Sociedade Brasileira de Educação Matemática

emr

Uma análise da influência kantiana na aceitação das geometrias não-euclidianas

Luciano Ferreira[1]
Talita Secorun dos Santos[2]

Resumo: O presente artigo, de cunho bibliográfico, procura analisar as influências da filosofia Kantiana na aceitação das Geometrias não-euclidianas. Registros históricos indicam que até meados do século XIX, a Geometria Euclidiana era considerada a única geometria possível. Foi então que apareceram as Geometrias não-euclidianas. Tais geometrias não foram aceitas com facilidade pela comunidade matemática e ficaram no campo obscuro da matemática por algum tempo. Nessa mesma época, a filosofia dominante, tanto para a igreja como para a comunidade acadêmica, era a filosofia kantiana. O objetivo principal deste trabalho é discutir qual a influência da filosofia kantiana na aceitação das Geometrias não-euclidianas. As conclusões indicam que houve influência da filosofia kantiana na aceitação das Geometrias não-euclidianas, no entanto, foi o ideal da Geometria Euclidiana que fez com que a comunidade matemática não aceitasse a existência das novas geometrias. As Geometrias não-euclidianas foram consideradas aberrações do conhecimento humano e permaneceram no obscuro da matemática até o momento que elas foram ao encontro dos novos discursos produzidos pela sociedade capitalista e foram utilizadas para refutar o apriorismo kantiano.

Palavras-chave: Geometrias não-euclidianas. Filosofia. Kant. História da Matemática. Geometria euclidiana.

An analysis of the kantian influence on the acceptance of non-eucliden geometries

Abstract: This article, of a bibliographic nature, seeks to analyze the influences of Kantian philosophy on the acceptance of non-Euclidean Geometries. Historical records indicate that until the mid-19th century, Euclidean Geometry was considered the only possible geometry. It was then that non-Euclidean Geometries appeared. Such geometries were not easily accepted by the mathematical community and remained in the obscure field of mathematics for some time. At this same time, the dominant philosophy, both for the church and for the academic community, was Kantian philosophy. The main objective of this work is to discuss the influence of Kantian philosophy on the acceptance of non-Euclidean Geometries. The conclusions indicate that there was an influence of Kantian philosophy on the acceptance of non-Euclidean Geometries, however, it was the ideal of Euclidean Geometry that caused the mathematical community not to accept the existence of new geometries. Non-Euclidean Geometries were considered aberrations of human knowledge and remained in the shadow of mathematics until the moment they met the new discourses produced by capitalist society and were used to refute Kantian apriorism.

Keywords: Non-euclidean geometries. Philosophy. Kant. History of Mathematics. Euclidean geometry.

Un análisis de la influencia kantiana en la aceptación de geometrías no euclideas

Resumen: Este artículo, de carácter bibliográfico, busca analizar las influencias de la filosofía kantiana en la aceptación de las Geometrías no euclidianas. Los registros históricos indican que hasta mediados del siglo XIX, la Geometría Euclidiana era considerada la única geometría posible. Fue entonces cuando aparecieron las geometrías no euclidianas. Estas geometrías no fueron fácilmente aceptadas por la comunidad matemática y permanecieron en el oscuro campo de las matemáticas durante algún tiempo.

[1] Doutor em Educação para a Ciência e a Matemática. Universidade Estadual do Paraná - Unespar, Campo Mourão, Paraná, Brasil. E-mail: luciano.ferreira@ies.unespar.edu.br - ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9326-0826
[2] Doutora em Educação. Universidade Estadual do Paraná - Unespar, Campo Mourão, Paraná, Brasil. E-mail: talita.santos@ies.unespar.edu.br - ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8898-4160.

Al mismo tiempo, la filosofía dominante, tanto para la iglesia como para la comunidad académica, era la filosofía kantiana. El principal objetivo de este trabajo es discutir la influencia de la filosofía kantiana en la aceptación de las geometrías no euclidianas. Las conclusiones indican que existió una influencia de la filosofía kantiana en la aceptación de las Geometrías no euclidianas, sin embargo, fue el ideal de la Geometría euclidiana lo que provocó que la comunidad matemática no aceptara la existencia de nuevas geometrías. Las Geometrías no euclidianas fueron consideradas aberraciones del conocimiento humano y permanecieron a la sombra de las matemáticas hasta el momento en que se encontraron con los nuevos discursos producidos por la sociedad capitalista y fueron utilizadas para refutar el apriorismo kantiano.

Palabras clave: Geometrías no euclidianas. Filosofía. Kant. Historia de las Matemáticas. Geometría euclidiana.

Introdução

Em meados do século XIX, Nicolai Ivanovitsch Lobatschewsky (1793-1856) apresentou para a comunidade de matemáticos um trabalho que exibia a possibilidade da criação de uma geometria diferente da Geometria euclidiana. As denominadas Geometrias não-euclidianas colocam em questionamento a “tradicional” Geometria Euclidiana, considerada até então como verdade única e incontestável. Nessa mesma época, a filosofia dominante, tanto para a igreja como para a comunidade acadêmica, era a filosofia kantiana.

Nos livros de História da Matemática, é muito comum encontrarmos afirmações que dizem que as Geometrias não-euclidianas não foram aceitas com facilidade pela comunidade matemática da época e ficaram no campo obscuro da matemática por conta da filosofia kantiana que também é denominada criticismo.

> Parece que os matemáticos do final do século XVIII e início do XIX, concebiam a evidência” no sentido visual e perceptivo de Kant, e não como algo logicamente consistente – que segundo Kant não serviria para melhorar o conhecimento. Essa concepção foi, sem dúvida, um dos motivos da dificuldade de aceitação das novas Geometrias pela comunidade científica (FERREIRA, 2011, p. 36).

Mas qual foi de fato a influência do criticismo na aceitação das novas geometrias? Neste artigo analisamos como a filosofia kantiana influenciou na aceitação dessas novas geometrias pela comunidade de estudiosos.

Para atingir o objetivo desta pesquisa, iniciamos com uma breve retomada da história do surgimento das novas geometrias, em seguida, para que possamos compreender melhor a filosofia kantiana, introduziremos algumas das principais ideias do racionalismo, do empirismo e do criticismo. Após, traremos argumentos que nos permitem afirmar que foram aspectos ligados a própria Geometria Euclidiana os responsáveis pela aceitação das novas geometrias. A filosofia kantiana colaborou na aceitação das novas geometrias, mas mesmo aqueles que negavam a teoria do conhecimento de Kant, acabaram por usar concepções de conhecimentos tipicamente kantianas.

As Geometrias não-euclidianas passaram a ser aceitas pela comunidade científica a partir do momento que elas foram ao encontro com os novos discursos produzidos pela sociedade capitalista e utilizados para refutar o apriorismo kantiano até então não questionado.

Os cincos Postulados de Euclides

A Geometria Euclidiana foi considerada durante séculos como uma verdade única e incontestável. Tal geometria foi organizada por Euclides em 300 a.C. na obra "Os Elementos" e fundamentada em postulados, que são verdades aceitas sem demonstração. Os cinco postulados que se encontram na obra Os Elementos são:

> 1. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto
> 2. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.
> 3. E, como todo centro e distância, descrever um círculo.
> 4. E serem iguais entre si todos os ângulos retos
> 5. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores de que dois retos (EUCLIDES, 2009, p. 98).

Ao lermos os cinco postulados enunciados acima, percebemos que os quatro primeiros podem ser aceitos sem demonstração e com certa facilidade, diferentemente do quinto postulado que possui uma escrita mais densa, com a aparência de um teorema disfarçado em postulado. Durante muitos anos matemáticos tentaram, em vão, mostrar que tal postulado seria um teorema e, portanto, passível de ser demonstrado.

> Encontramos vários registros de tentativas de provas de todos os tipos, desde as mais simples, que foram facilmente refutadas, até as mais elaboradas que, no início do século XIX, apareceram na Europa e necessitavam de um olhar atento e rigoroso para serem desqualificadas como verdadeiras demonstrações do quinto postulado de Euclides. Mas todas, das mais ingênuas às mais sofisticadas, continham sempre um raciocínio circular que escondia, dentro da argumentação lógica de sua demonstração, as verdades do próprio quinto postulado que se queria provar (CABARITI, 2004, p.32).

Muitos matemáticos tentaram, em vão, demonstrar o quinto postulado. Ferreira (2010) destaca alguns: Ptolomeu (90 – 168 ac), Proclus (410-485), Nasir Eddin All Tusin (Nasiredin, 1201-1274), F. Commandino (1509-1575), C. S. Clavio (1537–1612), P.A. Cataldi (? -1626), G. A. Boreli (1608-1679), Giordano Vitale (1633-1711), John Wallis (1616-1703), Giovanni Girolamo Saccheri (1667-1733), Johann-Heinrich Lambert (1728-1777), John Playfair (1748-

1819) e Adrien-Marie Legendre (1752-1833).

Foram às tentativas de demonstração do quinto postulado que levaram a construção de novas geometrias, como veremos a seguir.

Novas geometrias surgem

O matemático Saccheri deu os primeiros passos em direção à Geometria Hiperbólica. Ele apresentou uma tentativa de demonstrar o quinto postulado que ficou registrada na história. Segundo Ferreira (2010, p. 29), a contribuição de Saccheri pode ser considerada uma das mais importantes da história, isso pois, os resultados que ele obteve foram utilizados por outros matemáticos como Legendre, Lobatschewsky e Riemann na construção de outras geometrias, diferentes da Geometria euclidiana.

> Convencido de que poderia demonstrar o quinto postulado, embrenhou-se num longo estudo com esse objetivo. Começou por considerar um tipo especial de quadriláteros (os quadriláteros de Saccheri), que se caracterizam por terem um par de lados opostos de mesma medida e perpendiculares a um terceiro lado (FERREIRA, 2011, p.29).

Ainda, de acordo com Ferreira (2011, p.31), Saccheri, ao trabalhar com o quadrilátero de Saccheri, teria encontrado retas que deveriam ser curvas, o que causou muita estranheza para um observador que desejava se manter em um espaço euclidiano. Utilizando o argumento que a natureza da reta havia sido transgredida, uma vez que para ele a reta não poderia ser curva, ele concluiu que havia demonstrado o quinto postulado.

Saccheri chegou muito próximo da construção de uma geometria diferente da Geometria Euclidiana, mas não aceitou os resultados em que chegou, mesmo sabendo que neles não havia nenhuma contradição. Era muito difícil admitir a possibilidade da existência de outras geometrias.

> No séc. XVIII, especialmente graças a Saccheri e de Lambert, e nos primeiros decênios do séc. XIX, graças a Legendre, essas discussões se acirraram, mas não levaram a conclusões, porque se achou absurdo admitir a possibilidade de uma Geometria diferente da de Euclides (ABBAGNANO, 2007, p.483).

Playfair demonstrou que o quinto postulado de Euclides podia ser substituído pelo seguinte postulado equivalente a ele: Dados um ponto P e uma reta r, existe uma única reta que passa pelo ponto P e é paralela a r. Essa é a maneira como escrevemos o quinto postulado na linguagem atual.

Após séculos de tentativas de demonstração do quinto postulado, foi somente no século

XIX que a negação deste quinto postulado de Euclides levou à criação de outras geometrias, tão consistentes quanto a Geometria Euclidiana.

> Os contextos sociais, além do econômico e do filosófico, das diversas civilizações influenciaram os matemáticos que produziram cada enunciado, mas os autores listados acima ainda estavam presos ao "universo euclidiano". Só em meados do séc. XIX é que alguns matemáticos começam a se desprender de ideias, estritamente euclidianas (FERREIRA, 2011, p. 35).

Existem duas maneiras de se negar o quinto postulado. A primeira maneira dá origem à Geometria Hiperbólica: Dados um ponto P e uma reta r, existe mais de uma reta que passa pelo ponto P e é paralela a r. A segundo dá origem a Geometria Elíptica: Dados um ponto P e uma reta r, não existe reta que passa pelo ponto P e é paralela a r.

Desenvolvendo estudos independentes, Gauss (177-1855), Johann Bolyai (1802-1860) também conhecido como (Janos Bolyai) e Nicolai Ivanovitsch Lobatschewsky (1793-1856) foram os responsáveis pela criação da Geometria Hiperbólica. Gauss foi o primeiro a pôr em dúvida o quinto postulado, no entanto:

> [...] ninguém estava aberto para o que Gauss suspeitava: que o postulado poderia não valer. Kastner[3] até salientou que somente uma pessoa maluca duvidaria da validade do postulado. Gauss guardou os seus pensamentos para si mesmo, embora tenha escrito suas ideias num diário científico que não foi descoberto até 43 anos depois de sua morte (MLODINOW, 2004, p. 121).

De acordo com Ferreira (2011, p.37), Gauss optou por não publicar suas descobertas, já que: "Ele tinha consciência de que a filosofia dominante entre matemáticos era a Kantiana, pois até a própria Igreja Romana a seguia".

Conforme Mlodinow (2004, p. 122), o matemático Farkas Bolyai, que era pai do também matemático Johann Bolyai (1775-1856), trocava correspondências com Gauss e passou boa parte da sua vida dedicado ao estudo do postulado das paralelas. O filho estudou matemática com seu pai que lhe despertou interesse pelo quinto postulado. Johann Bolyai "começou a aceitar o quinto postulado como um axioma independente e descobriu que era possível construir uma Geometria, baseada, em outro postulado, no qual, por um ponto no plano, se pudesse traçar uma infinitude de retas que não interceptassem uma linha nesse plano" (FERREIRA, 2011, p.39). Quando o filho mostrou os resultados que havia encontrado para o pai, ele os encaminhou para Gauss que o enviou a seguinte resposta:

[3] Foi professor de Gauss em Göttingen segundo (MLODINOW, 2004, p. 121).

> Se eu começasse com a afirmação de que não ouso louvar tal trabalho, você, é claro, se sobressaltaria; mas não posso proceder de outra forma, pois louvá-lo significaria louvar a mim mesmo, visto que todo conteúdo do trabalho, o caminho que seu filho seguiu, os resultados dos quais ele chegou, coincidem quase exatamente com as meditações que têm ocupado minha mente por (um período de) trinta a trinta e cinco anos. Por isto mesmo encontro-me surpreso ao extremo (BARBOSA, 1995, p. 42).

A reposta dada por Gauss fez com que Johann se desanimasse e não publicasse os resultados que havia encontrado. Lobatschewsky, um matemático russo, foi então o primeiro a publicar e apresentar suas ideias para a comunidade científica. De acordo com Ferreira (2011, p.40), "Lobatschewsky direcionou as suas atenções para uma Geometria independente da hipótese de Euclides. Em 1826, fez uma palestra no Departamento de Matemática e Física da Universidade de Kasan em que negava o quinto postulado de Euclides". E como era de se esperar suas ideias foram rejeitadas.

> Ao acompanharmos a evolução e a relutância da comunidade científica em aceitar a possibilidade de existência de uma Geometria na qual as figuras ilustrativas deveriam possuir "retas curvas", "triângulos cuja soma dos ângulos internos não fosse igual a dois retos" ou "inexistência de figuras semelhantes", pode-se intuir que a visualização de figuras "estranhas" foi um obstáculo na compreensão das novas Geometrias (FERREIRA, 2011, p. 43).

Bernhard Riemann (1826 -1866), discípulo de Gauss, foi o idealizador da Geometria Elíptica ou Riemanniana como é conhecida na comunidade matemática. Riemann, no ano de 1855, em uma dissertação sobre as hipóteses que fundamentam a Geometria "mostrava como, com mudanças oportunas no V postulado, seria possível obter não só a Geometria de Euclides e a Geometria de Lobatschewsky e Bolyai, mas também uma terceira Geometria (que mais tarde foi chamada de Riemann)" (ABBAGNANO, 2007, p.483).

Com o surgimento das Geometrias não-euclidianas é verificável a mudança na maneira de pensar o espaço e a verdade matemática e "dentro desta nova concepção, todos os sistemas que pareciam estar ligados à Geometria Euclidiana foram considerados falidos. Dentro destes sistemas estava o de Kant que objetivava fundamentar a Geometria Euclidiana" (LEAL, 2004, p.106).

> Depois do surgimento das geometrias não-euclidianas, alguns comentadores julgaram que as teses de Kant, principalmente as relativas ao espaço, não poderiam mais ser sustentadas tal era o seu comprometimento com a geometria euclidiana (LEAL, 2004, p.105).

Para melhor compreendermos este movimento, iremos a seguir apresentar algumas ideias da filosofia kantiana.

Emanuel Kant e a filosofia kantiana

O filósofo Emanuel Kant (1724-1804) foi posterior ao Renascimento europeu. Meneghetti (2010, p.81) alude que Kant encontrou-se situado entre três grandes correntes ideológicas do século XVII: o racionalismo de Leibniz, o empirismo de Hume e a ciência positiva físico-matemática de Newton.

O entendimento dos racionalistas é de que o conhecimento é dado exclusivamente pela razão. Isso fica claro nas posições de Descartes: "Não quis de maneira alguma começar rejeitando inteiramente qualquer uma das opiniões que por acaso haviam se insinuado outrora em minha confiança, sem que aí fossem introduzidas pela razão" (Descartes, 2002, p.6). Descartes foi um estudioso de filosofia, lógica e matemática e ele acreditava inicialmente que a análise dos geômetras e a álgebra poderiam contribuir com algo para o propósito dele.

> No entanto, analisando-as, percebi que, quanto à lógica, seus silogismos e a maior parte de seus outros preceitos servem mais para explicar aos outros as coisas já conhecidas, [...]do que para aprendê-las. Depois, no que concerne à análise dos antigos e à álgebra dos modernos, além de se estenderem apenas a assuntos muito abstratos, e de não parecerem de utilidade alguma, a primeira permanece sempre tão ligada à consideração das figuras que não pode propiciar a compreensão sem cansar muito a imaginação; e, na segunda, esteve-se de tal maneira sujeito a determinadas regras e cifras que se fez dela uma arte confusa e obscura que atrapalha o espírito, em vez de uma ciência que o cultiva. Por este motivo, considerei ser necessário buscar algum outro método que, contendo as vantagens desses três, estivesse desembaraçado de seus defeitos (DESCARTES, 2002, p.6).

Considerando que a análise dos geômetras e a álgebra não eram suficientes, Descartes criou seu próprio método. Para ele, seriam suficientes quatro preceitos: o primeiro era o de nunca aceitar algo como verdadeiro que não conhecesse claramente como tal; o segundo de repartir as dificuldades em quantas parcelas fossem possíveis e necessárias; o terceiro ordenar os pensamentos dos objetos mais simples até os mais compostos; e o último, o de efetuar em toda parte relações metódicas tão completas e revisões tão gerais nas quais tivesse a certeza de nada excluir.

No entendimento de Descarte, o conhecimento estrutura-se assim como está estruturada a matemática, de maneira racional e dedutiva: "Deleitava-me principalmente com as matemáticas, devido à certeza e à evidência de suas razões" (DESCARTES, 2002, p.3) e as demonstrações de geometria tinham lhe dado a oportunidade de imaginar como as coisas poderiam ser conhecidas pelos homens, assim:

> Essas longas séries de razões, todas simples e fáceis, que os geômetras costumam utilizar para chegar às suas mais difíceis demonstrações, tinham-me dado à oportunidade de imaginar que todas as coisas com a possibilidade de serem conhecidas pelos homens seguem-se umas às outras do mesmo modo e que, uma vez que nos abstenhamos apenas de aceitar por verdadeira qualquer uma que não o seja, e que observemos sempre a ordem necessária para deduzi-las umas das outras, não pode existir nenhuma delas tão afastada a que não se chegue no final, nem tão escondida que não se descubra (DESCARTES, 2002, p.6).

O empirismo se dá por meio de experiências sensíveis e da indução, Hume identifica sua filosofia com filosofia moral, ou ciência da natureza humana. No empirismo, a matemática não tem o destaque que tinha no racionalismo, e a experiência e observação são as bases de todas as ciências.

No entanto, para Hume os raciocínios demonstrativos são empregados unicamente nas ciências matemáticas e não nas ciências morais. Nem mesmo a Geometria é capaz de conduzir ao conhecimento quando é solicitada para auxiliar a filosofia natural. Os raciocínios matemáticos são usados para auxiliar a experiência na descoberta de leis e para determinar a ação dessas leis em casos particulares, quando ela depende de graus exatos de distância e de quantidade.

> Assim, por exemplo, uma lei de movimentos descoberta pela experiência é a que diz que o momento ou a força de um corpo em movimento está em razão ou proporção de sua massa e de sua velocidade, e, por conseguinte, que uma pequena força pode remover os maiores obstáculos ou levantar os maiores pesos se, mediante uma invenção ou mecanismo, pudermos aumentar a velocidade da força até fazê-la superar a força antagônica. A geometria auxilia-nos a aplicar esta lei, dando-nos as dimensões exatas de todas as partes e de todas as figuras que fazem parte de qualquer tipo de máquinas, mas, ainda assim, a descoberta da própria lei é devida unicamente à experiência; e todos os raciocínios abstratos do mundo não poderão jamais nos levar a dar um passo para chegar a conhecê-la (HUME, 2006, p.24).

Logo, o ideal do conhecimento da natureza deixou de se inspirar no modelo da geometria a fim de optar pelo da aritmética. Meneghetti (2010, p.67) cita que, para Newton (1643-1727), esse objeto das ciências deixa de ser as coisas e passa a ser o conhecimento das coisas. Todas as ciências, em especial a matemática, deveriam se desenvolver para atender as necessidades práticas. Newton valorizou o conhecimento empírico apesar de tratar de questões fundamentais da metafísica, como as que se referem à natureza do tempo, espaço e movimento. Ele não se interessava por raciocínios matemáticos que não fossem destinados à aplicação de problemas físicos. A matemática era um método de solução dos problemas apresentados pela experiência.

> As leis matemáticas não somente são dedutíveis dos fenômenos físicos, mas também verificáveis por meio de tais fenômenos. A experiência não somente é a condição inicial como também a condição final de todo o conhecimento. Parece, portanto, que em Newton a certeza jaz na experiência, sendo a matemática subordina a essa última (MENEGHETTI, 2010 p.69).

Outro matemático que fez críticas ao empirismo foi Leibniz (1646-1716). Para ele, o empirismo havia suprimido totalmente a objetividade do conhecimento e a razão não poderia ser reduzida a puro fato, já que "se a razão fosse reduzida a puro fato, como pretendia o empirismo, deixaria de ser razão" (Meneghetti, 2010, p.74).

Com relação à matemática:

> Leibniz entende que as verdades matemáticas, as verdades da lógica pura, são verdades da razão[4]; as verdades da experiência física, as verdades históricas, são verdades de fato. Assim, para a matemática, ele anula a verdade de fato, a matemática consiste apenas em verdades de razão. As verdades da razão não podem ser oriundas da experiência, são inatas, estão logicamente impressas (MENEGHETTI, 2010, p.74).

Percebemos então que a filosofia kantiana surge como uma crítica ao empirismo e ao racionalismo, e os sistemas de ideias de Kant foi denominado criticismo. Segundo Meneghetti (2010, p.69), "Tudo indica que Kant buscou estabelecer as bases filosóficas da teoria físico-matemática de Newton". No entanto, apesar de ter uma forte relação com as propostas de Newton, este último pode ser considerado um empirista e Kant posicionou-se entre o empirismo e o racionalismo. O criticismo concede tanta importância à razão como à experiência no processo de construção do conhecimento. Para Kant, o conhecimento geométrico, enquanto conhecimento, só pode existir a partir do sujeito. Não podemos negar a existência empírica da Matemática, ela está escrita nos livros, nos cadernos etc. Porém, seus objetos, segundo Kant, referem-se somente à razão. A Geometria deixa de ser um conhecimento que existe eternamente e independente do ser humano, pois ela, como todo conhecimento, existe porque existe o sujeito que a conhece.

> Enquanto os racionalistas e os empiristas centravam sua atenção no objeto, Kant centrava-se sobre o sujeito que conhece; a causalidade em Kant enraíza-

[4] As verdades de razão são aquelas que enunciam que algo é, de modo que não pode ser de outra forma; ao contrário, as verdades de fato são aquelas que enunciam que algo é de uma certa maneira, mas que poderia ser de outra (MENEGHETTI, 2010, p.74).

> se no sujeito. Para ele, aquilo que o eu é quando se torna o sujeito que conhece, o é em relação ao objeto a conhecer; é aquilo que o objeto a conhecer é quando deixa de ser mera sensação, o não "em si", mas em relação ao sujeito que conhece. Nem o sujeito que conhece é "e, si", nem o objeto a conhecer é "em si" (MENEGHETTI, 2010, p. 81).

Segundo Meneghetti (2010, p.84), Kant tomou do empirismo a experiência, parte inicial de todo conhecimento, e, do racionalismo, as condições a priori, universalidade e necessidade, pois a ciências, apesar de partir da experiência, torna-se independente dela.

Tomando como base as ideias apresentadas acerca da filosofia kantiana, faremos a seguir uma discussão a cerca da sua influência na aceitação das Geometrias não-euclidianas.

Geometrias não-euclidianas e a filosofia Kantiana

A Geometria Euclidiana durante séculos permaneceu como conhecimento absoluto e verdadeiro. Segundo Brito (1995, p.136), "Poderíamos encontrar, especialmente nos trabalhos britânicos, afirmações como: é tão certo que Deus existe, assim como é certo que a soma dos ângulos de um triângulo é 180º".

Por outro lado:

> A geometria não-euclidiana pode ser vista como a noção de que a soma dos ângulos de um triângulo poderia não ser 180º. Repentinamente, a superestrutura inteira da ética, da religião, e a esperança de se encontrar um conhecimento verdadeiro nas ciências entrou em colapso. Essa esperança se apoiava na crença de que já existia pelo menos uma parte de tal conhecimento, mas, agora que já não mais havia aquela certeza de que a soma dos ângulos era 180º, então não havia mais a certeza de Deus (DAVIS, E HERSH, *apud* BRITO, 1995, p. 136).

Ao apresentar este cenário, não podemos estranhar que a reação imediata tenha sido a rejeição dessas novas geometrias, rejeição essa que Gauss já previa, e que possivelmente pode tê-lo levado a não publicar os resultados que encontrou. Gauss tinha conhecimento que os filósofos de seu tempo aceitavam os pensamentos de Kant e que, dentre os matemáticos, a filosofia que dominava era a kantiana e que até a própria Igreja Romana seguia essa filosofia.

Para Brito (1995, p. 105), Newton considerava o tempo e o espaço absoluto e não tinha outra opção a não ser usar a Geometria Euclidiana, afinal, duvidar de Euclides seria uma heresia quase tão grande como ser ateu para aquele período. Com as críticas proferidas por Leibniz acerca da concepção de espaço de Newton, na primeira metade do século XVIII se inicia a separação entre a Matemática e a Física. Leibniz defendia a adoção de conceitos relativos de tempo e espaço. Já o espaço para Newton era um recipiente absoluto, infinito, tridimensional, independente da matéria e que poderia ser vazio. A autoridade máxima para Kant, nas ciências naturais, era Newton. Nas palavras de Brito (1995, p.111) “Apesar de todas as críticas dos empiristas e a Leibniz à ideia newtoniana de espaço, foi esta última que prevaleceu e Kant, um século depois do físico inglês, também afirmava a existência de um espaço como um contender, infinito e absoluto”.

Para Kant (2001), o espaço não é um conceito empírico, derivado de experiências exteriores, ele é uma representação necessária, a priori, que serve de fundamento a todas as intuições externas. O espaço não é um conceito discursivo, ou, como se diz, universal das relações das coisas em geral, mas uma instituição pura. O espaço é representado como uma grandeza infinita dada. A primitiva representação do espaço é, pois, uma intuição “a priori” e não um conceito. O espaço é o fundamento das verdades geométricas.

Ao citar a Geometria, Kant enfatiza que essa é uma ciência que determina a priori as propriedades do espaço:

> A Geometria é uma ciência que determina sinteticamente, e, portanto, “a priori”, as propriedades do espaço. Que deve ser, pois, a representação do espaço, para que tal conhecimento seja possível? Deve ser, primeiramente, uma intuição; porque é impossível tirar de um simples conceito proposições que o ultrapassem, como se verifica em Geometria. Mas essa intuição deve achar-se em nós, “a priori”, quer dizer, anteriormente a toda percepção de um objeto, e, por conseguinte, ser pura e não empírica. Efetivamente, as proposições geométricas, como esta por exemplo: o espaço não tem mais que três dimensões, são todas apodíticas, quer dizer que elas implicam a consciência de sua necessidade; mas tais proposições não podem ser julgamentos empíricos ou de experiência, nem deles derivar (KANT, 2001, p.22)

Kant (2001) salienta ainda em relação à Geometria, que ela não precisa pedir certificado à filosofia para a pura e legítima origem de seu conceito fundamental de espaço:

> A Geometria segue os seus passos seguros por conhecimentos puramente “a priori", sem necessidade de pedir um certificado à Filosofia para a pura e legítima origem de seu conceito fundamental de espaço. Entretanto, nesta ciência o uso do conceito alcança somente ao mundo exterior sensível de que espaço é a forma pura de sua intuição. Tem, por conseguinte, todo conhecimento geométrico, uma evidência imediata, porque ela se funda sobre uma intuição “a priori” e que os objetos são dados a priori” (quanto à forma) na intuição pelo conhecimento mesmo (KANT, 2001, p.22).

Percebemos que essa afirmação de Kant pode ter levado Gauss a não publicar seus trabalhos acerca das Geometrias não-euclidianas e a comunidade matemática a ter dificuldades em aceitar as novas geometrias. Para Brito (1995), a comunidade matemática do final do século

XVIII e início do século XIX entendiam como evidente algo passível de visão, assim como os antigos gregos e não como algo logicamente dado.

Assim, para eles, aceitar a existência das Geometrias não-euclidianas era aceitar a existência de muitas outras geometrias. Significava aceitar que a Geometria Euclidiana não era a única geometria possível para explicar o universo. Era aceitar que para uma geometria ser válida, ela poderia ser baseada em um postulado não evidente. Isso tornou a aceitação das novas geometrias muito difícil pela comunidade científica.

É identificado por Brito (1195), passagens que evidenciam que a filosofia kantiana pode ter de certa forma dificultado a aceitação das Geometrias não-euclidianas pela comunidade matemática da época.

> Há uma passagem nos *Prolegômenos* na qual podemos interpretar a impossibilidade da invenção de uma geometria diferente da euclidiana. Nela, Kant escreve: "as proposições da geometria não podem ser relacionadas com as determinações de uma simples criação de nossa fantasia poética e nem seguramente com objetos reais [...] A sensibilidade, cuja forma a geometria toma para fundamento, é a condição de possibilidade dos fenômenos externos, não podendo, portanto, estes conter outra coisa senão o que a geometria lhes prescreve" (BRITO, 1995, p.118).

Mas, não podemos dizer que as Geometrias não-euclidianas derrubaram o apriorismo kantiano, pois:

> Com a teoria do conhecimento de Kant, o conhecimento deixa de ser puro reflexo da realidade. Além disso, o criticismo abre a possibilidade da existência de uma forma de pensamento que não se submete à realidade empírica, qual seja, o pensamento lógico (BRITO, 1995, p.116).

Para Brito (1995), mesmo com a interpretação dada pelos matemáticos da época para a filosofia kantiana podemos perceber a influência dessa mesma teoria na formação das geometrias não-euclidianas:

> Apesar da interpretação da teoria do conhecimento de Kant, realizada pelos matemáticos da época, dificultar a aceitação das novas geometrias, podemos perceber a influência dessa mesma teoria na formação das geometrias não-euclidianas, por uma afirmação de Lobatschewski: "na realidade, na natureza, nós conhecemos apenas o movimento, é ele que possibilita a percepção através dos sentidos. Todos os outros conceitos, por exemplo, aqueles da geometria, são produzidos artificialmente por nosso espírito e tirados das propriedades do movimento, e por esta razão, o espaço ele mesmo, não existe para nós." Ou seja, Lobatschewski entendia o conhecimento geométrico como algo produzido pelo sujeito e dependente deste, uma concepção de conhecimento tipicamente kantiana, apensar de negar explicitamente a noção kantiana de espaço (BRITO, 1995, p. 119).

Essas escritas indicam que, mesmo matemáticos como Lobatschewski que negavam a teoria do conhecimento de Kant, acabaram por usar concepções de conhecimentos tipicamente kantianas.

De acordo com Brito (1995), as Geometrias não-euclidianas foram consideradas, até aproximadamente 1870, como aberrações do conhecimento matemático. Com as teorias da evolução de Darwin, os ideais do liberalismo econômico e o naturalismo científico passaram a questionar os conceitos tidos como a priori e foi nessa época que as Geometrias não-euclidianas passaram a ser consideradas um saber científico.

> Por essa época, os ideais do Liberalismo econômico, o naturalismo científico e as teorias da evolução de Darwin começaram a colocar em questão tudo o que fosse a priori – os direitos naturais; a autoridade de algumas leis científicas; as leis que pregam a ética humanitária. A única lei que passou a ser aceita era a da luta pela sobrevivência, sobrevivência do mais forte. É nesse contexto que as Geometrias não-euclidianas ganharam status de saber científico e foram utilizadas para rebater as teses apriorísticas colocadas por Kant na Estética Fundamental (BRITO,1995, p.133).

Brito (1995, p.136) destaca ainda que as Geometrias não-euclidianas passam a ser aceitas pela comunidade científica a partir do momento em que elas foram em encontro com os novos discursos produzidos pela sociedade capitalista e utilizados para refutar o apriorismo kantiano.

Considerações Finais

Apresentamos neste artigo o que entendemos por influência da teoria kantiana na aceitação das Geometrias não-euclidianas no momento de seu surgimento.

Afirmamos que a filosofia kantiana influenciou no aceite das Geometrias não-euclidianas pela comunidade matemática da época, já que essa era a filosofia dominante. A filosofia kantiana influenciou nesse aceite, na medida em que, os pensamentos de Kant sobre o espaço, que para ele é uma representação necessária, a priori, forneceram interpretações para a comunidade científica que não possibilitavam a existência de outras geometrias. A filosofia kantiana influenciou, na medida em que, alguns de seus escritos trazem a impossibilidade da invenção de uma geometria diferente da euclidiana. No entanto, a grande influência foi da própria Geometria Euclidiana que era considerada uma verdade única e incontestável.

Mas, não é porque Kant acreditava que a estrutura do espaço era euclidiana que seus argumentos são válidos apenas para a Geometria de Euclides. Não podemos afirmar que as

Geometrias não-euclidianas derrubaram o apriorismo kantiano do espaço. Mesmo porque até mesmo os matemáticos que aceitavam o surgimento das novas geometrias e negavam o criticismo acabavam por utilizar concepções de conhecimentos tipicamente kantianos.

Consideramos que houve influência da filosofia kantiana na aceitação das Geometrias não-euclidianas, no entanto foi o ideal da Geometria Euclidiana que fez com que a comunidade matemática não aceitasse a existência das novas geometrias. As Geometrias não-euclidianas foram consideradas aberrações do conhecimento humano e permaneceram no obscuro da matemática até o momento que elas foram de encontro com os novos discursos produzidos pela sociedade capitalista, aí então elas foram utilizadas para refutar o apriorismo kantiano.

Referências

ABBAGNANO, N. **Dicionário de Filosofia**; tradução da 1ª edição brasileira coordenada e revista por BOSSI, A., BENEDETTI, I. C. 5º ed., São Paulo: Martins Fontes, 2007.

BARBOSA, J. L. M. **Geometria hiperbólica**. IMPA, Rio de Janeiro: IMPA, 1995.

BRITO, A. J. **Geometrias não-euclidianas**: Um estudo histórico-pedagógico. 1995. 187 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, 1995.

CABARITI, E. **Geometria Hiperbólica:** uma proposta didática em ambiente informatizado. 2004. 131 f. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.

DESCARTES, R. **Discurso do Método**. Tradução: Enrico Corvisieri. eBooksBrasil: Acrópolis, 2002. Disponível em: http://br.egroups.com/group/acropolis. Acesso em: 12 maio 2022.

EUCLIDES. **Os Elementos/Euclides**; tradução e introdução de Irineu Bicudo. – São Paulo: Editora Unesp, 2009.

FERREIRA, L. **Uma proposta de ensino de Geometria Hiperbólica**: “construção do Plano de Poincaré” com o uso do software Geogebra. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática) – Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, Paraná, 2011. Disponível em: http://repositorio.uem.br:8080/jspui/handle/1/4513. Acesso em: 25 junho 2022.

HUME, D. **Investigação Acerca do Entendimento Humano** [1748]. Tradução de AIEX, A. eBooksBrasil: Acrópolis, 2006. Disponível em: http://br.egroups.com/group/acropolis. Acesso em: 05 abril 2023.

KANT, E. **Crítica da Razão Pura.** Tradução de MERGE, R. de. eBooksBrasil: Acrópolis, 2001. Disponível em: http://br.egroups.com/group/acropolis. Acesso em: 12 abril 2023.

LEAL, G. Kant e as Geometrias não-euclidianas. **Revista Ciências Humanas**, São Paulo, v.4, n.2, p.103-108, 2004.

MENEGHETTI, R. C. G. **Constituição do saber matemático:** reflexões filosóficas e históricas.

Londrina: EDUEL, 2010.

MLODINOW, L. **A Janela de Euclides**. São Paulo: Geração Editorial, 2004.