Sociedade Brasileira de Educação Matemática

Investigação Matemática em Atividades de Ensino Propostas por Professores na Exploração do Teorema de Pitágoras no Ensino Fundamental

Nilce Fátima Scheffer[1]
Pedro Augusto Pereira Borges[2]
Gabriela Finn[3]
Mateus Henrique Zeiser[4]

Resumo: Este artigo descreve e analisa processos de investigação matemática em atividades de ensino sobre o Teorema de Pitágoras, mediadas por um Objeto Virtual de Aprendizagem (OVA), criado por um professor do sistema público de ensino, durante o Curso de Formação em parceria SBEM/UFFS. Com uma abordagem qualitativa e valendo-se da Análise do Conteúdo, foram investigadas as falas do professor, com amparo na história, modos de elaboração do conhecimento matemático e em concepções correntes do uso da investigação matemática escolar. Como exercício de Imaginação Pedagógica, foram criadas outras possibilidades de generalização do referido teorema, testando a veracidade para casos particulares através do OVA e, finalmente, argumentando em linguagem matemática. O estudo evidenciou a importância dos recursos tecnológicos nos processos investigativos, na aplicação de algoritmos e na visualização de resultados numéricos e gráficos. Desse modo, as investigações matemáticas tendem a tornar-se mais viáveis como atividades de ensino nos espaços e tempos escolares.

Palavras-chave: Argumentação. Investigação Matemática. Teorema de Pitágoras. Ensino Fundamental. Software GeoGebra.

Mathematical Investigation in Teaching Activities Proposed by Teachers in the Exploration of the Pythagorean Theorem in Elementary School

Abstract: This article describes and analyzes mathematical investigation processes in teaching activities about the Pythagorean Theorem, mediated by a Virtual Learning Object (VLO), created by a teacher from the public education system, during the Training Course in partnership SBEM/UFFS. With a qualitative approach and using Content Analysis, the teacher's statements were investigated, based on the history of ways of developing mathematical knowledge and current conceptions of the use of school mathematical research. As an exercise in Pedagogical Imagination, other possibilities for generalizing the aforementioned theorem were created, testing its veracity for particular cases through the VLO and finally, arguing in mathematical language. The study highlighted the importance of technological resources in investigative processes, in the application of algorithms and in the visualization of numerical and graphical results. In this way, mathematical investigations tend to become more viable as teaching activities in school spaces and times.

Keywords: Argumentation. Mathematical Investigation. Pythagorean Theorem. Elementary School. GeoGebra Software.

La investigación matemática en las actividades docentes propuestas por los docentes en la exploración del teorema de Pitágoras en la escuela primaria

Resumen: Este artículo describe y analiza procesos de investigación matemática en actividades de

[1] Doutora em Educação Matemática. Docente da Universidade Federal da Fronteira Sul/UFFS, Chapecó/SC, Brasil. E-mail: nilce.scheffer@uffs.edu.br - Orcid: https://orcid.org/0000-0001-9199-9750

[2] Doutor em Engenharia Mecânica. Docente da Universidade Federal da Fronteira Sul/UFFS, Chapecó/ SC, Brasil. E-mail: pedro.borges@uffs.edu.br - Orcid: https://orcid.org/0000-0002-0087-5806

[3] Mestre em Educação. Docente da Educação Básica. Chapecó-SC Brasil. E-mail: gabifinn94@gmail.com - Orcid: https://orcid.org/0000-0002-1915-4224

[4] Mestrando em Matemática Aplicada, IME-USP. Licenciado em Matemática. Chapecó-SC, Brasil. E-mail: mateushenriquezeiser@outlook.com - Orcid: https://orcid.org/ 0000-0002-0861-2218

eISSN 2317-904X DOI: 10.37001/emr.v29i82.3387 Recebido • 12/04/2023 | Aprovado • 02/12/2023 | Publicado • 24/01/2024

enseñanza sobre el Teorema de Pitágoras, mediados por un Objeto Virtual de Aprendizaje (OVA), creado por un docente del sistema de educación pública, durante el Curso de Formación en colaboración SBEM/UFFS. Utilizando un enfoque cualitativo y utilizando el Análisis de Contenido, se investigaron los dichos de los docentes, a partir de la historia de las formas de desarrollar el conocimiento matemático y las concepciones actuales sobre el uso de la investigación matemática escolar. Como ejercicio de Imaginación Pedagógica, se crearon otras posibilidades para generalizar el teorema antes mencionado, comprobar su veracidad para casos particulares a través de lo OVA y, finalmente, argumentar en lenguaje matemático. El estudio destacó la importancia de los recursos tecnológicos en los procesos investigativos, en la aplicación de algoritmos y en la visualización de resultados numéricos y gráficos. De esta manera, las investigaciones matemáticas tienden a tornarse más viables como actividades docentes en los espacios y tiempos escolares.

Palabras clave: Argumentación. Investigación matemática. Teorema de Pitágoras. Enseñanza fundamental. Software GeoGebra.

1 Introdução

Este artigo conta com dados de um estudo realizado com professores participantes de um Curso de Formação, que ocorreu no município de Chapecó/SC, como parte de um projeto de parceria entre a Universidade Federal da Fronteira Sul (UFFS) e a Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), nos anos de 2021 e 2022, coordenado pela primeira autora. Observamos durante o curso, que alguns relatos dos professores refletiam elementos de suas práticas, associados à investigação matemática, à argumentação e à utilização de tecnologias digitais na ação pedagógica.

O ensino de matemática na Educação Básica, de modo geral, apresenta características de uma abordagem algorítmica, na qual são ensinados processos para se obter resultados, que por sua vez, como conhecimento tácito, são aplicados na resolução de problemas. O modelo didático - que envolve regras, exercícios, problemas, avaliação - chamado de educação tradicional por Skovsmose (2000), é bastante empregado nas práticas escolares e nos livros didáticos. Como exemplo, as regras operatórias com números naturais, inteiros, racionais e irracionais são informadas aos alunos como verdades, seguidas de treino para o desenvolvimento de habilidades operatórias com os símbolos. O mesmo ocorre com os teoremas da geometria e as expressões algébricas, reduzindo, assim, o processo de aprendizagem à execução de algoritmos, cuja veracidade é aceita sem justificativa, o que torna o modelo didático muito limitado, pois não promove a reflexão e a investigação em sala de aula, como advertem Aguilar Junior e Nasser (2014): "Em nossas aulas, constata-se que o conhecimento matemático dos alunos se restringe ao domínio de técnicas operacionais, fórmulas e procedimentos, sem que haja uma compreensão do que estão fazendo" (AGUILAR JUNIOR; NASSER, 2014, p. 1013).

Por outro lado, os algoritmos, evidentemente, têm sua importância na prática da matemática na aplicação e resolução de problemas, na qual é necessário apenas que as proposições sejam verdadeiras e permitam chegar a resultados. No entanto, não seria conveniente questionar se as tais proposições de fato são verdadeiras? Considerando que esse questionamento é próprio da atividade de fazer matemática, parece razoável cogitar a possibilidade de extrapolar a proposta algorítmica, a partir de outra possibilidade que envolva estudantes e professores no ambiente da Escola Básica, em processos investigativos, a ponto de que tais práticas sejam adotadas como estratégias de ensino. Essa alternativa é explorada com sequências de atividades investigativas em Ponte, Brocardo e Oliveira (2016). Uma investigação matemática desenvolve-se em torno de um ou mais problemas, sendo que o primeiro grande passo de qualquer investigação é identificar claramente o problema a resolver (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2016, p. 16). Desse modo, o desafio do professor passa a ser articular diferentes tipos de tarefas na busca de um currículo equilibrado, que promova o desenvolvimento matemático dos estudantes.

Com essas considerações, entendemos que a relevância do presente trabalho se situa na pesquisa de possibilidades de ensinar matemática em uma perspectiva investigativa, considerando as transformações no comportamento humano, decorrentes da presença das tecnologias digitais no cotidiano de alunos e professores. Particularmente, com relação aos trabalhos escolares, novas formas de comunicação (mídias sociais, aulas e execução de tarefas em grupos online), acesso à informação (softwares de procura de dados), tratamento e processamento de dados (tabelas eletrônicas, editores de texto, linguagens de programação orientadas a objetos), visualização de resultados (gráficos e geometria dinâmica) e objetos virtuais de aprendizagem estão alterando rotinas de estudo e a maneira como os alunos se comunicam e aprendem.

Nesse contexto, propomos o seguinte problema de pesquisa: Que características assume a investigação matemática presente em atividades elaboradas por um professor do Ensino Fundamental, ao abordar o estudo do Teorema de Pitágoras com tecnologias digitais?

Para dar conta do problema proposto, apresentamos, inicialmente, uma breve revisão bibliográfica, que coloca em destaque estudos publicados sobre investigação matemática na Escola Básica. Na seção seguinte, discutimos a transformação da investigação matemática ao longo da história e possíveis correlações com investigações no espaço escolar. Na seção sobre metodologia, descrevemos nossa opção pelas pesquisas de caráter qualitativo, além do emprego da metodologia de Análise de Conteúdo para a seleção e tratamento dos dados. Na seção de descrição e análise, apresentamos o teor das categorias de análise nos respectivos momentos de investigação matemática identificados no material produzido pelo professor e finalmente, realizamos uma síntese das características de investigação matemática encontradas no material em análise.

2 Visitando estudos sobre investigação matemática na Escola Básica

As pesquisas sobre o emprego da investigação matemática na Escola Básica, têm apresentado práticas sobre diferentes conceitos e áreas da matemática, assim como mostrado desempenho positivo com relação ao aprendizado argumentativo, mediante o diálogo entre os atores dos processos de aprendizagem. Ferruzzi e Alves da Costa (2018) propõem a inserção da investigação matemática e da argumentação na sala de aula e afirmam que ambas promovem o diálogo entre professores e estudantes e, assim, podem influenciar positivamente a aprendizagem. Quando se referem às atividades de investigação matemática como prática pedagógica, deixam claro que elas, têm conquistado espaço no ensino permitindo o aprender matemática, fazendo matemática.

Vargas, Lara e Leivas (2019) tratam da investigação matemática como recurso metodológico para o ensino de geometria nos anos iniciais, ao estudar conceitos de direção, sentido, paralelismo e perpendicularismo. A investigação efetuada pelos autores, teve como objetivo explorar a percepção, a visualização e a construção de conhecimentos geométricos com atividades lúdicas voltadas para o 4° ano do Ensino Fundamental. Para tanto, foi proporcionado um ambiente de pesquisa e investigação, determinante na busca de soluções e estratégias, uma vez que estas últimas partiam das discussões realizadas na sala de aula de forma cooperativa e com a intermediação do professor.

No trabalho de Grando e Balke (2013), com estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental, é discutido o potencial da investigação matemática no tratamento de informações. Nesse estudo, o desenvolvimento das atividades possibilitou interações que intensificaram a apropriação de significados dos conceitos de tratamento da informação. Tais informações foram obtidas a partir da análise dos dados presentes nas transcrições dos vídeos, gravações e dos materiais elaborados pelos estudantes, durante a aplicação da proposta didático-pedagógica sobre o tema.

Ao analisar uma atividade de monitoria, Almeida e Malheiro (2018), discutem a argumentação como uma forma de investigação matemática, desenvolvida para o estudo dos conceitos de área e perímetro. Nesse estudo foi constatado que a argumentação matemática contribui para a aprendizagem partindo de experiências investigativas.

Aguilar Junior e Nasser (2014) analisaram a visão do professor sobre argumentação e prova matemática na escola e, também, as respostas dadas por alunos para questões que versavam sobre a temática da argumentação e a demonstração de proposições matemáticas. Esse estudo inicial indicou a preferência dos professores por argumentos e provas que se aproximavam do modelo acadêmico de prova matemática, tendo em vista a formação clássica que tiveram na licenciatura e a pouca vivência em sala de aula. Tais aspectos levaram os pesquisadores a refletir a respeito do papel do professor na construção de um trabalho pedagógico que promovesse o raciocínio matemático, a partir de uma proposta de trabalho envolvendo a argumentação e a justificação na Matemática.

Ao voltar o olhar para a prática da argumentação matemática por estudantes, Nunes e Almouloud (2013) utilizam o modelo de Toulmin e promovem uma análise das argumentações, oriundas da comunicação de ideias necessárias às soluções de problemas. O estudo está constituído de duas partes, a organização dos argumentos em um modelo estrutural e as respectivas análises. Assim, analisam uma prática de argumentação desenvolvida no 5º ano do Ensino Fundamental, constatando que a argumentação favoreceu a compreensão dos conceitos de área e perímetro de figuras planas. Os autores destacam que o modelo de Toulmin se habilita como um instrumento capaz de possibilitar a organização e análise de argumentos.

O presente trabalho situa-se na temática de investigação matemática na Escola Básica como as pesquisas relatadas, na medida em que analisa as atividades de ensino propostas por um professor em situação de formação continuada e, consequentemente, amplia as possibilidades de investigações, em diferentes linguagens e níveis de generalidade.

3 Possibilidades de investigação matemática na Escola Básica

A história da Matemática mostra que o modo de fazer matemática não é o mesmo ao longo dos tempos. Na época dos egípcios (4000 a 1500 a.C.), verificamos que a relação entre circunferência e diâmetro e a noção de perpendicularismo entre os catetos do triângulo de lados 3, 4 e 5 e seus múltiplos eram conhecimentos utilizados em problemas de medição de terras, construção de pirâmides e canais de irrigação. Aos escribas e construtores, interessava apenas a utilidade do triângulo como esquadro e como processo para calcular diagonais de retângulos (EVES, 2004). Provavelmente, a verificação das proposições era obtida por medição de casos particulares, limitada à precisão dos instrumentos disponíveis naquela época e da necessidade das aplicações. Tal verificação indica um nível empírico de investigação e restrito a casos particulares.

Já os gregos, por outro lado, transcenderam o caráter prático e passaram a investigar a verdade das proposições com o uso efetivo de símbolos (letras, números, desenhos), instrumentos (régua não graduada e compasso), processos de estruturação lógica (método axiomático e lógica formal), extrapolando a verificação de casos particulares, na direção de demonstrações gerais. Com isso, os gregos inauguraram outra forma de investigação matemática apresentada no livro Os elementos, de Euclides (EVES, 2004, p. 178-180). A utilização de triângulos ou outros objetos matemáticos para fazer construções, interessava-lhes menos do que a demonstração da veracidade das propriedades desses objetos. Observamos que os gregos, em relação aos egípcios, por exemplo, mudaram completamente as características da investigação matemática, tanto em relação aos objetivos quanto aos processos e recursos.

Com esse breve comentário sobre os objetivos e interesses dos povos antigos com a matemática, podemos verificar que a investigação matemática é o trabalho próprio de quem precisa da ou se interessa pela matemática, sejam os escribas e filósofos naqueles tempos, ou os professores e pesquisadores nos dias de hoje. A criação de estruturas, conceitos, proposições e suas respectivas demonstrações, assim como a revisão da matemática existente, são tarefas que têm ocupado os matemáticos, tanto na área pura quanto na aplicada. Mesmo que os processos investigativos tenham alguma parcela de indução e até intuição, são essencialmente abstratos, usam uma linguagem particular, a lógica formal e a dedução própria do método axiomático. Requerem, ainda, de seus autores, uma formação na área, habilidades específicas e, fundamentalmente, interesse e gosto pela teoria.

Na tentativa de identificar um esboço de método investigativo, Ponte, Brocardo e Oliveira (2016, p. 14) examinaram o relato dos processos de investigações de Poincaré e identificam três fases do processo de criação:

1) a compilação de informações e experimentação, sem produzir resultados palpáveis. Uma fase extremamente indutiva;
2) a iluminação súbita, como se por acaso ou por ação do inconsciente o pesquisador tivesse um *insight* e percebesse regularidades, relações ou associações que o levassem a conjecturas; e
3) a testagem das conjecturas, usando diferentes situações particulares, generalizações e finalmente, a demonstração formal, ou sistematização.

Evidentemente, o processo investigativo não é uma trajetória retilínea dessas três fases nem somente de sucessos. Muitos movimentos para frente e para trás, negações de hipóteses, tentativas de sistematização refutadas, momentos de indecisão e diálogos são comuns, além de tempos significativos, talvez meses ou anos de dedicação e partilha de ideias com outros matemáticos. No final, no entanto, o sucesso é recompensador, pelo prazer de elaborar algo consistente e contribuir para o conhecimento da humanidade.

Nesse sentido, um questão recorrente é se a prática de processos investigativos é possível, ou até conveniente, de ser realizada na Escola Básica. E mais: saber em que medida os alunos poderiam criar e provar teoremas. Essa questão suscita “[...] uma discussão sobre o que são atividades de investigação matemática e o papel que podem assumir no ensino e na aprendizagem dessa disciplina” (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2016, p. 9).

Para esses pesquisadores, investigar, no contexto escolar, “[...] significa, tão só, que formulamos questões que nos interessam, para as quais não temos resposta pronta, e procuramos essa resposta de modo tanto quanto possível fundamentado e rigoroso” (Idem, p. 9). Certamente, o rigor lógico, a precisão e a linguagem devem ser adaptados às condições psicológicas (desenvolvimento cognitivo) e culturais (nível de conhecimento matemático, interesse e motivação) dos estudantes. Assim, Ponte, Brocardo e Oliveira (2016, p. 20-21), resumem, esquematicamente, quatro momentos da investigação em sala de aula:

(1) Reconhecimento da situação, exploração preliminar e formulação de questões;

(2) Formulação de conjecturas;

(3) Realização de testes e o eventual refinamento das conjecturas;

(4) Justificação, argumentação, demonstração e avaliação do trabalho realizado.

Ao voltar o olhar para a Educação Matemática, trabalhamos com o conceito de investigação matemática como atividade de ensino e de aprendizagem. Esse tipo de atividade

> [...] ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. Assim o estudante é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e professor (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2016, p. 23).

Nessas relações, Skovsmose (2000) salienta que, quando os estudantes resolvem fazer a exploração e explicação, ou seja, aceitam o convite para investigar, o cenário da investigação se transforma em uma nova realidade de aprendizagem. Assim, os estudantes assumem uma posição de responsabilidade pelo processo, ou seja, formulam questões e explicam na medida em que são questionados pelo professor. Consideramos, portanto, que é nesses momentos que a investigação matemática ocorre na sala de aula.

Admitida a possibilidade de aprender com investigações matemáticas, questões como o tempo escolar, a naturalidade e o direcionamento de processos, o acompanhamento do professor, a sistematização dos conceitos, as aprendizagens diferenciadas em classe, o desenvolvimento de habilidades orais e escritas, a linguagem matemática e a aplicação dos conceitos, são aspectos didático-metodológicos profundamente relacionados às condições necessárias que viabilizam a argumentação e a investigação matemática no ambiente escolar.

Assim, para um contraponto aos aspectos restritivos da realidade escolar, é necessário criar soluções viáveis para minimizá-los. A mediação do professor, nesse caso, pode ser enriquecida com alternativas de investigação previamente concebidas. Nessa perspectiva, a ideia de Imaginação Pedagógica, de Skovsmose (2015), dá a professores e pesquisadores, a possibilidade de transcender o dado concreto e fornecer possibilidades que incrementem a prática do professor, na direção da promoção de um raciocínio exploratório, comum nos processos de investigação. No presente trabalho, são imaginadas alternativas de verificações e provas em diferentes linguagens, com a finalidade de instrumentar o professor na condução de possíveis investigações.

4 Caminhos metodológicos do estudo

O estudo proposto neste trabalho é qualitativo, descritivo e interpretativo. É qualitativo porque analisa as falas e imagens de uma apresentação de atividades de ensino nos seus aspectos conceituais e não pela frequência em que ocorrem. É descritivo e interpretativo porque descreve os aspectos do corpus e os analisa, identificando suas características como processos investigativos.

O material gravado em vídeo foi organizado e analisado na perspectiva da Análise de Conteúdo, de Bardin (2021), de modo a permitir a elaboração de inferências sobre o tema, devidamente argumentadas e contrastadas com resultados de pesquisas já existentes. Para Bardin, a Análise de Conteúdo pode ser definida como

> [...] um conjunto de técnicas de análise das comunicações, visando obter, por procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens, indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimento relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) destas mensagens (BARDIN, 2021, p. 42).

De acordo com Bardin, a Análise de Conteúdo é um método composto por quatro partes: organização dos dados, codificação, categorização e inferência.

Em um primeiro momento, as cenas gravadas foram observadas, transcritas e analisadas, quanto às características das atividades, dentre as quais se identificou o potencial das experiências de alguns professores para pesquisar as práticas investigativas de temas do Ensino Fundamental II.

O recorte de dados, apresentado neste artigo, foi obtido a partir da apresentação de um professor da Rede Municipal de Ensino da cidade de Chapecó, SC (chamado neste trabalho de Professor), licenciado em Matemática, participante do Curso de Extensão e criador do OVA no software GeoGebra, para trabalhar com o 9º ano do Ensino Fundamental.

As falas das apresentações selecionadas foram transcritas e passaram por uma leitura flutuante, conforme orienta Bardin (2021), tomando um sentido primário, para posteriormente, por meio de um processo de verificação, encontrar os argumentos relacionados à questão de pesquisa. Com essa primeira organização do material foi realizada a codificação dos dados. Segundo Bardin, a fase de codificação "é o processo pelo qual os dados brutos são transformados sistematicamente e agregados em unidades, as quais permitem uma descrição exata das características pertinentes do conteúdo" (2021, p. 103).

A categorização é definida por Bardin, como "uma operação de classificação de elementos constitutivos de um conjunto, por diferenciação e, seguidamente, por reagrupamento segundo o gênero [...]" (2021, p. 117). Com base nas concepções de Ponte, Brocardo e Oliveira (2016), descritas parcialmente na seção anterior, foi elaborado um quadro inicial de categorias de análise, o qual foi modificado no decorrer da categorização dos dados, na medida em que estes apresentavam elementos não previstos nas versões anteriores, até assumir a forma de três blocos (Quadro 1). Esse tipo de procedimento é o que Bardin (2021) define como categorização a posteriori, quando aspectos relevantes surgem ao realizar-se a Análise de Conteúdo.

O Bloco 1 do Quadro de Categorias se refere a informações do problema investigado, tais como a origem, nível escolar e os conhecimentos matemáticos envolvidos. Uma investigação pode iniciar naturalmente durante a resolução de problemas ou exercícios de aula motivada por uma dúvida dos alunos, ou uma constatação qualquer. Pode também ser proposta ou induzida pelo professor, apresentando dados e resultados. Tais possibilidades caracterizam tipos diferentes de investigação matemática escolar. O Bloco 2 refere-se aos recursos materiais físicos ou virtuais utilizados como forma de manipulação, argumentação, visualização dos resultados, sobre os quais são propostas as conjecturas. O Bloco 3, por sua vez, consiste nas etapas de investigação, elencadas com base em Ponte, Brocardo e Oliveira (2016). Devemos lembrar que estas etapas não devem ser entendidas como passos a serem executados na ordem dada, nem tão pouco, com limites claramente estabelecidos entre uma e outra. Evidentemente, os processos investigativos são complexos e desordenados. No entanto, de modo geral, é possível que as ações de investigação escolar apresentem elementos de reconhecimento, exploração, proposição e formulação de conjecturas.

Quadro 1 – Categorias de Análise

Bloco 1 – Problema a ser investigado: a) Origem da atividade: proposta do professor; livro didático ou outros; iniciativa dos alunos; problemas de aula; exercícios de aula. b) Nível escolar: Ensino Fundamental I ou II; Ensino Médio; Ano escolar. c) Conceitos matemáticos envolvidos nas investigações.
Bloco 2 – Tipos de materiais utilizados nas investigações: a) Papéis, recortes, colagens. b) Dados numéricos e cálculos. c) Material de desenho: régua, compasso, transferidor. d) Objetos tecnológicos: calculadora, software, objetos virtuais de aprendizagem ou sites.
Bloco 3 – Etapas de investigação: a) Reconhecimento da situação b) Tipo de informações (concreta, dados, medidas, texto, ...). c) Exploração (experimentos empíricos ou numéricos, transcrição algébrica, verificação de casos particulares, ...). d) Formulação de conjecturas: questões, hipóteses, proposições, comparações, generalizações. e) Realização de testes das conjecturas: empíricos, dados, medições, contraexemplos. f) Re-elaboração de conjecturas: linguagem oral, escrita natural, escrita simbólica. g) Justificação e tipos de argumentação: casos particulares.

Fonte: Elaborado pelos autores.

A interpretação das falas e imagens implica nelas identificar os temas das categorias: “Classificar elementos em categorias impõe a investigação do que cada um deles tem em comum com os outros. O que vai permitir o seu agrupamento é a parte comum existente entre eles” (BARDIN, 2021, p. 148).

Para finalizar a Análise de Conteúdo, temos o tratamento dos resultados, inferências e interpretação - que consiste em realizar técnicas para a organização dos resultados e todas as informações coletadas - buscando assim, significação para o tema proposto (BARDIN, 2021). Nessa etapa, após uma ampla análise dos dados a partir da interpretação e inferência do conteúdo, o pesquisador focalizará na organização dos resultados mais significativos e pertinentes.

5 Descrição e análise das atividades

O Professor, participante do nosso estudo, aprecia o ensino reflexivo da matemática, pois se dedicou a elaborar um OVA com o propósito de mostrar aos seus alunos, de maneira prática e sem prender-se a cálculos tediosos, uma extensão do Teorema de Pitágoras. A atividade exploratória apresentada por ele, foi concebida para ser aplicada no 9º ano do Ensino

Fundamental.

A transcrição das falas foi revista de forma analítica, com o propósito de identificar elementos do Quadro de Categorias (Quadro 1) e buscar respostas para o problema de pesquisa. Na presente seção, mostramos o resultado dessa análise, apresentando fragmentos das falas e identificando o código da categoria. Por exemplo: (3d) significa grupo de categorias 3 (Possibilidades de investigação) e subcategoria d (Formulação de conjecturas). Eventualmente, registramos ainda uma breve justificativa do enquadramento da manifestação na categoria.

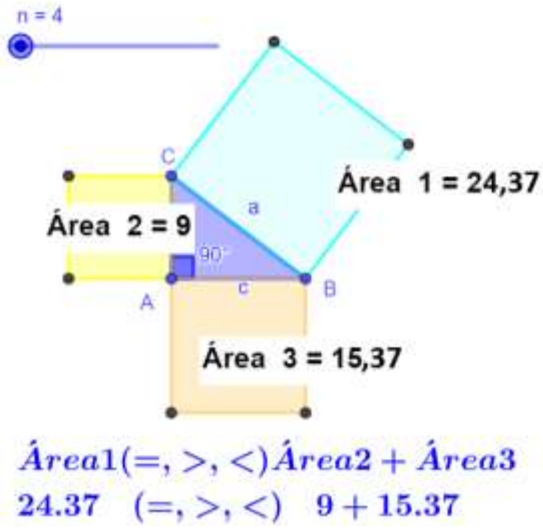
A fala do Professor é referente à investigação de uma conjectura do Teorema de Pitágoras, cujo material didático é um OVA, construído no software GeoGebra, que disponibiliza a visualização das representações geométrica e numérica dos resultados, de forma prática e dinâmica. Particularmente, o software calcula as áreas dos polígonos regulares, cujos lados coincidem com os lados do triângulo retângulo, e compara a soma das áreas dos polígonos gerados pelos catetos com a área do polígono gerado pela hipotenusa.

O OVA possibilita que o estudante escolha o número de lados dos polígonos, $n = 4, 5, 6, \ldots, 25$, a partir de um controle deslizante, apresenta a visualização do triângulo com os polígonos gerados e ainda, compara as áreas destes, em tela, conforme observa-se nas Figuras 1 e 2.

O Professor inicia sua fala explicitando o que pensa sobre o ensino do Teorema de Pitágoras, expresso como equivalência de áreas de quadrados e a expansão dessa ideia para a equivalência de áreas de polígonos regulares, que chamaremos, neste texto, de Conjectura 1, expressa em linguagem natural.

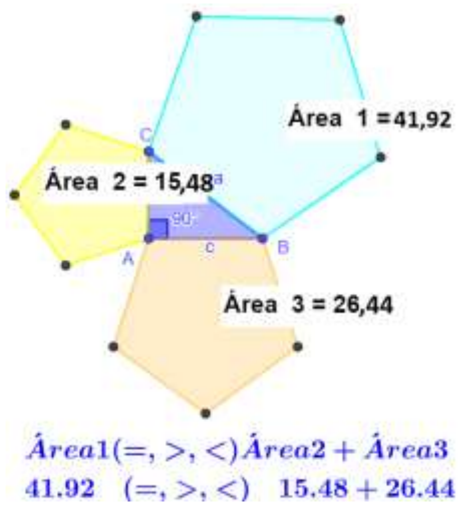
> *Professor: Normalmente quando se apresenta o Teorema de Pitágoras, ele tem uma **vasta quantidade de demonstrações, mas, para mim, pelo menos, quando eu dou as explicações** ele tá voltado para a questão de compreensão de igualdade de área. No objeto virtual de aprendizagem que eu teria feito, eu teria criado o triângulo, teria feito a exibição de áreas e aí, normalmente, a gente demonstra ele com quadrados sendo construídos sobre os lados do triângulo retângulo. Neste caso, eu, neste objeto, teria a intenção de mostrar que este Teorema também funciona quando a gente pega qualquer polígono regular.*

Figura 1 – Representação usual para a verificação do Teorema de Pitágoras



Fonte: Dados da pesquisa do Professor

Figura 2 – Representação com polígonos regulares para a verificação do Teorema de Pitágoras



Fonte: Dados da pesquisa do Professor

A motivação inicial para a criação do OVA é evidente na última frase do recorte da fala do Professor: *despertar o interesse pelo assunto* (1a, o professor propõe o problema e a conjectura 1), *e mostrar aos estudantes que ela realmente funciona* (3e, testagem da conjectura 1 para diferentes polígonos). O Professor tem, claramente, o objetivo de provocar a constatação da veracidade de sua conjectura. O entendimento é facilitado pela visualização, praticamente instantânea, da transformação das áreas, na medida em que o professor altera o número de lados dos polígonos, possibilitada pelo OVA. Do ponto de vista didático, há uma otimização do tempo escolar, o que torna a investigação possível de ser realizada em classe.

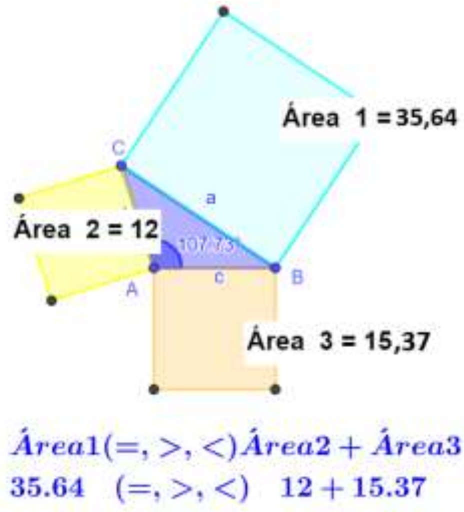
A notação algébrica (equações ou inequações) - mostrada nas Figuras 1 e 2 - também auxilia nessa investigação, pois o estudante pode fazer a operação de adição das áreas construídas sobre os catetos e comparar com a área do polígono construído sobre a hipotenusa.

Com o controle deslizante, o estudante pode ser incentivado a observar a manutenção da conjectura. Por mais que sejam vários testes particulares (3g, indução matemática, casos particulares/generalização), a generalização para qualquer número de lados, parece um passo lógico natural e aceitável, como se percebe no extrato da fala do Professor.

> *Professor: [...] as áreas vão se alterando então o estudante poderia verificar que a soma das áreas, desde que eu tenha um triângulo retângulo, vão exatamente fechar o valor, quer dizer: a área da figura construída sobre a hipotenusa vai ser igual a soma das áreas construídas sobre os catetos.*

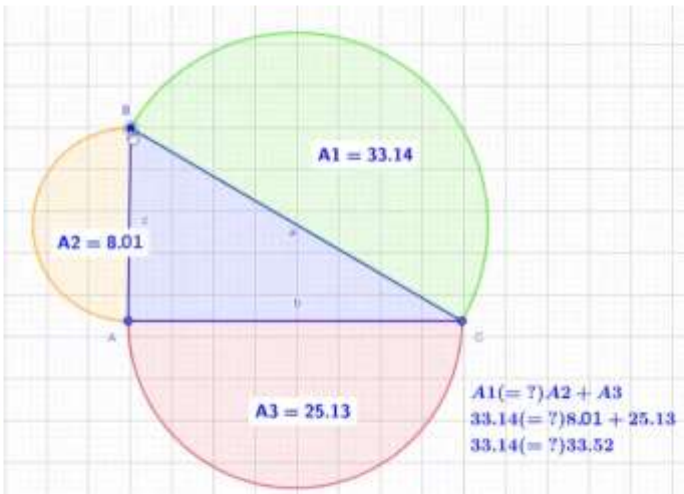
Nesse momento da investigação, observa-se uma reelaboração da forma original do Teorema de Pitágoras (3f), na qual o quadrado do lado, que significa a área de um quadrado, é substituído pela expressão “área da figura”, que significa a área do polígono regular. (3d, formulação de conjectura). Todo esse processo ocorre em linguagem oral natural (3f), mediado pelos recursos tecnológicos (2d). Num segundo momento, o Professor explora a função de arrastar ou mover o ponto “C” (Figura 3). A intenção é que o estudante observe o que acontece com as áreas, quando o triângulo não é retângulo.

Figura 3 – Verificação da Conjectura 1



Fonte: Dados da pesquisa do Professor

Figura 4 – Verificação da Conjectura 4 para triângulos não retângulos



Fonte: Dados da pesquisa do Professor

> *Professor*: [...] *para verificar que, quando o triângulo não é retângulo, essa operação da soma das áreas não fecha numa igualdade* [...]. *Então ele pode movimentar um vértice e vai observar que não forma mais uma igualdade. Ele tem liberdade para movimentar a figura e pode perceber o que acontece. Inclusive definindo se o triângulo é ou não é retângulo por essa observação.*

Observamos que a movimentação do ponto C (3c) e a investigação de casos particulares (3e) levou a mais uma constatação (3d): a Conjectura 1 só é válida para triângulos retângulos. Essa restrição pode ser agregada na redação da Conjectura 1, a qual poderia ter a seguinte forma (3f, linguagem natural):

Conjectura 1: Dado um triângulo retângulo em que *a* é a hipotenusa e *b* e *c* são os catetos, a área do polígono regular, cujos lados são congruentes com a hipotenusa, é equivalente à soma das áreas dos polígonos regulares, cujos lados são congruentes com os catetos.

Nesse estágio da investigação, a comunicação que ocorre é na forma oral, em linguagem natural (3f, linguagem oral) e, provavelmente, também seria se a atividade fosse aplicada em classe. Porém, observa-se a necessidade de tornar a comunicação mais ágil, mediante uma representação simbólica da Conjectura 1, usando notação algébrica, por exemplo. (3f, linguagem algébrica):

Conjectura 1: Dado um triângulo retângulo em que a é a hipotenusa e b e c os catetos, então

$$A_a = A_b + A_c \tag{1}$$

onde A_a, A_b e A_c são as áreas dos polígonos regulares, cujos lados são a hipotenusa a, o cateto b e o cateto c, respectivamente.

Se esse procedimento fosse realizado, seria uma reelaboração da Conjectura 1, a qual vai aperfeiçoando-se a cada nova constatação dos experimentos, para dar conta da clareza e precisão da linguagem. É o caso das duas novas conjecturas, que podem ser propostas a partir dos resultados obtidos com a translação do ponto C, com o auxílio de critérios da classificação de triângulos.

Conjectura 2: Dado um triângulo acutângulo de lados a, b e c , e $a > b$ e $a > c$ então

$$A_a < A_b + A_c \tag{2}$$

Conjectura 3: Dado um triângulo obtusângulo de lados a, b e c , e $a > b$ e $a > c$ então

$$A_a > A_b + A_c \tag{3}$$

Uma expansão da Conjectura 1 (3d) proposta pelo Professor, substitui os polígonos por semicírculos, cujos raios são a metade dos lados do triângulo retângulo, como ilustra a Figura 4, evoluindo para a redação de uma Conjectura 4, expressa na Eq. (4).

Conjectura 4: Dado um triângulo retângulo em que a é a hipotenusa e b e c os catetos, então

$$C_a = C_b + C_c \tag{4}$$

onde C_a, C_b e $C_c$são as áreas dos semicírculos, cujos diâmetros são a hipotenusa a, o cateto b e o cateto c, respectivamente.

Observamos que o processo investigativo pode se estender enquanto houver curiosidade, tempo e disposição dos investigadores. Vários problemas, em diferentes níveis escolares, poderiam ser formulados, como por exemplo: Existe algum outro tipo de figuras geradas a partir dos lados do triângulo retângulo cujas áreas mantêm a ideia da Conjectura 1? A Conjectura 1 seria válida também para fractais? É possível reunir/agrupar todas essas conjecturas em apenas uma (3g)?

As respostas para essas perguntas transcendem os testes numéricos (3g) e requerem argumentações simbólicas. Particularmente, para a Conjectura 1 da Eq. (1), podemos generalizá-la para todos os polígonos regulares, mediante a seguinte consideração: Qualquer polígono regular de *n* lados *l*, pode ser decomposto em *n* triângulos isósceles. Um dos vértices de cada um desses triângulos está no centro do polígono. Nos outros dois vértices os ângulos são côngruos (o triângulo é isósceles) e podemos chamá-los de ∝ (alfa). A altura correspondente ao lado *l* pode ser obtida pela Eq. (5):

$$h = \frac{1}{2} l \cdot tg(\propto) \tag{5}$$

onde *h* é altura do triângulo isósceles.

Assim, a área de qualquer polígono regular é dada pela Eq. (6)

$$A_n = \frac{nl^2 tg(\propto)}{4} \tag{6}$$

onde A_n é a área do polígono e *n* o número de lados.

Aplicando a Eq. (6) para os polígonos gerados pelos lados *a*, *b* e *c* do triângulo retângulo, obtém-se:

$$\frac{na^2 tg(\propto)}{4} = \frac{nb^2 tg(\propto)}{4} + \frac{nc^2 tg(\propto)}{4} \tag{7}$$

onde *a*, *b* e *c* são as medidas dos lados dos triângulos.

Após as devidas simplificações, obtém-se novamente a relação pitagórica e assim, justifica-se porque ela é válida para qualquer polígono regular.

Procedimento semelhante pode ser implementado para o caso dos semicírculos da Eq. (4) obtendo-se o mesmo resultado. Essa demonstração algébrica, leva a concluir que qualquer figura, cujas áreas sejam proporcionais ao quadrado de um de seus lados, satisfará a relação pitagórica, como segue:

$$ka^2 = kb^2 + kc \tag{8}$$

onde *k* é uma constante de proporcionalidade.

Evidentemente, esse tipo de demonstração seria mais viável para Ensino Médio e Superior, mesmo que os conceitos e as operações sejam todos elementares. A construção da argumentação - assim como o seu caráter de generalização e o registro simbólico - pode estar além do escopo do Ensino Fundamental. Mesmo assim, entendemos que colocá-la como uma possibilidade é pertinente porque constitui a ação última da investigação matemática, que é a demonstração das conjecturas.

6 Considerações finais

Ao retomar o problema de estudo, com base na análise das considerações da seção precedente, podemos, finalmente, apontar as características da atividade proposta pelo Professor, assim como as extrapolações dela, utilizando as possibilidades da Imaginação Pedagógica de Skovsmose (2015), como um recurso prático e específico para trabalhar a investigação matemática.

A investigação como um processo induzido pelo professor: uma investigação de caráter exploratório, partiria de dados, questões ou problemas (tais como as investigações com quadros de números, ou das representações geométricas apresentadas em Ponte, Brocardo e Oliveira (2016), por exemplo) sobre os quais, os estudantes poderiam investigar a seu modo, com auxílio do professor. Na atividade em análise, o processo é mais induzido, uma vez que tem um objetivo explícito: a verificação de uma conjectura proposta pelo professor. Nesse caso, o caráter exploratório (reconhecimento da situação) fica minimizado, porém a indução não anula a investigação matemática, apenas direciona ações, apontando caminhos conhecidos pelo professor, para que a investigação seja possível nas condições de espaço e tempo escolares.

Evidentemente, a indução do processo investigativo é uma adaptação pedagógica do modo de pesquisar dos matemáticos profissionais, em que o problema e os meios de pesquisas são fornecidos, restando a experimentação, a observação e a síntese das proposições para o grupo de alunos elaborar, como pode-se observar na análise de possibilidades discutida na seção anterior. Não se trata de "[...] trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína [...]", conforme ponderam Ponte; Brocardo; Oliveira, 2016, p. 23), mas de tornar possível trazer elementos dessa atividade nas condições de tempo e experiência em investigações de estudantes e professores.

O OVA como instrumento de investigação: para além das afinidades que os estudantes do século XXI têm com as tecnologias, o que constitui por si só um motivo para incluí-las nas atividades escolares, o OVA elaborado pelo Professor teve uma função decisiva para o êxito da investigação proposta. Tal objeto construído no software GeoGebra, viabilizou o entendimento geométrico com a possibilidade que ofereceu para visualizar e representar as figuras (SCHEFFER; FINN; ZEISER, 2021). A linha de argumentação sobre a validade da conjectura foi o teste de casos particulares. Para isso, seria necessário calcular áreas de vários polígonos regulares, tarefa tediosa e cansativa, que talvez os estudantes do Ensino Fundamental não pudessem realizar. O software GeoGebra possibilitou a resolução desse problema com agilidade, precisão e, ainda, permitiu a visualização das figuras em tela, criando um ambiente de experimentação e análise de resultados, que poderá incentivar os estudantes a generalizar a conjectura para polígonos de n lados. Essa generalização e a elaboração da conjectura, entendemos, não são resultados do software, mas da reflexão dos pesquisadores.

A transformação/elaboração das conjecturas ao longo do processo de investigação: procuramos mostrar a possibilidade de evolução da Conjectura 1 para as outras (polígonos, semicírculos, triângulos retângulos) como resultado da investigação, na medida em que novos dados e resultados exigem novas formas de expressar as conjecturas. Inicialmente, no momento de apresentar a proposta de investigação, a linguagem natural e a visualização em tela eram suficientes para o diálogo sobre o assunto. No entanto, ao distinguir uma conjectura da outra, fez-se necessário nomear as conjecturas e escrevê-las, inicialmente em texto e depois usando símbolos matemáticos. Entendemos, que essa transformação da linguagem é própria do processo de investigação matemática como registro do nascimento, da criação e da transformação das proposições, em oposição à noção de "matemática pronta", própria de alguns livros didáticos. Consideramos que ensinar elaborando conceitos e conjecturas altera a concepção da matemática como algo definitivo criado por gênios, para um conhecimento em transformação, possível de ser realizado por não matemáticos, que se dediquem a refletir sobre as propriedades das coisas e fatos.

A justificação das conjecturas: a atividade proposta pelo Professor tem - como característica de investigação - a verificação da Conjetura 1 para casos particulares e a indução de que seja válida para casos gerais. Inicialmente, foi verificada para alguns polígonos regulares, generalizada para qualquer polígono regular e, depois, com a Conjectura 4, para semicírculos. Os testes de casos particulares são fundamentais e necessários para as fases de exploração, elaboração ou criação das conjecturas e, talvez, sejam suficientes para certos níveis de escolaridade, devido à capacidade de abstração dos estudantes, como nas séries iniciais e no Ensino Fundamental. Mesmo em cursos superiores, nos quais a matemática está presente como ciência básica, a verdade das proposições é simplesmente admitida, ou verificada para casos particulares, sem preocupação com demonstrações formais, uma vez que o interesse é, meramente, de aplicação. De fato, as demonstrações formais são os objetos de investigação matemática usuais e aceitos pela comunidade de matemáticos. Nelas, porém, a validação de casos particulares não garante a validação para qualquer caso. Na atividade analisada, complementamos a proposta do Professor com as Conjecturas 2, 3, 4, uma conjectura e demonstração de generalização. Para isso, foi necessário abandonar a linguagem natural e usar símbolos matemáticos, o que tornou o texto mais ágil e preciso. Entendemos que esse processo é de investigação matemática porque contém todas as suas fases, expressas no Bloco 3 do Quadro de Categorias.

Com esta análise, mostramos que uma atividade de extensão, proposta por um professor que conhece e está habituado com o espaço escolar, tem características próprias de investigação matemática (problema, testes, formulação de conjecturas, indução) e pode ser ampliada para que outras características (linguagem simbólica, generalização, dedução e demonstração) possam incrementar o nível de investigação escolar.

O Curso de Formação em parceria SBEM-UFFS Campus de Chapecó SC, por sua vez, foi relevante para os professores, pois a partir da produção do OVA, eles perceberam as potencialidades dos recursos tecnológicos e as transformações pedagógicas decorrentes do seu uso (FINN; SCHEFFER, 2020). Além disso, a formação proporcionou momentos de reflexão, que viabilizaram a superação de dificuldades, em relação ao domínio das tecnologias digitais.

Avaliamos que a aplicação efetiva desse tipo de atividade em diferentes contextos escolares pode dar uma noção mais concreta da potencialidade de aprendizagem da matemática via processos investigativos, o que deixamos como sugestão para trabalhos futuros sobre o tema.

Referências

AGUILAR JUNIOR, Carlos Augusto; NASSER, Lilian**.** Estudo sobre a Visão do Professor em Relação à Argumentação e Prova Matemática na Escola. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 28, n. 50, p. 1012-1031, dez. 2014.

ALMEIDA, Willa Nayana Corrêa.; MALHEIRO, José Manuel da Silva. A argumentação e a experimentação investigativa no ensino de matemática. **Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia,** Florianópolis, v. 11, n. 2, p. 57-83, nov. 2018. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/alexandria/article/view/1982-5153.2018v11n2p57. Acesso em: 15 out. 2022.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** 4ª edição. Campinas, SP: UNICAMP, 2004.

FERRUZZI, Elaine Cristina; COSTA, Juliana Aparecida Alves. Investigação Matemática e seu aporte para a Aprendizagem. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, Curitiba, v. 11, n. 3, p. 296-311, set./dez. 2018. Disponível em: https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/6058**.** Acesso em: 14 out. 2022.

FINN, Gabriela; SCHEFFER, Nilce Fátima. As políticas educacionais e tecnologias digitais na matemática, **EMSF - Revista Educação Matemática Sem Fronteiras**, Chapecó (SC), v. 2 n.2 (2020), p. 113-133. Disponível em: https://periodicos.uffs.edu.br/index.php/EMSF/article/view/11764/7744. Acesso em: 31out.2022.

GRANDO, Neiva Inês; BALKE, Marlova Elizabete. Investigação matemática na sala de aula: tratamento da informação no ensino fundamental. **Zetetiké**, Campinas, v. 21, n. 2, p. 9-35, jul./dez, 2013. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646586. Acesso em: 14 out. 2022.

NUNES, José Messildo Viana; ALMOULOUD, Saddo Ag. A. O modelo de Toulmin e a análise da prática da argumentação em Matemática. **Educação Matemática Pesquisa,** v. 15, n. 2, p. 487-512, ago., 2013. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/14592. Acesso em: 15 out. 2022.

PONTE, João Pedro; BROCARDO, Joana Brocardo; OLIVEIRA, Helia**. Investigações matemáticas na sala de aula.** 3ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2016.

SCHEFFER, Nilce Fátima; FINN, Gabriela; ZEISER, Mateus Henrique. Tecnologias digitais na área de matemática da Política Educacional da BNCC: reflexões para o ensino fundamental, **ENCITEC - Ensino de Ciências e Tecnologia em Revista**, Santo Ângelo (RS), v. 11, n. 2., p. 119-131, mai./ago. 2021. Disponível em: http://dx.doi.org/10.31512/encitec.v11i2.440. Acesso em: 31 out. 2022.

SKOVSMOSE, Ole. Cenários para Investigação. **Bolema,** Rio Claro, v. 13, n. 14, 2000 p. 66-91. Disponível em: https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/10635. Acesso em: 23 out. 2022.

SKOVSMOSE, Ole. Pesquisando o que não é, mas poderia ser. In: D´AMBRÓSIO, B.S.; LOPES, C.E. (orgs.). **Vertentes da subversão na produção científica em educação matemática**. Campinas: Mercado de Letras, 2015, p. 63-90.

VARGAS, Andressa Franco.; LARA, Débora da Silva; LEIVAS, José Carlos Pinto. Investigação Matemática como recurso metodológico para o ensino de geometria nos anos iniciais. **Revista Insignare Scientia**. Cerro Largo, v. 2, n. 4, p. 258-277, dez. 2019. Disponível em: https://periodicos.uffs.edu.br/index.php/RIS/article/view/10978. Acesso em: 14 out. 2022.