos entender a apreensão de um saber matemático com base nos Registros de Representação Semiótica, pois segundo essa teoria o sujeito apreende um objeto matemático, que não está diretamente acessível à nossa percepção, via registros de representação semiótica e realizando conversões entre, no mínimo, dois desses registros (DUVAL, 2008). Vale destacar, o uso de tratamentos em um mesmo registro de representação semiótica, por exemplo, as manipulações algébricas para exibir a inequação com base na determinação de uma equação da reta que passa por dois pontos. Dessa forma, essa teoria foi pertinente nesse estudo, uma vez que foi possível destacar o processo de aprendizagem de matemática.

De modo geral, pelo que apresentamos no decorrer das análises dos dados e nas reflexões apresentadas nessas considerações finais, acreditamos ter, em alguma medida, proporcionado aos estudantes a construção de conhecimentos a respeito do objeto matemático inequação linear, sobretudo no que diz respeito aos sistemas de inequações lineares.

Vale salientar que o objeto matemático abordado nesse artigo, está presente em problemas de Programação Linear, uma vez que nesses problemas, quando se utilizam duas variáveis, é possível usar o método gráfico em que as restrições (sistema de inequações) irão determinar a região viável, na qual se encontra a solução do problema.

Referências Bibliográficas

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC, 2008.

DAMM, Regina Flemming. Registro de Representação. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. **Educação Matemática**: Uma (nova) introdução. São Paulo: EDUC, 2010. p. 167-188.

DUVAL, Raymond. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em matemática:** registros de representação semiótica. 4 ed. Campinas: Papirus, 2008, p.11-33.

LÜDKE, Menga; ANDRÉ, Marli E. D. A. **Pesquisa em Educação**: Abordagens Qualitativas. 11. Ed. São Paulo: Pedagógica e Universitária, 2008. 99 p.