Sociedade Brasileira de Educação Matemática

A Generalização de Padrões Matemáticos com Estudantes do 7.º ano do Ensino Fundamental

Mylena Simões Campos[1]
Jorge Henrique Gualandi[2]

Resumo: Este artigo é um recorte de uma pesquisa de mestrado do Programa de Pós-Graduação em Ensino, Educação Básica e Formação de Professores da Universidade Federal do Espírito Santo. Buscou-se responder à questão: De que forma estudantes do ensino fundamental generalizam padrões matemáticos e desenvolvem o pensamento algébrico? Para tanto, delineou-se o objetivo de investigar de que forma estudantes do ensino fundamental generalizam padrões matemáticos e desenvolvem o pensamento algébrico. Desenvolveu-se uma pesquisa de natureza qualitativa, do tipo estudo de caso, com sete estudantes do 7.º ano do ensino fundamental, de uma escola pública no sul do estado do Espírito Santo. Para a produção de dados, os estudantes resolveram tarefas associadas à generalização de padrões retiradas do livro didático. As análises indicam que os estudantes utilizaram as estratégias recursiva e múltiplo da diferença com e sem ajuste para generalizarem os padrões. Constatou-se, ainda, a presença dos processos do pensamento matemático avançado em todas as resoluções.

Palavras-chave: Generalização de padrões. Pensamento algébrico. Ensino fundamental.

The Generalization of Mathematical Patterns with Students of the 7th year of Elementary School

Abstract: This article is an excerpt from a master's research study in the Graduate Program in Teaching, Basic Education, and Teacher Training at the Federal University of Espírito Santo. The aim was to answer the question: How do elementary school students generalize mathematical patterns and develop algebraic thinking? To do so, the objective was to investigate how elementary school students generalize mathematical patterns and develop algebraic thinking. A qualitative research design, specifically a case study, was conducted with seven 7th-grade students from a public school in the southern region of Espírito Santo. To collect data, the students solved tasks associated with the generalization of patterns taken from the textbook. The analyses indicate that the students used recursive and multiple difference strategies, with and without adjustment, to generalize the patterns. Furthermore, the presence of advanced mathematical thinking processes was observed in all resolutions.

Keywords*:* Generalizations of Patterns. Algebraic Thinking. Elementary School.

La Generalización de Patrones Matemáticos con Estudiantes del 7° año de la Enseñanza Básica

Resumen: Este artículo es un extracto de una investigación de maestría en el Programa de Posgrado en Enseñanza, Educación Básica y Formación de Profesores de la Universidad Federal de Espírito Santo. El objetivo fue responder la pregunta: ¿Cómo generalizan los estudiantes de educación primaria los patrones matemáticos y desarrollan el pensamiento algebraico? Para ello, se delineó el objetivo de investigar cómo los estudiantes de educación primaria generalizan patrones matemáticos y desarrollan el pensamiento algebraico. Se llevó a cabo una investigación de naturaleza cualitativa, específicamente un estudio de caso, con siete estudiantes de séptimo grado de una escuela pública en el sur del estado de Espírito Santo. Para recopilar datos, los estudiantes resolvieron tareas asociadas con la generalización de patrones tomados del libro de texto. Los análisis indican que los estudiantes utilizaron estrategias recursivas y de diferencia múltiple, con y sin ajuste, para generalizar los patrones. Además, se observó

[1] Mestra em Ensino, Educação Básica e Formação de Professores. Universidade Federal do Espírito Santo (Ufes), Alegre, ES, Brasil. E-mail: mylenadecampos@gmail.com - Orcid: https://orcid.org/0000-0002-0553-3450
[2] Doutor em Educação Matemática. Universidade Federal do Espírito Santo (Ufes), Alegre, ES, Brasil. Email: jhgualandi@gmail.com - Orcid: https://orcid.org/0000-0002-0302-7650

eISSN 2317-904X DOI: 10.37001/emr.v28i80.3458 Recebido • 07/06/2023 | Aprovado • 01/08/2023 | Publicado • 02/09/2023

la presencia de procesos de pensamiento matemático avanzado en todas las resoluciones.

Palabras clave: Generalización de Patrones. Pensamiento Algebraico. Enseñanza Básica.

1 Introdução

Frequentemente, o aprendizado de álgebra está relacionado à resolução de equações, desenho de gráficos e manipulação de letras. Isso porque a álgebra foi (e arriscamo-nos a dizer que ainda é) reconhecida como o cálculo com letras (LINS; GIMENEZ, 2001) ou ainda ser compreendida como um conjunto de procedimentos e de regras para resolver problemas, equações e trabalhar com transformação de expressões (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993; PONTE; BRANCO; MATOS, 2009).

Neste artigo, entendemos a álgebra de forma ampla, que abarca muito mais que a manipulação de símbolos e resolução de equações – a álgebra como parte integrante do pensamento matemático de todo cidadão, além de ser um elemento de sua cultura matemática (LIMA; BIANCHINI, 2021). Lima e Bianchini (2021) ainda defendem que desenvolver o pensamento matemático e o pensamento algébrico são os requisitos para aprender essa álgebra. Aqui também compreendemos o pensamento algébrico como o desenvolvimento de modos de pensar, cujo processo para representar o que se pensa não requer o uso de simbolismos algébricos, tais como defende Kieran (2004).

O desenvolvimento do pensamento algébrico – também considerado como um tipo especial do pensamento matemático (BRASIL, 2018; LIMA; BIANCHINI, 2021) – aparece na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) como o objetivo da álgebra para o ensino fundamental:

> Para esse desenvolvimento, é necessário que os alunos identifiquem **regularidades e padrões** de sequências numéricas e não numéricas, [...] em síntese, essa unidade temática deve enfatizar o desenvolvimento de uma linguagem, o estabelecimento de **generalizações** (BRASIL, 2018, p. 270; grifo nosso).

Uma interpretação possível que resulta desse extrato da BNCC é que o reconhecimento de regularidades e padrões matemáticos, bem como o estabelecimento de generalizações, constitui caminhos capazes de desenvolver o pensamento algébrico dos estudantes do ensino fundamental.

Sob essa perspectiva, introduzimos nesta discussão a generalização de padrões matemáticos, que é considerada como uma possibilidade para desenvolver o pensamento matemático, incluindo o algébrico (GUALANDI, 2019), pois é a base desse pensamento

(CARDOSO, 2010; VALE, 2013), inclusive uma das vias mais privilegiadas para desenvolvê-lo (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009).

Neste artigo, também defendemos que generalizar padrões diz respeito ao desenvolvimento do pensamento matemático avançado. Isso porque entendemos que o sujeito que generaliza padrões matemáticos também faz uso de outros processos mentais, além da generalização, como a visualização e representação, e os põe em interação.

A pesquisa que inspirou a escrita deste artigo está associada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino, Educação Básica e Formação de Professores da Universidade Federal do Espírito Santo (Ufes), realizada também por meio do Grupo de Pesquisa em Ensino de Matemática do Espírito Santo – GPEMES. Com tal investigação, intencionamos responder à questão: De que forma estudantes do ensino fundamental generalizam padrões matemáticos e desenvolvem o pensamento algébrico? Na busca por respostas, traçamos o objetivo de investigar de que forma estudantes do ensino fundamental generalizam padrões matemáticos e desenvolvem o pensamento algébrico.

Adiante, apresentamos as discussões teóricas sobre as principais temáticas pertinentes a este artigo, a metodologia, as tarefas utilizadas para produzir os dados, a análise de parte dos dados e nossas conclusões.

2 O pensamento matemático

Segundo Lima e Bianchini (2021, p. 14), o pensamento matemático é “o resultado de processos racionais do intelecto ou de abstrações da imaginação realizados a partir da observação e reflexão [...]”. De acordo com Tall (2002), o pensamento matemático pode ser desenvolvido nos sujeitos desde pequenos, porém de maneira elementar, o que o autor nomeia pensamento matemático elementar. Esse pensamento pode evoluir para o que ele chama de pensamento matemático avançado.

Apesar de Tall (2002) defender que o desenvolvimento do pensamento matemático avançado ocorre em espaços distantes da educação básica, Dreyfus (2002) sugere que esse pensamento tem estado presente desde a infância. O autor explica que muitos dos processos mentais do pensamento matemático avançado se evidenciam no pensamento das crianças sobre conceitos de matemática, como o número e valor de posição.

Para Dreyfus (2002), a interação entre processos mentais promove o desenvolvimento do pensamento matemático avançado. Entre esses processos, destacamos a sintetização, abstração, classificação, visualização, representação, sobretudo a generalização, e, neste artigo, dedicamo-nos a discutir sobre sintetização, abstração, visualização, representação e generalização. Vale dizer que, no rol dos processos mentais, a abstração e representação ganham destaque, pois são consideradas os principais processos do pensamento matemático avançado.

A abstração é um processo que se refere à "[...] construção de estruturas mentais a partir de estruturas matemáticas, ou seja, de propriedades e de relações entre objetos matemáticos" (DREYFUS, 2002, p. 37). Isso significa que, para chegar à abstração, é necessário que o sujeito analise conceitos e situações matemáticas para além do que se vê. Para o sujeito abstrair, é necessário generalizar e sintetizar. Por isso, esses dois processos estão associados à abstração: "Generalizar é derivar ou induzir de particulares, identificar semelhanças, expandir domínios de validade [...] sintetizar significa combinar ou compor partes de tal forma que elas formem um todo, uma entidade" (DREYFUS, 2002, p. 35).

De acordo com Dreyfus (2002), representar um conceito significa gerar um exemplo, uma imagem ou um modelo dele e ocorre em registros como escrita, desenho, fala, gestos, entre outros. Por isso, o processo de representação ocorre mediante três principais vias: simbólica, mental e visual.

A representação simbólica envolve relações entre signos e significado e melhora a comunicação daquilo que se pensa, por meio tanto da escrita quanto da fala. A função dessa representação geralmente é a de facilitar a comunicação do conceito (DREYFUS, 2002). Já a representação mental se refere aos esquemas internos ou imagens de referência que o sujeito usa para interagir com o mundo externo. A visualização é o processo pelo qual as representações mentais podem ser construídas por meio de sistemas de representação, isto é, artefatos/objetos externos concretos. Por exemplo, no caso das funções, os gráficos, diagramas de setas, as fórmulas algébricas e tabelas de valores são considerados artefatos.

Sendo assim, entendemos que o sujeito que generaliza padrões também faz uso da visualização e de representações, sejam mentais, visuais e simbólicas, principalmente para externalizar/registrar aquilo em que se pensa. Queremos dizer que, para generalizar, o sujeito mobiliza outros processos mentais e os põe em interação. Assim, com base na definição de Dreyfus (2002), entendemos que, se o sujeito generaliza padrões, então ele possivelmente desenvolve o pensamento matemático avançado.

3 O pensamento algébrico

Recorremos à Kieran (2004, p. 149) para definirmos e caracterizarmos o pensamento algébrico como “[...] o desenvolvimento de modos de pensar por meio de atividades para as quais o simbolismo da álgebra pode ser usado como ferramenta, mas que não são exclusivas da álgebra e podem ser abordadas sem nenhum uso de simbolismo algébrico”. Essas atividades que aparecem na definição configuram-se como uma “estrutura” para o pensamento algébrico ser desenvolvido em crianças e ser aprimorado à medida que elas crescem (KIERAN, 2004).

Com base nessa definição de pensamento algébrico, cabem os seguintes questionamentos: Como expressar o pensamento algébrico e como saber se o que expressamos é, de fato, considerado pensamento algébrico? Os autores Fiorentini, Miorim e Miguel (1993, p. 85) ajudaram-nos a responder a essas perguntas. Eles consideram a linguagem como a expressão (ou a representação) de um pensamento: “A tendência da educação algébrica tem sido acreditar que o pensamento algébrico só se manifesta e desenvolve através da manipulação sintática da linguagem concisa e específica da álgebra. [...] a linguagem é, pelo menos a princípio, a expressão de um pensamento”.

À vista disso, entendemos que pensar algebricamente e representar esse pensamento não implica necessariamente o uso e a manipulação de símbolos e signos (pelo contrário). Tanto é que resumir a álgebra à manipulação simbólica significa reduzir sua riqueza a uma das suas facetas apenas (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993; MASON, 1996; VALE *et al*., 2006; PONTE; BRANCO; MATOS, 2009). Nesse sentido, Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) defendem o uso de mais de uma linguagem para representar o pensamento algébrico por meio da linguagem aritmética, geométrica, materna ou da algébrica.

Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) também caracterizam o pensamento algébrico assim: i) percepção de regularidades, de aspectos invariantes em contraste com outros que variam; ii) tentativas de expressar ou explicitar a estrutura de uma situação-problema; iii) presença do processo de generalização. Uma interpretação possível que surge daí é que, se o sujeito generaliza, então ele desenvolve o pensamento algébrico. Especificamente, a generalização de padrões é considerada a base do pensamento algébrico (VALE, 2013) e uma das vias mais privilegiadas para desenvolvê-lo (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009).

Neste trabalho, inspirados por Kieran (2004), assumimos o pensamento algébrico como o desenvolvimento de modos de pensar por meio de tarefas algébricas que contemplem a generalização de padrões, cujo processo para representar o que é pensado não requer o uso de simbolismos algébricos obrigatoriamente.

4 A generalização de padrões matemáticos

Conforme já discutimos, a generalização significa "[...] derivar ou induzir de particulares, identificar semelhanças, expandir domínios de validade [...] (DREYFUS, 2002, p. 34). Agora, trazemos à discussão a concepção de Kaput (2000, p. 7), segundo o qual, a generalização diz respeito a "[...] continuar o raciocínio para além do caso ou casos considerados, explicitamente identificando e expondo semelhanças entre os casos, ou elevando o raciocínio ou a comunicação". Comparando essas duas definições, uma interpretação possível que surge em relação ao processo de generalização é que ele parte da análise de casos particulares para a de casos gerais.

Para exemplificarmos nossa compreensão sobre o que venha a ser a generalização de padrões matemáticos, trouxemos a sequência dos números naturais pares $(0,2,4,6,8,\ldots)$. Nesse caso, o processo de generalização começa quando percebemos as relações que há entre os termos dessa sequência e o padrão matemático presente ali, ou seja, os termos crescem de dois em dois, iniciando do zero, sendo ele um número par. A partir disso, iniciamos o processo de análise dessas relações, o que pode estender a expansão do caso particular ao caso geral, ou seja, compreender que, sejam lá quais forem os termos representados pelas reticências, a eles sempre será acrescentado o 2, o que podemos algebrizar da seguinte forma $an = 2n - 2$, tal que an é um termo qualquer, $n > 0$ e n é a posição do termo na sequência, sendo esta uma possibilidade.

Para Kaput (2000), o processo de generalização está presente nas salas de aula da educação básica, nos mais diversos conteúdos do currículo matemático. O autor confirma isso ao destacar que a generalização pode aparecer nas séries elementares. Ele ainda explica que a generalização começa na aritmética, nas situações de modelagem, na geometria e em praticamente toda a matemática (KAPUT, 2000). Em um sentido mais amplo, a generalização é considerada um elemento central em toda a matemática (MASON, 1996), fundamental na álgebra (BARBOSA, 2009) e inerente ao pensamento matemático (BARBOSA; VALE, 2015).

A linguagem algébrica nem sempre é o principal caminho escolhido para a representação de generalizações. Kaput (2000), Blanton e Kaput (2005) e Vale (2013) explicam que, geralmente, as crianças utilizam a argumentação por meio da linguagem materna – seja a fala, seja a escrita – ou dos gestos e evoluem para uma representação mais formal, à medida que vão construindo outros conceitos matemáticos, para representarem ou expressarem a generalização. Ponte, Branco e Matos (2009) também compartilham dessa ideia e especificam que os estudantes dos anos iniciais utilizam normalmente a linguagem materna e, os dos anos finais, a algébrica.

Nessa mesma perspectiva, Cardoso (2010) afirma que a generalização de padrões pode ser representada de diversas maneiras, seja intuitivamente, por meio da linguagem materna, seja mais formalmente, em que os alunos recorrem à linguagem simbólica da matemática, às variáveis e fórmulas e se apoiam em outras representações, como desenhos, esquemas, tabelas e gráficos.

Depois de discutirmos sobre como se representa a generalização de padrões, cabe agora entendermos o que geralmente se representa. Com essa intenção, discutiremos adiante algumas das estratégias de generalização de padrões que perpassam a literatura.

5 As estratégias de generalização de padrões

Tal como Barbosa e Vale (2015), entendemos que a generalização de um padrão envolve o uso de uma estratégia e existem diversas abordagens que permitem aos alunos generalizar. Inicialmente, apresentamos dois tipos de generalização: próxima e distante. Para Stacey (1989), quando é possível determinar, de forma rápida e eficaz, um termo da sequência recorrendo a desenhos ou ao método recursivo, a generalização caracteriza-se como próxima. Agora, quando há a compreensão e descoberta de uma regra geral, a generalização se configura distante. Neste artigo, dedicamo-nos a discutir sobre as estratégias de contagem, diferença e explícita (STACEY, 1989).

De acordo com Stacey (1989), a estratégia de contagem diz respeito a contar o número de elementos de um padrão, obtendo, assim, o termo da sequência solicitado. No caso dos padrões figurativos, podemos desenhá-los e contar seus elementos, por exemplo. Em tarefas que contemplam a generalização próxima, geralmente os estudantes optam pela estratégia da contagem (BARBOSA, 2009; BARBOSA; VALE, 2015). Se, com tarefas que contemplam a generalização próxima, a estratégia de contagem é a mais utilizada, no caso da generalização distante, a situação é bem diferente. Isso porque, neste último caso, o uso da contagem pode ser um processo exaustivo e resultar em representações desorganizadas e complexas, segundo Barbosa e Vale (2015).

Para Stacey (1989), a estratégia da diferença refere-se à utilização de múltiplos da diferença entre o número de elementos de termos consecutivos. Essa estratégia subdivide-se em outras três: múltiplo da diferença sem e com ajuste, e recursiva. A estratégia do múltiplo da diferença sem e com ajuste visa a usar a diferença entre termos consecutivos como fator multiplicativo, ajustando, ou não, o resultado. Já a diferença recursiva diz respeito a continuar a sequência com base na diferença entre termos consecutivos (STACEY, 1989).

Na estratégia explícita, buscamos construir uma regra que permita encontrar, de imediato, qualquer termo da sequência. Com base nessa definição, entendemos ser possível relacionar essa estratégia com uma das maneiras de representação do processo de generalização de padrões, visto que, por meio da linguagem algébrica, podemos expressar o que pensamos e generalizamos.

Para Vale e Barbosa (2019), geralmente os estudantes se desempenham melhor em tarefas que contemplam a generalização próxima, não nos casos de generalização distante. As autoras explicam que, nesse último caso, os estudantes possuem dificuldades na aplicação da estratégia errada ou na apresentação da resposta.

Até aqui, apresentamos algumas possibilidades de generalização que perpassam a literatura. Com base em nossos estudos, entendemos que essas estratégias utilizadas pelos sujeitos são também representações, por escrito, daquilo que eles generalizam, ou seja, é uma forma de externalizar o que pensam.

6 Metodologia da pesquisa

Para respondermos nossa questão de pesquisa e alcançarmos nosso objetivo, desenvolvemos uma pesquisa de natureza qualitativa na conceituação de Bogdan e Biklen (1994), e do tipo estudo de caso, na acepção de Ponte (2006).

Segundo Bogdan e Biklen (1994), uma investigação é considerada qualitativa quando há uma relação dinâmica entre o mundo real e o sujeito. Por isso, a questão a ser investigada não se estabelece mediante a operacionalização de variáveis, mas, sim, formulada com o objetivo de investigar os fenômenos em toda a sua complexidade e em contexto natural. Em pesquisas dessa natureza, a coleta de dados é realizada em seu ambiente natural, em contato direto e pessoal com os sujeitos – o pesquisador é instrumento-chave nesse processo – e os dados incluem transcrições de entrevistas, notas de campo, vídeos, documentos pessoais e outros registos oficiais (BOGDAN; BIKLEN, 1994).

Para Ponte (2006), o estudo de caso é de cunho descritivo e tem por objetivo conhecer, em profundidade, o “como” e os “porquês” da realidade investigada. Aqui, o pesquisador não busca modificar essa realidade, mas compreendê-la tal qual ela é, e se debruça deliberadamente sobre uma situação específica que se supõe ser única, pelo menos em certos aspectos, procurando descobrir o que há nela de mais essencial e característico.

Os sujeitos[3] da pesquisa foram sete estudantes do 7.º ano do ensino fundamental de uma escola pública municipal localizada no sul do estado do Espírito Santo. Os estudantes resolveram tarefas associadas à generalização de padrões matemáticos, que foram retiradas (e posteriormente adaptadas) do livro didático "A conquista da matemática", de Giovanni Júnior e Castrucci (2018), que é utilizado pelo professor na turma investigada.

Para propor as tarefas aos estudantes, escolhemos a observação participante como instrumento metodológico. Isso foi realizado por meio de três encontros presenciais, realizados nos dias 15, 20 e 22 de setembro de 2022. No entanto, neste artigo focamos no terceiro encontro e, por isso, apresentamos os dados referentes às duas tarefas desenvolvidas nesse dia.

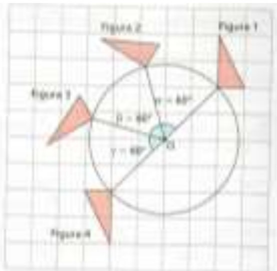
Nos encontros, utilizamos dois instrumentos de pesquisa: os registros dos estudantes (as tarefas que eles resolveram) e as discussões que sucederam nas rodas de conversa (que foram filmadas e posteriormente transcritas). As rodas de conversa foram uma oportunidade para os estudantes socializarem conosco e com os demais participantes seus achados, além de comentarem como (ou o que) pensaram para generalizar os padrões.

7 Análise dos dados

Inicialmente, apresentamos a 1.ª tarefa utilizada, conforme o quadro 1 a seguir.

Quadro 1 – 1.ª tarefa adaptada e utilizada no terceiro encontro

Observe a figura a seguir que mostra uma circunferência de centro O e quatro figuras (1,2,3 e 4) simétricas entre si por simetria de rotação.



a) Qual o ângulo de rotação entre as figuras 1 e 4?
b) Esse ângulo que você encontrou na letra "a" é o mesmo entre as figuras 2 e 4? Por quê?
c) Escreva a sequência formada pelos ângulos indicados entre as figuras 1 e 2, figuras 1 e 3, figuras 1, 4 e assim sucessivamente.
d) Qual seria o ângulo formado pelas figuras 1 e 5? Explique o que você pensou.
e) Explique o que você observou nessa sequência.

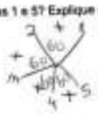
Fonte: Os autores, com base em Giovanni Júnior e Castrucci (2018)

---

[3] No intuito de garantirmos o anonimato, atribuímos os seguintes nomes fictícios: Bia, Helen e Tais. Considerando os objetivos e a questão de pesquisa já anunciados, definimos que seriam participantes desta pesquisa somente estudantes do 7.º ano do ensino fundamental, sendo este, portanto, o critério de inclusão. Em contrapartida, os estudantes de outras séries não foram convidados a serem sujeitos – critério de exclusão.

Agora, apresentamos as resoluções das estudantes Bia, Helen e Taís, pois entendemos que são uma síntese das demais resoluções.

Quadro 2 – Resolução do item d) e a generalização do padrão do item e), 5.ª tarefa (Bia, Helen e Taís)

Estudantes	Resoluções
Bia	240, eu pensei que seria o número anterior somado com +60. Explique o que você observou nessa sequência. Que vai aumentando de 60 em 60.
Helen	Qual seria o ângulo formado pelas figuras 1 e 5? Explique o que você pensou. 240° eu pensei que se o ângulo até 5, seria 60+60+60+60=  60 x4 240 e) Explique o que você observou nessa sequência. está somando cada espaço do ângulo 60
Taís	d) Qual seria o ângulo formado pelas figuras 1 e 5? Explique o que você pensou. 180 + 60 240 Será 240° no ângulo. Porque ele teria 60° no ângulo que aumentaria (ou seja,) se tivesse mais um ângulo a 1ª fig a 5ª fig. e) Explique o que você observou nessa sequência. Ela vai aumentando de 60 em 60.

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Chamamos a atenção para os tipos de registros utilizados pelos participantes para generalizarem o padrão, especificamente para a resolução da estudante Helen, que desenhou os ângulos e usou setas e esquemas para explicar o padrão matemático naquela situação. Segundo Cardoso (2010), os estudantes podem utilizar vários tipos de representações, incluindo o uso de esquemas e desenhos, conforme procedeu a referida participante. Considerando as resoluções apresentadas, entendemos que as participantes utilizaram as estratégias de múltiplo da diferença e recursiva para generalizarem o padrão.

O trecho da resolução de Bia evidenciou-nos a escolha da estratégia recursiva: "eu pensei que seria o número anterior somado com mais 60". O registro dessa estudante ilustra justamente a definição de recursividade segundo Stacey (1989), que diz respeito a continuar a sequência com base na diferença entre termos consecutivos, ou seja, $180° + (180° - 120°) = 180° + 60° = 240°$. Da mesma forma, entendemos que essa estratégia também foi eleita pelas participantes Helen e Taís, o que nos foi sugerido no relato "vai aumentando de 60 em 60", ou seja, da diferença entre termos consecutivos, por exemplo, $120° - 30° = 180° - 120° =$

$240° - 180° = 60°$, e assim por diante.

Também entendemos que as participantes utilizaram a estratégia do múltiplo da diferença sem ajuste para generalizarem o padrão, a qual diz respeito à diferença entre termos consecutivos como fator multiplicativo sem a necessidade de ajustar o resultado final. Nesse caso, a sequência formada pelos ângulos pode ser representada por $(60°, 120°, 180°, 240°, \ldots)$, sendo $60°$ a diferença entre termos consecutivos, já que $180° - 120° = 60°;\ 240° - 180° = 60°$ e assim por diante. Todos os termos dessa sequência são justamente múltiplos de $60°$ (o múltiplo da diferença), pois $120° = 2.60°;\ 180° = 3.60°;\ 240° = 4.60°$, entre outros.

Em relação aos tipos de registros, as resoluções indicaram-nos que os participantes utilizaram a linguagem materna (fala e escrita), a linguagem aritmética (destacamos o uso de números e operações) e esquemas e desenhos (como na resolução de Helen). Tais dados vão ao encontro das ideias de Kaput (2000), Blanton e Kaput (2005), Cardoso (2010) e Vale (2013). Com base em Dreyfus (2002), as resoluções apontam-nos que os processos do pensamento matemático avançado presentes foram a visualização, generalização e representação. Podemos destacar que os pesquisadores Mason (1996), Vale (2013) e Barbosa e Vale (2015) concordam que a visualização é o primeiro passo rumo à generalização de padrões.

Agora, apresentamos os dados referentes ao item 2.ª tarefa. Antes, mostramos parte dessa tarefa no quadro 3.

Quadro 3 – 2.ª tarefa adaptada e utilizada na pesquisa

Analise a sequência abaixo, complete os termos que faltam e responda às perguntas. Quais são os 11 primeiros múltiplos de 19? • Quais são o 12.º e o 16.º termos dessa sequência? Explique o que você pensou. • Como você explicaria essa sequência?

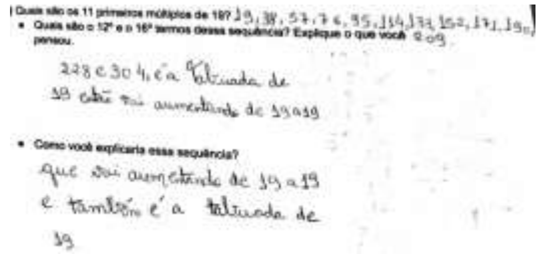
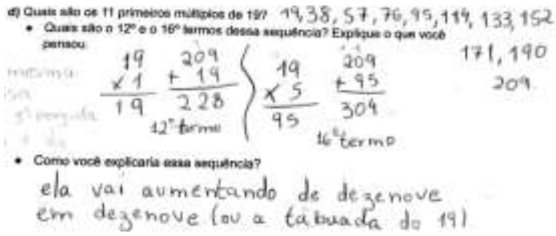
Fonte: Os autores, com base em Giovanni Júnior e Castrucci (2018)

Dos sete participantes, dois solucionaram essa questão. Isso pode ser explicado pela dificuldade encontrada por eles ao resolverem tal questão, o que se evidenciou na roda de conversa.

> Pesquisadora: Qual tarefa vocês acharam mais difícil e por quê?
> Participantes: Tarefa 2 [Em uníssono]
> Taís: Tem múltiplo [os demais alunos concordaram]
> Pesquisadora: Vocês sabem o que é múltiplo?
> Taís: 19, 38…

Pelo relato dos estudantes, essa tarefa foi a que mais suscitou dificuldades entre eles, justamente por contemplar o conteúdo de múltiplos. No quadro 4, apresentamos as resoluções de Bia e Taís, estudantes que solucionaram tal tarefa.

Quadro 4 – Resolução da 2.ª tarefa (Bia e Taís)

<table>
<tr><th>Estudantes</th><th>Resoluções</th></tr>
<tr><td>Bia</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Taís</td><td>
</td></tr>
</table>

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Conforme tais resoluções nos evidenciam, Bia e Taís perceberam a ideia de tabuada nessa tarefa e compreenderam que os termos aumentam de 19 em 19. Inclusive, a resolução de Bia nos sugere que a participante escreveu a tabuada, porém a apagou. Chamamos a atenção para a resolução de Taís, que pensou diferente de Bia. Para indicar o 12.º termo, a estudante encontrou o 11.º termo, nesse caso $19.11 = 209$, e, em seguida, somou com 19, que seria o 1.º termo, resultando em 228, ou seja, ela somou os resultados referentes aos termos na 1.ª e 11.ª posições. Da mesma forma, para encontrar o 16.º termo, ela calculou o 5.º termo (95) e o somou com o 11.º termo (209), resultando em 304.

Com base nessas resoluções, entendemos que Bia utilizou a estratégia do múltiplo da diferença sem ajuste, enquanto Taís utilizou o múltiplo da diferença com ajuste. Para Stacey (1989), a estratégia do múltiplo da diferença sem e com ajuste visa a usar a diferença entre termos consecutivos como fator multiplicativo, ajustando, ou não, o resultado. Em relação aos tipos de representação, percebemos a linguagem aritmética nomeadamente na escrita da sequência e nos cálculos de adição e multiplicação. Notamos a presença da linguagem materna nos registros escritos e orais. Já no tocante aos processos do pensamento matemático avançado, percebemos a presença da visualização, representação e generalização.

8 Considerações Finais

Como forma de organizar os dados produzidos, categorizamos as maneiras como os estudantes generalizaram os padrões nas tarefas propostas. Os dados produzidos e discutidos aqui sugerem-nos que os participantes utilizaram as estratégias recursiva e o múltiplo da diferença sem e com ajuste. Segundo Stacey (1989), Barbosa (2009) e Barbosa e Vale (2015), a estratégia recursiva tende a ser a mais utilizada pelos estudantes, justamente por ela não requerer nenhum tipo de ajuste, enquanto a contagem tende a ser muito utilizada em generalizações próximas.

Em relação aos tipos de generalização, os dados evidenciaram-nos que a generalização próxima se sobressaiu à distante, mesmo nas tarefas em que era conveniente utilizar a estratégia distante devido ao contexto. Vale e Barbosa (2019) enfatizam que os estudantes se desempenham melhor em tarefas que contemplam a generalização próxima, não nos casos de generalização distante. Este artigo traz contribuições no sentido de confirmar as ideias dessas autoras, pois não identificamos indícios de generalização distante nas resoluções analisadas. Ademais, destacamos que, em todos os casos analisados, a generalização próxima esteve presente.

Os dados apresentados neste artigo confirmaram-nos a ideia de que a generalização de padrões também diz respeito ao desenvolvimento do pensamento matemático avançado, pois os estudantes que generalizaram padrões também utilizaram a representação, visualização e a generalização, ambos os processos em uma mesma resolução. Inclusive, isso nos levou a pensar que os processos de visualização, generalização e representação aconteceram em cadeia, pois as resoluções nos indicaram que os sujeitos visualizaram o padrão matemático proposto, generalizaram e, por último, representaram (ou seja, externalizaram) o que pensaram.

Os dados sugerem-nos, ainda, que a generalização de padrões foi representada por meio de diferentes tipos de registros, nomeadamente linguagem aritmética, algébrica e materna (fala e escrita) e uso de esquemas e desenhos. Tais resultados aproximam-se das ideias de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), Kaput (2000), Blanton e Kaput (2005), Ponte, Branco e Matos (2009), Cardoso (2010) e Vale (2013). Destacamos que, em todos os casos, a linguagem materna foi utilizada como meio de representação.

Ao tratarmos ainda do uso da linguagem materna para a representação da generalização de padrões, destacamos que a roda de conversa foi um instrumento metodológico essencial para identificarmos esse tipo de representação, porque, por meio das discussões, em coletivo, percebemos indícios da generalização de padrões presentes nas falas dos participantes.

Referências

BARBOSA, A. C. C. **A resolução de problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais:** um estudo longitudinal com alunos do 2º ciclo do ensino básico. 2009. 484 f. Tese (Doutorado em Estudo da criança) - Programa de Pós-Graduação em Estudos da criança, Universidade do Minho, Portugal, 2009.

BARBOSA, A.; VALE, I. Visualization in pattern generalization: Potential and Challenges. **Journal of the European Teacher Education Network**, v. 10, p. 57-70, 2015.

BLANTON, M.; KAPUT, J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 36, n. 05, p. 412-446, 2005.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto, 1994.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018. Disponível em http://basenacionalcomum.mec.gov.br. Acesso em: 14 out. 2021.

CARDOSO, M. T. P. **O conhecimento matemático e didáctico, com incidência no pensamento algébrico, de professores do primeiro ciclo do ensino básico:** que relações com um programa de formação contínua? 2010. 587 f. Tese (Doutorado em Estudos da Criança) - Programa de Pós-graduação em Estudos da Criança, Universidade do Minho, Portugal, 2010.

DREYFUS, T. Advanced mathematical thinking processes. In: TALL, D. **Advanced mathematical thinking**. New York: Kluwer Academic Publishers, 2002. p. 25-41.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. A contribuição para repensar... a educação algébrica elementar. **Pro-posições**, São Paulo, v. 4, n. 1, p. 78-91, 1993.

GIOVANNI JÚNIOR, J. R.; CASTRUCCI, B. **A Conquista da Matemática**. São Paulo: FTD Educação, 2018.

GUALANDI, J. H. **Os reflexos de uma formação continuada na prática profissional de professores que ensinam matemática**. 2019. 169 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Programa de Pós-graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2019.

KAPUT, J. J. Teaching and learning a new algebra with understanding. **National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science**, Massachusetts, p. 1-34. 2000. Disponível em: https://eric.ed.gov/?id=ED441662. Acesso em 27 set. 2022.

KIERAN, C. Algebraic Thinking in the Early Grades: What is it? **Mathematics Educator**, v. 8, n. 1, p. 139-151, 2004.

LIMA, G. L.; BIANCHINI, B. L. Álgebra como integrante da cultura matemática do cidadão. In: GUALANDI, J. H. **Ensino de matemática:** desafios e possibilidades. Curitiba: Bagai, 2021. p. 10-28.

LINS; R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI.** 4 ed. Campinas: Papirus, 2001.

MASON, J. Expressing generality and roots of algebra. In: BEDNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L (Orgs.). **Approaches to algebra**. Dordrecht: Kluwer, 1996. p. 65-86.

PONTE, J. P. Estudos de caso em educação matemática. **Bolema**, v. 19, n. 25, p. 1-23, 2006. Disponível em: https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/1880. Acesso em 20 jun. 2022.

PONTE, J. P.; BRANCO, N.; MATOS, A. **Álgebra no ensino básico**. Lisboa: DGIDC, 2009.

STACEY, K. Finding and Using Patterns in Linear Generalising Problems. **Educational Studies in Mathematics**, *v.* 20, n. 2, p. 147-164, 1989.

TALL, D. The psychology of advanced mathematical thinking. In: _______. **Advanced mathematical thinking**. New York: Kluwer Academic Publishers, 2002. p. 3-20.

VALE, I. *et al*. Os Padrões no Ensino e Aprendizagem da Álgebra. In: VALE, T.; PIMENTEL, A.; BARBOSA, L.; FONSECA, L. CANAVARRO, P. **Números e Álgebra.** Lisboa: SEM-SPCE, 2006, p. 193-211.

VALE, I. Padrões em contextos figurativos: um caminho para a generalização em matemática. **Revemat**, Florianópolis, v. 08, n. 2, p. 64-81, 2013. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/download/1981-1322.2013v8n2p64/26020/106402. Acesso em 29 jul. 2022.

VALE; I.; BARBOSA, A. Pensamento algébrico: contributo da visualização na construção da generalização. **Educação matemática pesquisa**, São Paulo, v. 21, n. 03, p. 398-418, 2019. Disponível em: http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2019vol21i3p398-418. Acesso em 28 out. 2022.