Sociedade Brasileira de Educação Matemática

emr

Uma Experiência com Tarefas Matemáticas Abordando Paradoxos de Zenão no Ensino Médio

Mairon Carliel Pontarolo[1]
Ronaldo Theodorovski[2]
André Luis Trevisan[3]
Sebastião Romero Franco[4]

Resumo: Neste texto, relatamos uma prática de ensino no Ensino Médio, a partir do trabalho com duas tarefas matemáticas, envolvendo o tema "paradoxos". Assumimos, que a partir deste contexto, é possível explorar intuitivamente o conceito de Progressão Geométrica e a soma dos seus infinitos termos. Contextualizamos os paradoxos no âmbito da Matemática, mais especificamente os Paradoxos de Zenão, e uma forma de incorporá-los às tarefas propostas. Relatamos, então, a experiência da aplicação da tarefa com alunos do 1º e 2º ano do Ensino Médio, concluindo que essa dinâmica envolvendo paradoxos e Progressões Geométricas fomentou o interesse, gerando debates e reflexões com profundidade, deixando indicativos de como este estudo pode contribuir para a Educação Matemática.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Tarefas Matemáticas. Ensino Médio. Progressão Geométrica. Paradoxos de Zenão.

An Experience with Mathematical Tasks Addressing Zeno's Paradoxes in High School

Abstract: In this text, we report a teaching practice in High School based on the work with two mathematical tasks involving the theme "paradoxes." We assume that in this context, it is possible to intuitively explore the concept of Geometric Progression and the sum of its infinite terms. We contextualize paradoxes in the scope of Mathematics, more specifically Zeno's Paradoxes, and a way to incorporate them into the proposed tasks. Then we report the experience of applying the task to 1st and 2nd-year High School students, concluding that this dynamic involving paradoxes and Geometric Progressions fostered interest, generating debates and reflections with depth, leaving indications on how this study can contribute to Mathematics Education.

Keywords: Mathematics Education. Mathematical Tasks. High School. Geometric Progression. Zeno's Paradoxes.

Un experimento con tareas matemáticas sobre las paradojas de Zenón en secundaria

Resumen: En este trabajo de investigación, reportamos una práctica docente en la escuela secundaria basada en el trabajo con dos tareas matemáticas que involucran el tema de "paradojas" de Zenón. Asumimos que a partir de este contexto, es posible explorar intuitivamente el concepto de Progresión Geométrica y la suma de sus términos infinitos. Contextualizamos las paradojas en el ámbito de las Matemáticas, más específicamente las Paradojas de Zenón, y una forma de incorporarlas a las tareas propuestas. Luego informamos sobre la experiencia de aplicar la tarea a estudiantes de 1er y 2do año de

[1] Mestrando em Matemática Pura e Aplicada. Universidade Federal de Santa Catarina/UFSC, Florianópolis, SC, Brasil, E-mail: maironcpontarolo96@gmail.com – Orcid: https://orcid.org/0009-0002-9114-9080
[2] Doutorando em Ensino de Ciência e Tecnologia. Universidade Tecnológica Federal do Paraná/UTFPR, Ponta Grossa, PR, Brasil, E-mail: theodorovski@unicentro.br – Orcid: https://orcid.org/0000-0001-5522-2100
[3] Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Universidade Tecnológica Federal do Paraná/UTFPR, Londrina, PR, Brasil. E-mail: andrelt@utfpr.edu.br – Orcid: https://orcid.org/0000-0001-8732-1912
[4] Doutor em Métodos Numéricos em Engenharia. Universidade Estadual do Centro-Oeste/UNICENTRO, Irati, PR, Brasil, E-mail: romero@unicentro.br – Orcid: https://orcid.org/0000-0002-4580-5924

la escuela secundaria, concluyendo que esta dinámica que involucra paradojas y Progresiones Geométricas fomentó el interés, generando debates y reflexiones con profundidad, dejando indicaciones de como este estudio puede contribuir a la Educación Matemática.

Palabras clave: Educación Matemática. Tareas Matemáticas. Escuela secundaria. Progresión geométrica. Paradojas de Zenón.

1 Introdução

Neste texto, relatamos uma prática de ensino no Ensino Médio, a partir do trabalho com duas tarefas matemáticas que envolviam o tema "paradoxos". O poder que os paradoxos têm de levar a pensar, diante de situações que contrariam a lógica e propiciam refletir sobre situações que grandes pensadores já se depararam, desafia os estudantes e permite que cresçam intelectualmente. Além disso, o trabalho com resolução de tarefas, em especial aquelas com alto grau de demanda cognitiva, oportuniza aos estudantes desenvolver a capacidade de pensar e raciocinar, contribuindo para o desenvolvimento da autonomia (Jesus; Cyrino; Oliveira, 2018).

Essencialmente, tarefas matemáticas são elaboradas e propostas pelo professor, mas cabe aos alunos interpretarem-nas e, possivelmente, originar atividades diversas (Ponte, 2014). Para o autor, cada tipo de tarefa exerce um papel diferente na aprendizagem dos alunos. Tarefas de caráter mais desafiador, em especial, são imprescindíveis para a efetiva experiência matemática dos estudantes, colaborando para o desenvolvimento de competências pessoais dos alunos, como autonomia e capacidade de lidar com situações complexas (Ponte, 2005).

Ponte (2005) também menciona que as tarefas podem contemplar contextos de realidade, mas podem ser em termos puramente matemáticos. Há também um terceiro contexto, designado "semi-realidade", sendo este mais comum em aulas de Matemática e nosso foco neste artigo.

Considerando esses diferentes propósitos do trabalho com tarefas matemáticas, optamos por utilizá-las em uma turma do Ensino Médio para trabalhar com a soma dos termos de Progressão Geométrica (PG) infinita, articulando com noções intuitivas de limite, a partir de paradoxos de Zenão.

2 Paradoxos

A origem etimológica da palavra paradoxo, que significa "contrária a opinião", é grega ($\pi\alpha\rho\alpha\delta o\xi o\nu/paradoxon$), sendo uma composição entre o prefixo $\pi\alpha\rho\alpha$ (para), que significa "contra" ou "juntamente", com o sufixo $\delta o\xi o\nu$ (dóxa), que significa "opinião" (Balieiro Filho, 2010). Nesse sentido, paradoxo pode ser considerado como aquilo que se opõe ao que se acredita.

De acordo com o dicionário Michaelis de Língua Portuguesa (2015, s.p.), “paradoxo é uma opinião ou proposição contrária ao senso comum; contrassenso, disparate. Falta de coerência ou de lógica [...]”, ou ainda, “certo tipo de pensamento que contraria os princípios que costumam nortear o pensamento humano ou desafia o conhecimento e a crença da maioria dos seres humanos”.

Para Balieiro Filho (2010, p. 1753)

> [...] há quatro acepções principais e distintas de paradoxos: 1) afirmações aparentemente falsas, porém que na realidade são verdadeiras; 2) afirmações aparentemente verdadeiras, porém que na realidade são falsas; 3) afirmações impossíveis de classificar como verdadeiras ou falsas; 4) encadeamentos de raciocínio aparentemente inatacáveis, porém que na realidade levam a contradições lógicas (afirmações desse tipo são denominadas falácias).

No âmbito da Matemática, os paradoxos assumiram suma importância em seu desenvolvimento, pois “na busca de solução para o desamparo lógico que eles causavam é que foi desenvolvido o rigor matemático, em especial na área da lógica, bem como muitas outras ideias matemáticas” (Monteiro; Mondini, 2019, p.32).

A ideia de infinito, em especial, é abstrata, contrária à intuição, e carregada de complexidade, por isso, sempre causou incômodo para os filósofos e matemáticos que buscaram compreendê-la. O conceito de infinito originou intensas reflexões filosóficas e desencadeou vários paradoxos ao longo da história da Matemática (Monteiro; Mondini, 2019).

> Para os matemáticos gregos, que não tinham uma real concepção de convergência em particular para o infinito, estes raciocínios eram incompreensíveis. Aristóteles considerou-os e resolveu pô-los de parte, ficando ao “abandono” por quase 2500 anos. Hoje, com o desenvolvimento da Matemática, nomeadamente no estudo de somas infinitas e de conjuntos infinitos, estes Paradoxos podem ser explicados de um modo razoavelmente satisfatório. Mas ainda agora, o debate continua sobre a validade dos Paradoxos e as suas racionalizações (Monteiro, 2008, p.12).

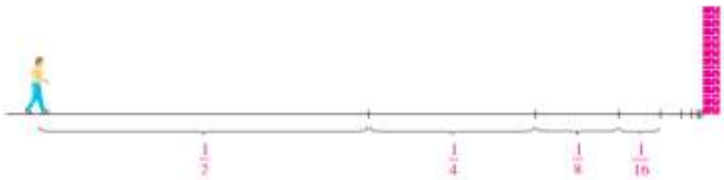
Quine (1976) estabelece uma classificação dos paradoxos, a saber: paradoxos falsídicos (proposições aparentemente verdadeiras, no entanto falsas), paradoxos verídicos (proposições aparentemente falsas, no entanto verdadeiras) e antinomias (afirmações impossíveis de ser classificadas como falsas ou verdadeiras). Os paradoxos falsídicos são aqueles cujos argumentos são aparentemente consistentes, porém que nos levam a conclusões absurdas.

Os paradoxos de Zenão, foco deste trabalho, são considerados falsídicos, pois partem de argumentos que parecem consistentes, mas chegam à conclusão que remete a impossibilidade do movimento (Monteiro; Mondini, 2019). De acordo com Monteiro e Mondini (2018), os paradoxos de Zenão são os primeiros de que se tem conhecimento e são provenientes da primeira fase da era pré-socrática, por volta de 450 a.C. na cidade de Eleia, atualmente conhecida como Vélia, na Itália. São eles que contextualizam o infinito e a impossibilidade de movimento (Rodrigues, 2009).

Zenão foi o discípulo mais conhecido de Parmênides[5], e acredita-se que ele nasceu por volta de 489 a. C.. Sabe-se muito pouco sobre a vida de Zenão, entretanto várias referências sobre ele aparecem nas obras de Platão[6].

O primeiro paradoxo de Zenão (*dicotomia*) sugere que uma pessoa não pode se locomover até um ponto. Para fazer isso ela deveria percorrer metade da distância, depois a outra metade da distância, depois a metade da distância restante e, então, novamente a metade da distância que resta e assim por diante. Dessa maneira, o deslocamento ocorrerá indefinidamente e não terá fim. Os sucessivos deslocamentos que o indivíduo deve realizar estão indicados na Figura 1.

Figura 1 – Sucessivos deslocamentos do indivíduo.



Fonte: Stewart (2014, p. 33).

Nessa época, Zenão pensava em dividir a distância total a ser percorrida em infinitos segmentos, sendo a distância total a soma desses infinitos segmentos. Porém, ainda não existia a ideia de soma de série ou PG infinita para chegar na conclusão desejada. Na prática sabemos que a pessoa pode chegar até o ponto desejado. Ademais, o deslocamento pode ser representado por uma PG infinita $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32} \ \ldots\right\}$.

De acordo com Stewart (2014, p. 33):

[5] Parmênides foi um filósofo grego, nascido em Eleia por volta de por volta de 515 a.C. É considerado o principal pensador da escola eleata, desenvolvendo ideias que foram base para a filosofia platônica.

[6] Platão é considerado como um dos principais filósofos e pensadores da história da filosofia. Acredita-se que ele nasceu no ano 427 a.C. em Atenas. Seu verdadeiro nome era Arístocles, ficou conhecido como Platão devido a um adjetivo grego, usado para caracterizar uma pessoa que possui "ombros largos".

Zenão argumentava que não fazia sentido somar um número infinito de números. Porém, há situações em que fazemos implicitamente somas infinitas. Por exemplo, na notação decimal, o símbolo, $0,\overline{3} = 0{,}33333 \ldots$ significa $\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \cdots$ dessa forma, em algum sentido, deve ser verdade que $\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \cdots = \frac{1}{3}$.

Hoje sabemos que a distância total pode ser obtida pela soma dos infinitos termos da PG com $a_1 = \frac{1}{2}$ e $r = \frac{1}{2}$. Desse modo,

$$d = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1.$$

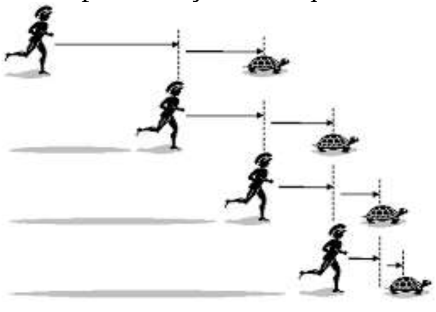
Do ponto de vista lógico, o

> [...] paradoxo da dicotomia ataca o fato do espaço ser infinitamente divisível, pois apresenta um raciocínio que, partindo dessa ideia, chega-se à impossibilidade do movimento. Pode-se apontar como falha nesse paradoxo o fato de se tratar distância infinitamente divisível como distância infinita, isto é, entre dois pontos não se tem distância infinita, mas sim uma distância que se pode dividir indefinidamente (Rodrigues, 2009 p. 35).

As ideias estabelecidas por Zenão parecem fazer sentido. Todavia, quando analisadas sob a ótica da Matemática, baseada em conceitos de soma de PG infinita, as argumentações de Zenão se tornam falsas e evidenciam uma realidade paradoxal. Desse modo, esse paradoxo é falsídico.

O segundo paradoxo de Zenão refere-se a uma corrida entre o herói grego Aquiles e uma tartaruga, para a qual seria dada uma vantagem inicial. Zenão acreditava que Aquiles não poderia alcançar a tartaruga, pois: se Aquiles começa numa posição A_1 e a tartaruga numa posição t_1, quando Aquiles atingir $A_2 = t_1$ a tartaruga estará adiante, numa posição t_2. No momento em que Aquiles atingir $A_3 = t_2$, a tartaruga estará em t_3, e assim por diante. Esse processo ocorreria indefinidamente e, dessa forma, Aquiles jamais ultrapassaria a tartaruga. O procedimento da corrida de Aquiles e a tartaruga é apresentado na Figura 2.

Figura 2 – Representação de Aquiles e a tartaruga



Fonte: https://elaestaemtudo.ime.usp.br/?portfolio=new-mobile-app-2

Entretanto, essa ideia contraria o que se sabe na prática. Para Stewart (2014, p. 32), uma "forma de explicar esse paradoxo usa a ideia de sequência. As posições sucessivas de Aquiles e da tartaruga são respectivamente (A_1, A_2, A_3, ...) e (t_1, t_2, t_3,...), conhecidas como sequências".

Para este trabalho, optou-se em assumir que as velocidades de Aquiles e da tartaruga são constantes e que é conhecida a proporção entre elas. Assim, a diferença entre os pontos que Aquiles e a tartaruga estão em cada instante pode ser representada por uma PG, cujo primeiro termo é a vantagem inicial e a razão é a proporção entre as velocidades:

$$(A_1 - t_1, A_2 - t_2, A_3 - t_3, ...).$$

Conhecendo a PG, é possível fazer a soma de seus infinitos termos, sendo essa soma a distância que Aquiles deve percorrer para alcançar a tartaruga. Dessa forma, conclui-se que o paradoxo de Aquiles e a tartaruga é falsídico.

3 Proposta de duas Tarefas Matemáticas

Em consonância ao exposto, buscamos por intermédio dos paradoxos de Zenão elaborar duas tarefas matemáticas que contemplassem o conceito de soma infinita de PG, a primeira sendo uma adaptação do paradoxo da Dicotomia, e a segunda explorando o paradoxo de Aquiles e a tartaruga.

Tarefa 1: Suponha que você está diante da seguinte situação. Foi solicitado que você caminhe até um ponto localizado a 8*m* de distância. Mas, seguindo a condição: primeiramente você deve percorrer metade da distância, depois a metade da distância restante e, então, novamente a metade da distância que restou e assim por diante.

a) Como pode ser representado, em forma de sequência, o seu deslocamento? Essa sequência é finita ou infinita?

b) Seguindo dessa maneira, você conseguirá chegar no ponto determinado?

c) É possível fazer a soma dos termos da sequência descrita, ou a soma é infinita? Se for possível, argumente o raciocínio utilizado.

Tarefa 2: Certa vez, decidiram realizar uma corrida entre um fusca e uma Ferrari, a qual atinge uma velocidade 5 vezes maior. Pensando nisso, o fusca terá uma vantagem inicial de 1*km*. Se a Ferrari começa numa posição F_1 e o fusca numa posição f_1, quando a Ferrari atingir $F_2 = f_1$ o fusca estará adiante, numa posição f_2. No momento em que a Ferrari atingir $F_3 = f_2$, o fusca estará em f_3, e assim por diante seguindo o mesmo padrão.

a) Com base nessas informações, preencha o quadro abaixo com as posições de cada veículo.

Posição da Ferrari (*m*)	*Posição do fusca* (*m*)
0	1000
1000	1200
1200	1240

b) Muitos argumentaram ser injusta a vantagem inicial, pois acreditavam que dessa forma o fusca estaria sempre à frente da Ferrari. Você concorda com essa afirmação, ou acredita que em algum momento a Ferrari alcançará o fusca? Justifique.

c) Escreva a sequência numérica que representa as distâncias que a Ferrari percorre até chegar ao ponto em que o fusca estava a cada vez, depois calcule a soma dessa sequência.

d) Se você concorda que a Ferrari alcançará o fusca. Qual a distância percorrida para que isso aconteça?

4 Contexto da aplicação das Tarefas Matemáticas

A pesquisa em questão adota uma abordagem metodológica qualitativo-interpretativa (D'Ambrósio, 2004). Essa perspectiva é fortalecida pela ênfase na compreensão e interpretação de dados e discursos, especialmente quando envolve grupos de participantes (D'Ambrósio; D'Ambrósio, 2006). Os problemas investigados permitiram a realização de explorações, investigações e interpretações.

As tarefas matemáticas foram resolvidas por 13 estudantes do 1º e 2º anos do Ensino Médio, participantes do Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC)[7], no qual o primeiro autor, sob supervisão dos demais, atuou ministrando aulas como acadêmico de Licenciatura em Matemática, no ano de 2021, na modalidade de ensino remoto, em reunião *online*.

Em geral, eram estudantes que se destacavam em Matemática e já possuíam certa

[7] Programa de Iniciação Científica Jr. (http://www.obmep.org.br/pic.htm).

afinidade com a disciplina, dois deles sendo medalhistas na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). Entretanto, os participantes possuíam pouco ou nenhum conhecimento formal prévio sobre PG, pois na escola que estudam o tema é tratado no 3° ano do Ensino Médio. Para a realização das tarefas, os participantes foram divididos em 4 grupos, cuja divisão se deu pela própria escolha dos participantes.

Canavarro, Souza e Menezes (2012) discutem que o Ensino Exploratório fundamentado em tarefas matemáticas deve passar por quatro fases: 1) introdução da tarefa; 2) realização da tarefa; 3) discussão da tarefa, e 4) sistematização dos conceitos matemáticos.

A primeira fase, na qual os estudantes e o professor estavam em uma mesma sala online, consistiu em estabelecer um contato inicial dos alunos com as duas tarefas, explicando a dinâmica e combinando o tempo para a realização. Na segunda fase, os grupos de estudantes foram separados em quatro salas temáticas, para a resolução, que teve duração de aproximadamente 1 hora/aula (50 min). Foi utilizado o *Google Docs* para que todos os integrantes, além de debater, pudessem também editar as respostas. Almejou-se sempre promover diálogo, no intuito que todos pudessem colaborar e contribuir um com o outro. Durante a realização, houve grupos que interagiram bastante, possibilitando desencadear debates bastante construtivos. Nessa etapa, o professor visitou cada uma das salas, monitorando e observando as resoluções, sem interferir ao ponto de limitar as estratégias de resolução (Canavarro; Souza; Menezes, 2012).

Corroborando Canavarro, Souza e Menezes (2012), a terceira fase foi a de maior desafio para o professor, que precisou conduzir as discussões, escolhendo quais as resoluções que impulsionariam o debate e apresentavam uma diversidade de ideias. Na última fase, ocorreu a sistematização, em que o professor introduziu os conceitos matemáticos formalmente, em colaboração com os estudantes. Cabe destacar, que para esse momento da plenária e sistematização dos conteúdos, foi realizado também em 1 hora/aula.

5 Relato da discussão da Tarefa Matemática e sistematização dos conceitos

Na primeira questão, foi instigado que os participantes se colocassem numa situação em que eles deveriam se deslocar até um ponto localizado a 8 metros de distância. Todavia, seguindo a condição: primeiramente percorrendo a metade da distância, depois a metade da distância restante e, então, novamente a metade da distância que restou e assim por diante. Em seguida, pedia-se para que eles representassem em forma de sequência os deslocamentos e também respondessem se a sequência é finita ou infinita. Neste item as respostas foram similares em todos os grupos, remetendo à sequência $\left\{4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots\right\}$.

No item seguinte, os estudantes deparam-se com o primeiro paradoxo, ao indagá-los se, seguindo dessa maneira, seria possível chegar ao ponto desejado. Três dos grupos ficaram diante do impasse e concluíram que não seria possível chegar, justificando que sempre restaria uma distância, por menor que fosse e, ainda, argumentaram que chegaria um momento em que não haveria mais movimento.

Um dos grupos, porém, discordou, argumentando que "*seguindo a linha de raciocínio da sequência, ele não chegaria. Porém, usando o arredondamento seria a mesma coisa que chegasse no 8m*". Ademais, quando interrogados se seria possível somar os termos da sequência, o mesmo grupo afirmou que a soma possui infinitos termos, mas que a soma de todos eles resulta em 8. Os demais grupos, no entanto, disseram que não seria possível fazer a soma, já que a quantidade de termos era infinita, mas não aparentam estar convencidos.

Para incorporar o paradoxo de Aquiles e a Tartaruga à discussão, os grupos foram convidados a discutir a situação da segunda tarefa, a corrida de um Fusca e uma Ferrari. Todos os grupos preencheram corretamente o quadro dessa questão, semelhante aos valores apresentados no Quadro 1:

Quadro 1 – Posições da Ferrari e do fusca

Posição da Ferrai (*m*)	Posição do Fusca (*m*)
0	1000
1000	1200
1200	1240
1240	1248
1248	1249,6
1249,6	1249,92
1249,92	1249,984
1249,984	1249,9968
⋮	⋮

Fonte: Dados da pesquisa.

A partir disso, o professor perguntou qual era a opinião dos grupos em relação à vantagem inicial do fusca e, se dessa forma, a Ferrari o alcançaria. Dois grupos argumentaram que seguindo a tabela, a Ferrari jamais alcançaria o fusca, mas que, de acordo com sua intuição, alcançaria, já que a velocidade da Ferrari é 5 vezes maior. Um terceiro grupo, por sua vez, afirmou que a condição para haver a ultrapassagem seria que a diferença entre as distâncias fosse negativa, e que isso não poderia ocorrer. Um último grupo dizia que em algum momento a Ferrari alcançaria o fusca, haja vista que a velocidade é maior.

O segundo item dessa questão, solicitava que fosse escrita a sequência numérica das distâncias que a Ferrari percorre até chegar ao ponto que o fusca estava. Todos escreveram corretamente a sequência $\left\{1000, 200, 40, 8 -, \frac{8}{5}, \frac{8}{25}, \ldots\right\}$. Depois, deveriam calcular a soma dos termos da sequência. Dois grupos calcularam a soma apenas dos termos que decorrem das informações que apresentaram no quadro (item a da segunda tarefa). Um terceiro grupo considerou que a sequência é infinita e inferiu que a soma não poderia ser feita. Por fim, um grupo calculou que, de forma mais precisa, mesmo sem perceber, o resultado da soma $1000 + 200 + 40 + 8 + \frac{8}{5} + \frac{8}{25} + \cdots$, seria muito próximo de 1250.

Para finalizar a tarefa, foi solicitado a quem concordava com a hipótese da Ferrari alcançar o fusca que determinasse qual a distância necessária para que isso ocorra. Apesar de não usar a sequência, um dos grupos forneceu uma resposta bastante interessante: "*A Ferrari alcançará o fusca após percorrer 1250 metros. Pois se o fusca começa nos 1000 metros, ele percorreu 250 metros, e a Ferrari começou no 0, ela percorreu 1250 metros o que coincide com a informação de que a velocidade da Ferrari é 5 vezes maior, ou seja, percorreu 5 vezes a distância que o fusca percorreu. Se o fusca começa 1000 metros na frente e percorre x metros até encontrar a Ferrari na posição y, e a Ferrari percorre 5 vezes o deslocamento do fusca, 5x, para chegar no ponto y, representado por um sistema de equações:*

$$1000 + x = y$$

$$5x = y$$

$$1000 + x = 5x$$

$$1000 = 4x$$

$$250 = x$$

Então a distância percorrida, 5x é igual a 1250".

Apesar de conseguirem justificar que a Ferrari alcançaria o fusca após percorrer 1250*m*, pareciam ainda não estar convencidos que a soma da sequência resulta em 1250. Quanto aos demais grupos, dois deles consideraram que sempre haveria uma distância mínima entre os veículos e, portanto, não se encontrariam. Um último grupo afirmou que os automóveis chegariam juntos nos 1250*m*, porém não justificou como chegou a essa conclusão.

Como era de se esperar, os alunos se encontraram em confronto com os paradoxos e, por ainda não terem conhecimento sobre PG, não conseguiram associar e tirar conclusões sobre as sequências. Entretanto, eles conseguiram pensar bastante e construir ideias com um nível significativo de abstração e complexidade, mostrando que as tarefas matemáticas propostas permitiram abordagens promissoras para apresentar um conceito. Foi interessante que eles tiveram preocupação em não desconsiderar a matemática e em não responder apenas de acordo com o senso comum. Todas as respostas e ideias originadas na realização da tarefa foram levadas à plenária.

No intuito de sistematizar o conceito de PG, foram retomadas as respostas da primeira questão, em seguida pedido para que eles observassem de que forma um termo da sequência é escrito a partir do seu antecessor ou do primeiro termo. Com isso, eles perceberam que se dividisse um termo pelo seu antecessor resultaria sempre no mesmo valor, que no caso era $\frac{1}{2}$ (a razão da PG). Com essa ideia, valendo-se da PG descrita na questão, introduziu-se o conceito de termo geral, sendo que os estudantes colaboraram na forma de escrever a PG de uma maneira genérica.

No que se segue, promoveu-se um diálogo de como obter a soma dos n primeiros termos de uma PG, dada a dificuldade de somar termo a termo. Então, foi proposto utilizar a soma dos termos da PG na forma geral e, juntamente com eles, deduzimos a fórmula para calcular os n primeiros termos, de maneira como usualmente é feito em livros de Ensino Médio.

O âmago da questão foi colocado à tona, ao indagar novamente sobre como somar os termos de uma PG infinita, e como a fórmula deduzida poderia ser adaptada. Primeiramente, foi discutido que se a PG tiver o $|r| \geq 1$, seria mesmo impossível realizar a soma. Em seguida, foi instigado para que eles pensassem sobre o que aconteceria com o termo da PG de razão $\frac{1}{2}$ se o n fosse muito grande, introduzindo-se uma ideia intuitiva de limite de uma sequência numérica infinita. Com isso, eles notaram que cada vez mais os termos da sequência se aproximavam de zero e, assim, seria conveniente assumir que o resultado seria zero em um certo momento. Assim, foi possível chegar na fórmula para calcular a soma dos termos de uma PG infinita.

Desse modo, conseguimos aplicar os conceitos para concluir que a pessoa chegaria ao ponto desejado, andando sempre a metade do caminho restante. Por conseguinte, utilizamos a fórmula deduzida para calcular a soma da PG com $r = \frac{1}{2}$ e $a_1 = 4$, que resultou em 8. Ou seja, a soma dos termos é exatamente a distância que deve ser percorrida.

As argumentações da segunda questão foram consequência da primeira. Verificou-se que de fato os participantes entenderam de forma ampla os conceitos trabalhados, pois conseguiram rever suas conclusões da segunda tarefa com base nas discussões e sistematizações anteriores. Primeiramente, perceberam que a sequência das distâncias dos veículos era uma PG de $r = \frac{1}{5}$ e $a_1 = 1000$, consequentemente obtendo a soma dos termos S=1250. Por fim, todos concordaram que a Ferrari alcança o fusca, pois em algum momento a distância entre os veículos será igual a 0, e isso acontecerá após a Ferrari percorrer $1250m$.

6 Considerações Finais

O desenvolvimento da sociedade depende de indivíduos com habilidades matemáticas mais aprofundadas, por isso há a necessidade de ampliar os horizontes dos estudantes do Ensino Médio que possuem algum talento na área. Constatou-se, a partir da aplicação da tarefa, que a abrangência dos paradoxos tornou o estudo de soma de PG um assunto pelo qual aqueles estudantes mostraram interesse.

Ao planejar as tarefas, era esperado que os alunos se confrontassem com os paradoxos e recaíssem em reflexões intensas. A surpresa foi quando alguns tiraram conclusões bastante precisas e até mesmo utilizaram os termos corretos, mesmo sem conhecer sua representação formal. Reconhecemos assim o potencial dessas tarefas para abordar conceitos matemáticos sem deixar de valorizar os modos singulares que cada aluno constrói seu conhecimento e trabalhar com diferentes contextos.

Referências

BALIEIRO FILHO, I. F. Alguns Paradoxos da Matemática: Um Resgate Histórico e Possibilidades para o Ensino e Aprendizagem. In: Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, XXXIII, 2010. **Anais...** São Paulo: SBMAC, v.3, 2010. p. 1752-1758.

CANAVARRO, A. P.; OLIVEIRA, H.; MENEZES, L. Práticas de Ensino Exploratório da Matemática: O caso de Célia. In: Encontro de Investigação em Educação Matemática, 2012. **Anais...** Portugal, 2012. p. 255-266.

D'AMBRÓSIO, B. S.; D'AMBRÓSIO, U. **Atos de Pesquisa em Educação**, v. 1, n. 1, p. 75-85, jan./abr. 2006.

D’AMBRÓSIO, U. Prefácio. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.). **Pesquisa qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004. p. 11-23.

JESUS, C. C. D.; CYRINO, M. C. D. C. T.; OLIVEIRA, HÉLIA M. D. Análise de tarefas cognitivamente desafiadoras em um processo de formação de professores de Matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 20, n. 2, p. 21-46, 2018.

MICHAELIS, J. D. **Dicionário escolar**: língua portuguesa. São Paulo: Melhoramentos. 2015.

MONTEIRO, G. L.; MONDINI, F. Paradoxos falsídicos: os primeiros enfrentamentos do conceito de infinito no contexto da ciência matemática. **Docência em Ciências**, v. 2, p. 30-47, 2019.

PONTE, J. P. Gestão curricular em Matemática. In: GTI (Ed.). **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa: APM, 2005. p. 11-34.

PONTE, J. P.; Tarefas no ensino e na Aprendizagem da Matemática. In: PONTE, J. P. (Org.). **Práticas Profissionais dos Professores de Matemática**. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2014. p. 13-30.

RODRIGUES, M. O. Zenão de Eléia, discípulo de Parmênides: um esboço. **Kinesis**, v. 1, n. 2, p.231-247, 2009.

QUINE, W.V. **Ways of paradox and other essays.** Cambridge: Harvard University Press, Massachusetts and London, 1976.

STEWART, James**. Cálculo**. Volume 1. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2014.