Sociedade Brasileira de Educação Matemática

Funções Exponenciais e Lógica Recursiva com Torre de Hanói: Pensamento Computacional e Construcionismo

Greiton Toledo de Azevedo[1]
Ulisses Ferreira de Araújo [2]

Resumo: Esta pesquisa analisa o processo de construção do conhecimento de funções exponenciais, empregando o desenvolvimento lógico-recursivo das peças da Torre de Hanói e transformações gráficas computacionais no contexto da formação em Matemática do Ensino Médio. Conduzido no Laboratório de Inovações do IF-Goiano, os participantes elaboraram representações de torres de Hanói e desenvolveram modelos computacionais recursivos. Os dados, provenientes de ferramentas computacionais, fotografias e entrevistas, foram analisados qualitativamente à luz do Pensamento Computacional e Construcionismo. Através da *Triangulação de Dados*, foram estabelecidas categorias de análise interdependentes. Os resultados indicam que a construção do conhecimento da Função Exponencial é um processo dinâmico e não-linear, que envolve a reflexão-argumentação de conceitos intuitivos-recursivos e lógicos matemáticos. A construção ocorre por meio da transição bidirecional da depuração de significados conceituais-procedimentais e algébrico-geométricos, valorizando campos semânticos compartilhados. Esses resultados reforçam a relevância de um contexto de aprendizagem intelectualmente ativo, evitando que os estudantes se tornem meros reprodutores de informações.

Palavras-chave: Função Exponencial. Geogebra. Lógica Recursiva. Construcionismo.

Exponential Functions and Recursive Logic with Tower of Hanoi: Computational Thinking and Constructionism

Abstract: This research examines the knowledge construction process in exponential functions, employing the logical-recursive development of the Tower of Hanoi puzzle pieces and computational graphic transformations in the context of high school Mathematics education. Conducted at the Innovation Laboratory of IF-Goiano, participants crafted Tower of Hanoi representations and developed recursive computational models. Data, derived from computational tools, photography, and interviews, were qualitatively analyzed through the lenses of Computational Thinking and Constructionism. Through Data Triangulation, interdependent analysis categories were established. Results indicate that the construction of Exponential Function knowledge is a dynamic and nonlinear process, involving reflection-argumentation of intuitive-recursive and mathematical logical concepts. Construction occurs through the bidirectional transition of refining conceptual-procedural and algebraic-geometric meanings, emphasizing shared semantic aspects. These findings underscore the relevance of an intellectually active learning context, preventing students from becoming mere information reproducers.

Keywords: Exponential Function. GeoGebra. Recursive Logic. Constructionism.

Funciones Exponenciales y Lógica Recursiva con la Torre de Hanoi: Pensamiento Computacional y Construccionismo

Resumen: Esta investigación examina el proceso de construcción del conocimiento en funciones exponenciales, empleando el desarrollo lógico-recursivo de las piezas del rompecabezas de la Torre de Hanói y transformaciones gráficas computacionales en el contexto de la educación matemática de la escuela secundaria. Realizado en el Laboratorio de Innovación del IF-Goiano, los participantes elaboraron representaciones de la Torre de Hanói y desarrollaron modelos computacionales recursivos. Los datos, provenientes de herramientas computacionales, fotografías y entrevistas, fueron analizados

[1] Pós-Doutorando na Universidade de São Paulo (USP). Doutor em Educação Matemática (Unesp/Rutgers). Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano (IF-Goiano). Goiânia, GO, Brasil. E-mail: greiton.azevedo@ifgoiano.edu.br - Orcid: https://orcid.org/0000-0002-2681-1915.
[2] Professor Titular Sênior. Escola de Artes, Ciências e Humanidades da Universidade de São Paulo. São Paulo, SP, Brasil. E-mail: uliarau@usp.br - Orcid: https://orcid.org/0000-0002-2955-8281.

eISSN 2317-904X DOI: 10.37001/emr.v29i84.3566 Recebido • 04/08/2023 | Aprovado • 30/06/2024 | Publicado • 31/07/2024

cualitativamente a la luz del Pensamiento Computacional y el Construccionismo. A través de la Triangulación de Datos, se establecieron categorías de análisis interdependientes. Los resultados indican que la construcción del conocimiento de la Función Exponencial es un proceso dinámico y no lineal, que implica la reflexión-argumentación de conceptos intuitivos-recursivos y lógico-matemáticos. La construcción ocurre mediante la transición bidireccional del refinamiento de significados conceptuales-procedimentales y algebraico-geométricos, enfatizando aspectos semánticos compartidos. Estos hallazgos subrayan la relevancia de un contexto de aprendizaje intelectualmente activo, evitando que los estudiantes se conviertan en meros reproductores de información.

Palabras clave: Función Exponencial. Geogebra. Lógica Recursiva. Construccionismo.

1 Introdução

A função exponencial é um campo de estudo fundamental no contexto de formação em Matemática no nível do Ensino Médio, cuja relevância se estende por diversas áreas, incluindo economia, modelagem de crescimento, análise de fenômenos térmicos, medicina, estatística e computação. Em consonância com essa importância, é imperativo favorecer abordagens pedagógicas que capacitem os estudantes do Ensino Médio a desenvolverem um entendimento significativo sobre as funções exponenciais. Nesse sentido, ao propor novas formas de aprender Matemática, defendemos a não restrição da formação em Matemática à dicotomia pergunta-resposta, mas a investigação de problemas abertos, o desenvolvimento de soluções e a construção ativa de modelos matemáticos *em-uso*. O conhecimento matemático *em-uso* torna-se "[...] valorizado pelo estudante por ser útil, por ser possível compartilhar com outras pessoas e por combinar com o estilo pessoal e criativo de cada indivíduo" (Papert, 2008, p. 173).

A aprendizagem da função exponencial pode ir além dos limites impostos pelo conteúdo programático, das burocracias contraproducentes e testes estandardizados (Freitas, 2012), a fim de proporcionar aos estudantes a capacidade de pensar, formular hipóteses e solucionar situações-problema de forma intelectualmente significativa (Azevedo, 2022). Nesse ínterim, torna-se fecundo possibilitar situações para que os estudantes "[analisem] e estabeleçam relações, com apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial (...) expressas em tabelas e em plano cartesiano, para [resolver problemas]" (Brasil, 2018, p. 539).

Partimos do princípio de que os estudantes do Ensino Médio são capazes de desempenhar um papel ativo na construção do conhecimento de funções exponenciais, mesmo diante da imprevisibilidade dinâmica inerente ao processo de aprendizagem e à produção intelectual em Matemática. Nesse contexto, destacamos a produção de Torres de Hanói e a investigação ativa de transformações isométricas como estratégias para explorar fenômenos exponenciais. A compreensão dos movimentos mínimos envolvidos nos fenômenos das Torres de Hanói e nas transformações geométricas pode incorporar elementos lógicos e integrados de álgebra e geometria, sem considerar essas estratégias como soluções absolutistas/definitivas.

Essa abordagem pode proporcionar aos estudantes uma compreensão menos restritiva da função exponencial e de suas transformações geométricas, permitindo-lhes construir conhecimentos matemáticos de forma problematizada e ativa. Com base no exposto, o objetivo deste trabalho é analisar o processo de construção do conhecimento de funções exponenciais, utilizando o desenvolvimento lógico-recursivo das peças da Torre de Hanói e transformações gráficas computacionais no contexto da formação em Matemática do Ensino Médio.

A pesquisa foi conduzida com estudantes do 1º ano do Ensino Médio no Laboratório de Inovações do Instituto Federal Goiano. Durante o processo, os participantes foram engajados na elaboração de representações das torres de Hanói e na criação de modelos computacionais recursivos. Os dados obtidos, provenientes de uma variedade de fontes, incluindo ferramentas computacionais, fotografias e entrevistas, foram submetidos a uma análise qualitativa, contextualizada à luz do Pensamento Computacional (PC) e pelo Construcionismo. Com base nessas considerações iniciais, que delineiam a motivação subjacente a este estudo, avançamos para a próxima seção, na qual serão apresentadas as lentes teóricas desta pesquisa.

2 Lentes Teóricas que subsidiam a pesquisa

A perspectiva teórica adotada para analisar o processo de construção do conhecimento matemático, com foco particular na função exponencial, está enraizada nos princípios do constructo teórico do Construcionismo. Essa abordagem, de forma integrada, estabelece um diálogo consistente com os fundamentos do Pensamento Computacional (PC), utilizando métodos de análise de padrões, algoritmos e abstração para explorar a natureza recursiva e exponencial por meio do *software Geogebra*. Proveniente das contribuições teóricas e epistemológicas de Seymour Papert (1980; 1996; 2008), o Construcionismo desconsidera a visão mecanizada de aprendizagem como mera transmissão de conhecimento, defendendo uma abordagem mais ativa, reflexiva e intelectualmente engajada dos estudantes (Azevedo, 2022).

Essa perspectiva teórica corrobora a concepção de que o estudante constrói o seu próprio conhecimento e o seu desenvolvimento cognitivo é empreendido como um processo ativo de construção das estruturas mentais, no qual o conhecimento não pode ser simplesmente transmitido de uma pessoa a outra ou vice-versa. Até porque, mesmo quando parece que estamos "transmitindo com sucesso informações, dizendo-as, se pudéssemos ver os processos cerebrais em funcionamento, observaríamos que nosso interlocutor está *reconstruindo* uma versão pessoal das informações que pensamos estar *transferindo*" (Papert, 2008, p. 137, grifos do autor). Nenhum conhecimento "(...) pode ser depositado de maneira incólume na cabeça do estudante de forma a caracterizar uma transmissão direta" (Lévy, 1999, p. 79).

O conhecimento construído se conjuga através das vivências histórico-culturais e imagéticas do estudante e leva em conta as suas vivências e intepretações individuais de mundo, que podem ser ricas ou não, dependendo exclusivamente do trabalho do professor. O Construcionismo preconiza que "[...] quanto mais liberdade de expressão os alunos experimentarem, mais fiel à sua própria constituição a expressão será" (Blikstein, 2008, p. 847, tradução nossa). Ao valorizar o significado e o sentido que os estudantes atribuem aos artefatos e o seu engajamento científico, o Construcionismo reverbera que "[...] o conceito de construção ativa se torna mais rico e mais multifacetado e muito mais profundo em suas implicações" (Papert, 1991, p. 1, tradução nossa), haja vista que o significado e o sentido dos fenômenos se constituem ao longo do processo de construção intelectualmente ativa e não só no resultado final. O Construcionismo se opõe ao entendimento de que "[...] para uma melhor construção de conhecimento matemático deve haver um aperfeiçoamento da instrução, sem, no entanto, colocar em dúvida o valor da instrução como tal. Isso seria tolo" (Papert, 2008, p. 124).

Em sintonia com a abordagem Construcionista, o Pensamento Computacional se evidencia por Papert, na década de 1980, como possibilidade de forjar ideias intelectuais à construção de conhecimento em distintas áreas, entre as quais se inclui a Matemática. Um entendimento comum consiste na questão de que pensar computacionalmente pressupõe o uso do computador, confundindo esse pensamento com a manipulação de máquinas ou desenvolvimento de um programa de computador. O PC pode ser visto como um modo de forjar ideias como pensador intelectualmente inventivo (Papert, 1996). A autora Wing (2010, p. 1, tradução nossa) corrobora esse entendimento e situa o PC "na formulação de problemas e suas soluções para que elas sejam representadas de forma que possam ser efetivamente realizadas e aplicadas em situações reais", desmistificando a ideia de que PC se limita à capacidade de manusear linguagem de programação (e.g. *Python*, *Scratch*) e executar tarefas algorítmicas.

Embora haja várias definições do Pensamento Computacional que atribuem significados próprios, há um consenso de que ele poderia vir a ser reconhecido como capacidade de gerar ideias e transformá-las em um processo sistemático no qual se constrói soluções para problemas encaminhados, não necessariamente derivados da ciência da Computação, mas aplicáveis em qualquer domínio do conhecimento à sociedade (Barba, 2016; Wing, 2011; Papert, 1996; Azevedo, 2022; Azevedo; Maltempi, 2020; 2021; 2022; 2023; Azevedo, Araújo, 2024).

Nessa perspectiva, situamos a abstração a partir da visão decorrente do Pensamento

Computacional, em harmonia com o constructo teórico do Construcionismo, acerca do *pensar sobre o pensar*, possibilitado pelo confronto das ideias iniciais do estudante com o resultado obtido na execução de um programa (Torre de Hanói), que o leva a traçar novas estratégias para a solução buscada, favorecendo o aprofundamento da compreensão lógico-analítica de um determinado conhecimento. O pensar com as máquinas [e o pensar sobre o pensar] contribui para que o estudante se torne um epistemólogo; e que possa ter uma forma alternativa de pensar.

A respeito disso, as ideias do Pensamento Computacional se estruturam na concepção de que os alunos possam: coordenar e construir novos conhecimentos (Papert, 1996); desenvolver a lógica de programação – análise, abstração e depuração (Wing, 2011; Barba, 2016; Denning, 2017); e propor ideias e soluções a problemas encaminhados em sociedade (Azevedo, 2022). Na particularidade da construção de conhecimento de função exponencial, no que tange à construção de Torre de Hanói e simulações de funções exponenciais correlatas no *Geogebra*, o trabalho com o Pensamento Computacional não é o de se limitar ao código em si e seus derivados procedimentais. Pelo contrário, é o modo de aprimorar o encadeamento da lógica e desenvolver a concatenação de ideias para resolver problemas de forma significativa.

A convergência entre a perspectiva do Pensamento Computacional e os princípios fundamentais do Construcionismo é evidente, ressaltando a ênfase na construção ativa do conhecimento pelo aprendiz. Essa abordagem capacita os indivíduos a pensarem de maneira crítica, desenvolverem soluções e resolverem problemas de forma autônoma e intelectualmente significativa. Ao considerarmos essas duas correntes teóricas como base, avançamos para a próxima seção do presente estudo, na qual serão explorados sistematicamente os cenários, participantes e metodologias adotadas, especificamente no contexto da Formação Matemática.

3 Percurso Metodológico de Pesquisa

Com o objetivo de analisar a construção de conhecimento de funções exponenciais por meio da elaboração das Torres de Hanói e do desenvolvimento de modelos gráficos, esta pesquisa se fundamenta nos princípios qualitativos de pesquisa (Bogdan; Biklen, 1994). Isso ocorre porque buscamos explorar aspectos humanos sem depender de medições, sem adotar métodos pré-definidos e, portanto, sem ficar limitados a quantificadores e cálculos repetitivos.

Reconhecemos que sempre há um aspecto subjetivo a ser considerado durante a investigação naturalística. O estudo foi conduzido no laboratório de inovações, com a participação de 30 estudantes do Ensino Médio do Instituto Federal Goiano (IF-Goiano), campus Ipameri. O trabalho pedagógico aconteceu em cinco encontros, com duração de três horas cada. Utilizamos ilustrações e transcrições dos discursos dos participantes para enfatizar o contexto de Formação em Matemática. Os dados foram registrados por meio de diário de campo, fotografias, filmagens e artefatos (Torres de Hanói e modelos gráficos), além de programas computacionais. Ressaltamos que a Torre de Hanói é um quebra-cabeça matemático composto por três hastes verticais e discos de diferentes tamanhos, conforme ilustração a seguir.

Tabela 1 - Torre de Hanói e suas regras de jogabilidade

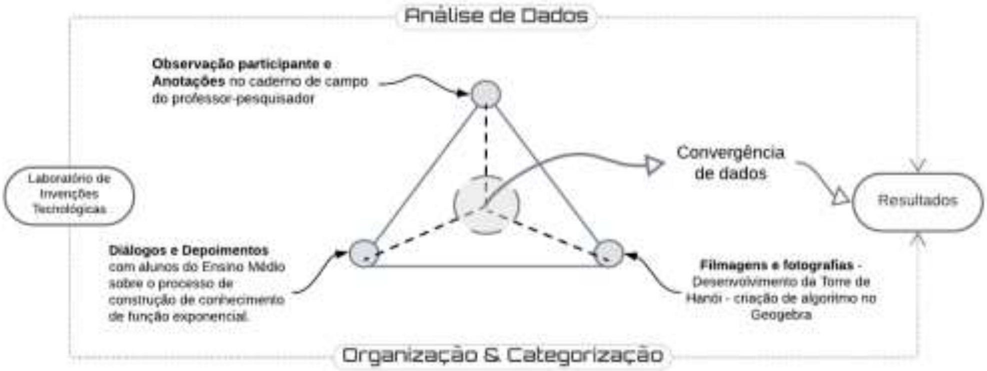
Torre de Hanói	Regras do jogo
	1. É permitido movimentar somente um disco por vez no jogo da Torre de Hanói. 2. É proibido colocar um disco de tamanho maior em cima de um disco de tamanho menor. 3. Para movimentar os discos, é necessário utilizar a haste intermediária, caso seja preciso transferir os discos de uma haste para outra.

Fonte: Elaborada pelo primeiro autor.

A Torre de Hanói foi empregada como uma ferramenta auxiliar para promover a compreensão de conceitos relacionados com funções exponenciais, recursividade e transformações geométricas no *Geogebra*. Utilizamos materiais customizados para construir as torres. Os diálogos gravados durante o processo de aprendizagem foram transcritos com o *software* de IA da *Reshape*. Os dados foram organizados e categorizados no *Excel* conforme padrões evidenciados. Após a tabulação e pré-análise do material coletado, selecionamos criteriosamente as partes que apresentavam convergência direta com o objeto desta pesquisa.

Realizamos a sistematização dos dados provenientes de uma variedade de instrumentos, explorando o processo de construção do conhecimento de função exponencial por meio de sistematização, descrição e inferências analíticas. Estabelecemos conexões entre os dados, apresentando-os de maneira contextualizada e sequencial na seção de *Apresentação e Análise dos Dados*. Essa convergência de múltiplos registros em torno de um mesmo ponto focal adota uma abordagem qualitativa de pesquisa naturalística, sendo concebida como *Triangulação dos Dados*. De acordo com Denzin e Lincoln (2000), a Triangulação contribui para conferir maior rigor, abrangência, complexidade e profundidade à pesquisa, não sendo encarada como uma estratégia de validação, mas sim como uma alternativa à validação e à credibilidade dos dados, conforme proposto por Flick (1998). Os instrumentos utilizados auxiliaram no registro das observações, permitindo-nos fazer descrições detalhadas de cenários, produções e diálogos sucessivos. A seguir, apresentamos um fluxograma que sintetiza o processo de triangulação.

Fluxograma 1 –Triangulação de dados – Organização dos dados



Fonte: elaborado pelo autor.

Conforme o Fluxograma 1, consideramos três pilares de análise de dados convergentes: (i) observação participante, (ii) diálogos e depoimentos, e (iii) registros midiáticos (fotografias, vídeos). Essa Triangulação de Dados permitiu-nos realizar descrições minuciosas, análises críticas, identificação de padrões convergentes e inferência de resultados (Yin, 2001). Ao longo da análise, direcionamos nossos esforços para identificar evidências, contextos e características relevantes, bem como para detectar padrões que nos levassem ao objetivo desta pesquisa.

Asseguramos a integridade semântica original das transcrições, realizando correções pontuais de erros sem comprometer o significado das mensagens. Na seção de apresentação e análise dos dados, destacamos trechos significativos das discussões entre os participantes da pesquisa. Utilizamos o símbolo ( ) para indicar omissões de diálogos e colchetes [ ] para fornecer contexto adicional às falas. Essa abordagem visa proporcionar uma visão detalhada dos dados analisados, contribuindo para uma compreensão mais consistente. Este estudo, resultante da pesquisa de Pós-Doutorado com ênfase na área de Educação Matemática, obteve aprovação no Comitê de Ética (CEP) da Universidade de São Paulo (EACH/USP). Seu protocolo CAAE é 67106322.3.0000.5390 e o parecer foi atribuído sob o código 5.941.184.

4 Apresentação e análise de dados

Nesta seção, apresentamos e analisamos os dados da pesquisa sobre a formação em Matemática com o objetivo de investigar a construção do conhecimento relacionado à função exponencial. Inicialmente, os estudantes foram incentivados, em etapas sequenciais, a construir réplicas das Torres de Hanói com materiais de baixo custo, familiarizando-se com as peças, o formato de encaixe e os movimentos dos discos. Em seguida, introduzimos o propósito do jogo e suas regras, estimulando os grupos de alunos a registrar o número mínimo de movimentos necessários para mover 1, 2, 3... peças (discos) da Torre de Hanói. Durante esse processo, os estudantes puderam expressar suas ideias, identificar erros, registrar seus cálculos e estabelecer relações matemáticas. Esse recorte pode ser visualizado na Ilustração 1 e nos excertos a seguir:

Ilustração 1A – Torre de Hanói: produção estratégica e jogabilidade

[**Ideação**] Produção de Torres	[**Organização**] ideias e estratégias	[**Depuração**] Jogabilidade
Mão na massa: Produção e Métricas	*Regras do jogo e estratégias*	*Simulações, estratégias e análise*

Fonte: Dados da pesquisa.

Professor Temos uma missão especial! Vamos descobrir qual é o número mínimo de movimentos para mover uma peça da torre de Hanói de um lado para o outro. Por exemplo, com apenas um disco, o movimento mínimo é um. É direto, não tem mistério. Mas, e com duas peças? Seguindo as regras do jogo, obtemos três movimentos mínimos? Vamos investigar? [Grupos testam e confirmam a hipótese]. E, agora, com três peças? Quantos movimentos mínimos são necessários? Essa etapa é um pouco mais desafiadora!

David Com três peças, nós fizemos 8 movimentos. Há outra solução diferente? Alguém conseguiu menos?

Andreza Obtivemos 7 movimentos. Nosso grupo fez assim [mostra a possível solução, movendo-se os discos]...

David Consegui visualizar meu erro aqui... mexi uma peça desnecessariamente. De fato, são 7 movimentos!

Andreza Professor, nessa tabela, que estamos construindo, há alguma mágica por trás dela, não tem? [Discussão]. É possível determinar o próximo número da sequência dos números mínimos gerados?

Laura Há um padrão de crescimento, certo, professor!? [verbaliza: $1 \rightarrow 1;\ 2 \rightarrow 3;\ 3 \rightarrow 7;\ 4 \rightarrow ?,$ ...].

Victor Acreditamos que o valor é igual a 15, não é?! Porque, se há um padrão lógico sequencial, verificamos que a cada número é gerado pelo dobro do número anterior adicionado mais uma unidade [Tempo].

[Estudantes são incentivados pelo professor a testar/analisar o número de movimentos igual a 15] (...)

Victor Conseguimos encontrar o número igual a 15. Logo, com 5 discos, o valor será igual a $15 \times 2 + 1 = 30 + 1 = 31$. (...) dividi o problema em partes menores, movendo os discos em etapas até chegar à solução final. Com essa lógica, basta pegar dobrar o último resultado e somar com uma unidade...

Isabelle [Discussão] Exato! Então, agora, o nosso próximo desafio é encontrar 63 movimentos mínimos com a estratégia discutida com o professor (...) [Manipulação feita também no *software Geogebra* à turma].

Mateus Interessante! Isso significa que o desafio da Torre de Hanói fica cada vez mais complexo à medida que adicionamos mais discos. [Risos] O número cresce exponencialmente [Concordância entre os alunos].

O diálogo e as ilustrações evidenciam o engajamento dos estudantes durante o processo de construção de conhecimento matemático por meio do problema da Torre de Hanói, mediado pelo professor. Eles formulam hipóteses e criam estratégias lógicas para solucionar o desafio proposto. Observamos que o número mínimo de movimentos para resolver o problema da Torre de Hanói foi originado por meio da discussão coletiva entre os participantes, na qual o erro se mostra como um elemento do processo de construção do conhecimento matemático, conforme excertos destacados: "*com três peças, nós precisamos de oito movimentos*" e "*consegui visualizar meu erro aqui... mexi uma peça desnecessariamente, são sete movimentos mínimos*".

Nesse contexto, o processo de analisar o erro e buscar estratégias para corrigi-lo aponta à autonomia do aluno. À luz do Construcionismo, é essencial que os alunos possam se despojar da postura de meros ouvintes e assumir a participação comprometida com sua aprendizagem. Isso deve ocorrer em um ambiente de aprendizagem que promova a confiança e possibilite *depuração-compartilhada*. Um aspecto relevante a ser considerado, nesse recorte, é a habilidade dos estudantes em mobilizar a ideia intuitiva para deduzir uma relação Matemática que represente a sequência dos números mínimos de movimentos de discos necessários.

A estratégia por recursividade foi utilizada de forma intuitiva pelos estudantes para resolver o problema, conforme se pode observar nos trechos "*Há um padrão de crescimento, certo!?*" e "*(...) há um padrão lógico sequencial... percebemos que a cada número é gerado pelo dobro do número anterior adicionado mais uma unidade*". Tais conhecimentos intuitivos valorizados pela *reflexão e análise compartilhadas* são fundamentais à formalização de conhecimentos matemáticos, não se limitando apenas aos aspectos puramente axiomáticos ou fórmulas prontas e decoradas (D'Ambrosio; 2013; Resnick, 2017; Azevedo, 2022).

No excerto *"[...] com 5 discos, o valor será igual a* $15\, x\, 2 + 1 = 30 + 1 = 31$*. Dividi o problema em partes menores (...) com essa lógica, basta pegar o último número e dobrá-lo e somar com uma unidade*", reiteramos a estratégia do estudante em inferir resultados a partir da sua própria lógica intuitiva, antes de formalizar a lei de formação Matemática. Essa situação de argumentação matemática pode permitir que o estudante explore e, consequentemente, compreenda a lógica por trás do problema. A formulação e a validação de hipóteses, bem como a condução de experimentos, desempenham um papel significativo na construção do conhecimento matemático em ambiente de participação intelectualmente ativa. No entanto, é imperativo destacar que tal processo não deve se restringir unicamente ao trinômio tradicional *definição-exemplo-exercícios* sem sentido (Azevedo, 2022). A seguir, aprofundaremos no processo de construção ativa de conhecimento, destacando a importância da exploração e investigação de conceitos intuitivo-lógicos matemáticos em sala de aula.

Ilustração 1B – Torre de Hanói: Investigação e construção de conhecimento Matemático

Fonte: Dados da pesquisa.

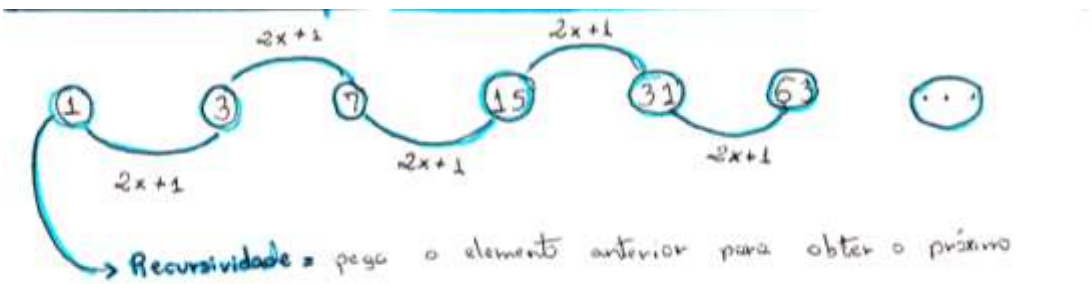
Professor Maravilha, pessoal! Observe que o valor é obtido pela recorrência do cálculo do número anterior. Damos o nome desse processo como recursividade. Observamos que o número é sempre o dobro (*2x*) do termo anterior (*aₙ*), acrescido de uma unidade. Podemos pensar assim: $\mathbf{a_1} = 1$; $\mathbf{a_2} = 2.a_1 + 1 = 2.1 + 1 = 3$; $\mathbf{a_3} = 2.a_2 + 1 = 2.3 + 1 = 7$; [...] ... Qual seria o formato dos próximos termos?

Vitória Hum... Penso assim... [Verbaliza: $\mathbf{a_4} = 2.a_3 + 1 = 2.7 + 1 = 15$; $\mathbf{a_5} = 2.a_4 + 1 = 2.15 + 1 = 31$ É só pegar o termo anterior [$\mathbf{a_{n-1}}$] e multiplicá-lo por 2, acrescentando a unidade... Dá certo! Legal!

Professor Isso mesmo! Mantendo-se a lógica, podemos generalizar as informações obtidas por: $\mathbf{a_n} = \mathbf{2}.(a_{n-1}) + 1$, sendo $\mathbf{a_n}$ um valor genérico da nossa sequência e $\boldsymbol{n}$ o número da posição, e assim sucessivamente. [A formalização do conteúdo é feita depois de intensa e sucessiva discussão de ideias intuitivas].

Ilustração 1C – Torre de Hanói: Lógica recursiva e registros colaborativos

Recursividade | Ideias intuitivas | Padrão de crescimento produzido na folha de rascunho pela estudante



Fonte: Dados da pesquisa.

Com base nos trechos e ilustrações (1B/C), é possível observar que o grupo de alunos explora ativamente seu conhecimento intuitivo para generalizar modelos algébricos com recursividade. O professor destaca a observação de que o número é sempre o dobro (2x) do número anterior, acrescido de uma unidade, exemplificado pelos cálculos: "[...] *Podemos pensar assim:* $\boldsymbol{a_1} = 1$; $\boldsymbol{a_2} = 2.(a_1) + 1 = 2.1 + 1 = 3$; *[...]* ...". O estudante contribui com a expressão "*[Estudante] Hum... Penso assim... [Verbaliza]:* $\boldsymbol{a_4} = 2.(a_3) + 1 = 2.7 + 1 = 15$ [...]. O professor, então, formaliza a generalização: "[...] *Mantendo-se a lógica, podemos generalizar as informações obtidas por:* $\boldsymbol{a_n} = \mathbf{2}.(a_{n-1}) + 1$". Nesses fragmentos, em especial, compreendemos que a "formalização conceitual [de um conhecimento] é vista como consequência da exploração e compreensão, e não como pré-requisito compulsório para que o estudante progrida em seu conhecimento matemático” (Azevedo, 2022, p. 164).

A construção de conhecimentos matemáticos não segue uma uniformidade desde a definição robustamente formalizada até a execução. Nesse contexto, adota-se uma abordagem inversa, valorizando as ideias intuitivas em álgebra e lógica de recursividade para a compreensão e interpretações semânticas do objetivo de estudo em sala de aula. Observamos que o processo de construção de conhecimento inclui a rejeição de hipóteses equivocadas e a reinterpretação de estratégias, visando à generalização dessas ideias matemáticas. Entendemos que essa discussão se constitui como uma “oportunidade de aprender e usar a Matemática através de um modo não [demasiadamente] formalizado” (Papert, 2008, p. 22). São ideias intuitivas que partem de uma linguagem não necessariamente teórica para um pensamento sistematizado (Denning, 2017; Barba, 2016; Wing, 2011; Azevedo, 2022; Azevedo; Maltempi, 2023; Azevedo; Araújo, 2024), referindo-se especialmente ao uso de sequência lógica intuitiva e ordenada de etapas de modo a desenvolver a solução do problema. Sintetizamos tais ideias intuitivas à formalização da lei de formação recursiva da Torre de Hanói na Tabela 2 abaixo:

Tabela 2 - Formalização das ideias Matemáticas: Generalização e Recursividade

Nº de discos (n)	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**...**	n
Nº. mínimo de movimentos (a_n)	**1**	**3**	**7**	**15**	**31**	**63**	**...**	$a_n = 2.(a_{n-1}) + 1$

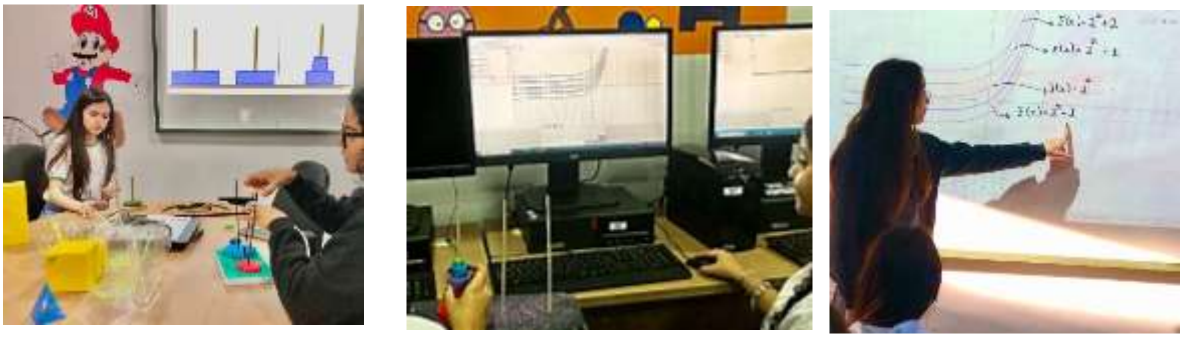
Fonte: Elaborada pelo primeiro autor.

Os dados de inferência da Tabela 2 apresentada evidencia a correlação entre o número do disco e o número mínimo de movimentos necessários. Essa relação foi trabalhada não de maneira direta no contexto, mas de forma investigativa, visando destacar interpretações e promover discussões entre os estudantes. A partir dos excertos dessa discussão, inferimos que, embora não seja uma regra absoluta, a inversão da sequência *conceito-exemplo-exercício* para *exploração-compreensão* tende a influenciar a construção do conhecimento matemático.

Isso ocorre porque os alunos têm a oportunidade de manipular objetos, formular hipóteses, criar conjecturas e representar expressões matemáticas, ao invés de apenas receber informações prontas do professor. Nesse sentido, estabelecer relação entre os objetos concretos “física e mentalmente, em ambientes naturais ou se valendo de estratégias de representação [com a Matemática], é um caminho possível e promissor [no processo de aprendizagem]” (Papert, 2008, p. 11). Com base nessa premissa, notamos que os estudantes empreenderam esforços para representar modelos matemáticos na resolução do problema da Torre de Hanói (física e mentalmente), recorrendo à formalização de ideias recursivas por meio do *software Geogebra*. Nesse processo, foram empregadas representações gráficas exponenciais (transformações isométricas). Os dados relativos a esse recorte estão dispostos abaixo:

Ilustração 2A – Visão geral das atividades com a Função Exponencial: Torre de Hanói e *Geogebra*

[**Exploração**] Torre de Hanói	[**Grupos**] Exploração	[**Argumentação**] $f(x) = b \pm a^x$
Registro e cálculos	*Construção de gráficos no Geogebra*	*Transformação – Translação*



Fonte: Dados da pesquisa.

Professor [Perguntas norteadoras]. Vamos juntos investigar um modelo matemático exponencial que represente os valores obtidos com números mínimos na tabela que construímos com recursividade? Utilizando a variável no exponente do número, como podemos escrever esse modelo? Uma das estratégias pode ser representar os pontos no *Geogebra*, a fim de visualizar melhor o comportamento dos dados [resultados da Torre] e, assim, facilitar a identificação de padrões matemáticos [Tempo].

Vitória [Tempo] Professor, cresce igual a curva exponencial... o modelo seria: 2^x[Palpite]

Professor Vamos tentar?! Explica no quadro-branco: Veja que $2^1 = 2$ *e* $2^2 = 4$, logo, não é a lei de formação que estamos buscando, pois os resultados são diferentes do número mínimo de movimentos... Precisamos manter o padrão 1→ 1, 2→ 3, e assim sucessivamente... [Tempo prologado de discussão]. Veja que os resultados estão apresentando uma unidade a mais... como podemos resolver esse desafio?

Isabelle [Tempo] nosso grupo chegou na seguinte conclusão... podemos escrever assim [Explica os 3 primeiros valores] [1 peça] $2^1 - 1 = 1$; [2 peças] $2^2 - 1 = 3$; [3 peças] $2^3 - 1 = 7$... Vamos testar 4 agora...

Mateus [...] Vocês estão usando a base igual a 2... Então, com 4 peças seria $2^4 - 1 = 16 - 1 = 15$...

Professor Ótimo, e se tivermos 5 peças, como ficaria a expressão, sem cálculos? [Mediação Pedagógica].

Victor Encontramos 32, porque 2^5 = 32 peças... [Erro] Mas, está estranho! O resultado é par...

Mateus Você não subtraiu a potência por 1... [Mostra e conversa com o colega $2^5 - 1$]. [Depuração].

Professor Observem que os valores da expressão são específicos (...) a base é igual 2 e o expoente igual ao número de peças. O que mais podemos encontrar de padrão? [Repetição]. Vamos testar mais valores?

Andreza Além da potência de base 2, sempre diminui uma unidade nas expressões. É um padrão de repetição!

David Então, com 6 peças, a expressão vai ficar assim: $2^6 - 1$ [mostra na folha] (...)

Professor Vamos, agora, generalizar esses valores em função de x. Vamos pensar juntos: se tivermos x peças na torre o expoente será qual valor? E a base? Podemos criar um modelo para isso [Discussão].

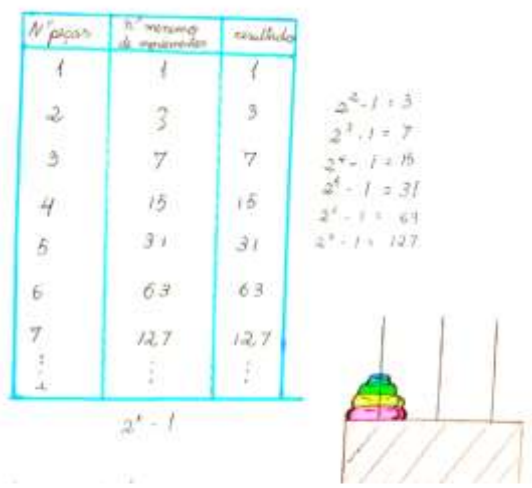
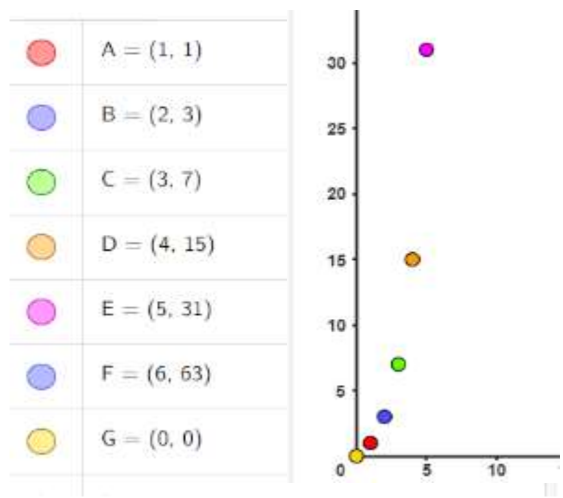
A partir das representações visuais e excertos proporcionados, o desenvolvimento do entendimento acerca de expressões exponenciais entre professores e estudantes, bem como entre os próprios alunos, concretizou-se por meio da análise crítica e identificação de regularidades nos resultados apresentados. Os estudantes conduzem a análise detalhada (decomposição) do problema para discernir a lei subjacente à formação exponencial dos valores, conforme explicitado nas passagens subsequentes: [Professor] "[Vamos investigar] um modelo matemático exponencial (...)?", [estudante] "[...] Veja que $2^1 = 2$ e $2^2 = 4$, logo, não é a lei de formação (...) os resultados são diferentes"; [Estudante] "(...) nosso grupo chegou à seguinte conclusão... podemos escrever assim [1 peça] $2^1 - 1 = 1$"; (...) e "[Professor] e se tivermos 5 peças, como ficaria a expressão? [Mediação Pedagógica e tempo para discussão]".

Esse contexto ressalta a importância fundamental da identificação de padrões na elaboração de argumentos matemáticos, através de um processo metódico de investigação e decomposição do problema em componentes mais granulares. A capacidade de discernir padrões matemáticos não apenas promove a compreensão mais profunda de fenômenos exponenciais, mas também constitui um aspecto essencial no desenvolvimento de habilidades analíticas e na formulação precisa de modelos matemáticos. Nesse ínterim, conforme Wing (2011), a identificação de padrões e análise de regularidades contribuem significativamente para a fundamentação lógica e consistente das conclusões alcançadas durante a resolução de problemas matemáticos, consolidando, assim, uma abordagem mais científica e estruturada.

É possível observar a construção de conhecimento matemático a partir da abstração dos resultados e da busca por uma expressão que represente de forma geral o padrão exponencial identificado. Um desses caminhos que se destaca é quando o estudante menciona que: "(...) há 32 movimentos, porque $2^5 = 32$", mas percebe que o resultado é par e reflete sobre o processo de pensamento. Em seguida, ele identifica a lógica dos resultados ímpares da sequência, considerando informações plausíveis e refutando hipótese da solução omitida. Ele depura o raciocínio e o compartilha com o colega, que menciona que é preciso subtrair a potência por 1, resultando em $[\ 2^5 - 1\ ]$. Nesse contexto, o uso do Pensamento Computacional como ferramenta corrobora a abstração como um processo de pensamento, possibilitando a análise, reflexão e depuração de informações. Essa abordagem favorece o desenvolvimento do pensamento analítico em relação ao artefato, conforme destacado por Papert (2008).

A construção de significados particulares é orientada por perguntas direcionadas pelo professor, como ilustrado nos exemplos anteriores em que o professor estimula os alunos a identificar padrões na expressão, testar diferentes valores e generalizar os resultados em relação a x. Nesse sentido, os alunos buscam compreender regularidades lógicas, como no caso da potência de base 2 e na simplificação de uma expressão com 6 peças: [Estudante] "(...) potência de base 2, sempre diminui uma unidade nas expressões... é um padrão! (...) com 6 peças, vai ficar assim: $2^6 - 1$" e [Professor] "(...) se tivermos x peças na torre o expoente será qual valor?". A respeito desse contexto, a depuração compartilhada do número de peças necessárias, por meio do algoritmo da função exponencial, permitiu ao grupo de alunos buscar informações adicionais que lhes faltavam. Esse processo proporcionou reflexão e a geração de novas ideias. Nesse caso, em especial, abordamos de maneira mais detalhada a depuração compartilhada nas discussões e ideias, conforme evidenciado nos excertos e ilustrações subsequentes:

Ilustração 2B – Diferentes representações Matemáticas e construções coletivas realizadas

Dedução da lei de formação | $f(x) = 2^x - 1$ Rastros dos cálculos registrados pelo grupo de estudantes	Geogebra: Valores discretos | (x,y) ∈ N Atividade conduzida pelo professor com os alunos
	

Fonte: Elaborada pelo primeiro autor.

Professor Conseguimos constatar o modelo matemático que presente o crescimento [$f(x) = 2^x - 1$] (...). Podemos representar os resultados obtidos em um plano cartesiano. Ao ligar os pontos, é possível gerar um gráfico exponencial explorando a lei de formação. No entanto, é importante notar que estamos lidando com um conjunto de números reais contínuos, e não com resultados discretos da torre. [...] a função não representa necessariamente os movimentos da Torre, já que nela as peças são números inteiros positivos (discretos), enquanto no gráfico são valores contínuos (Exploração e explicação)

Ana É um caso geral.... Com o modelo podemos gerar a curva (...) ela vai para o infinito. [Discussão]

David Legal! O gráfico da função não tem fim... E cada peça corresponde a um valor [Definição de função].

Professor Veja que a função $f(x) = 2^x - 1$ é a translação da função $f(x) = 2^x$. E se, ao invés de subtrair uma unidade, adicionarmos 1 unidade, como ficará o formato da curva? Vamos comparar os dois gráficos?

Victor As duas curvas, [$f(x) = 2^x - 1$ e $f(x) = 2^x + 1$] têm o mesmo formato... Posições mudam....

Arthur Ah, massa! Elas foram apenas deslocadas verticalmente a y [Em relação ao eixo y]. [Discussão].

Professor Isso mesmo! Então, nós podemos dizer que o deslocamento ocorreu porque adicionamos uma unidade ao valor de y em todos os pontos da função original. E se subtrairmos por 2 [-2]? Como fica?

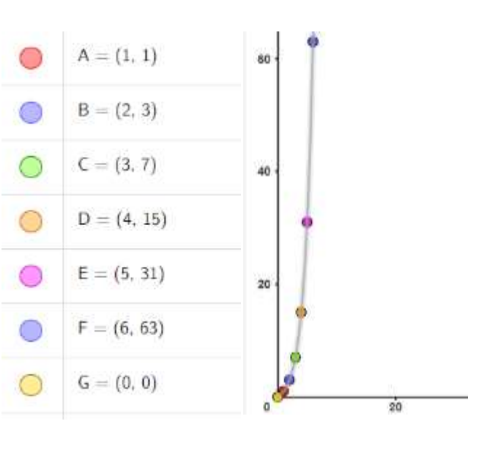
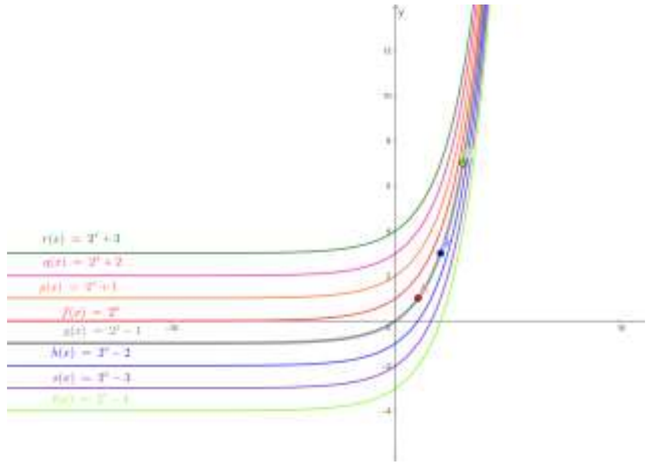
Vitória A função fica do mesmo jeitinho! Só desce duas unidades em relação à função base [$f(x) = 2^x$]

Andreza	(...) Se $f(x) = 2^x$, o gráfico passa no y = 1; $f(x) = 2^x + 1$, o gráfico passa no y = 2, [continua]...
David	[Função $f(x) = 2^x$] tem valores como potências de 2... Verbaliza [1, 2, 4, 8, 16...] ... Aqui, é um contexto quase igual ao número de bactérias que trabalhamos, né, professor? [Problema similar].
Grupos	[Exploração e apresentação das translações dos grupos à frente (Ilustração 2A)]. (Continua).

Com base nos trechos selecionados e na Ilustração 2B, é possível observar que o engajamento com problemas análogos de Matemática se destaca no processo de construção de significados. Ao associar problemas similares, o estudante David destaca: "*A função* $f(x) = 2^x$ *tem valores como potências de 2...*" e expressa verbalmente como *"*$[1, 2, 4, 8, 16...]$ $(...)$ *é semelhante ao número de bactérias*" [Comparação]. O professor acrescenta "*Observe que a função* $f(x) = 2^x - 1$ *é a translação da função* $f(x) = 2^x$", enquanto o estudante Victor destaca que "*as duas curvas* $[f(x) = 2^x - 1$ *e* $f(x) = 2^x + 1]$ *têm o mesmo formato... Posições mudam*". Por fim, a estudante Vitória complementa "*a função fica do mesmo jeitinho! Só desce duas unidades em relação a função base [* $f(x) = 2^x - 2$]". Com base nos dados, a proposta de elaborar situações nas quais os alunos possam associar e comparar objetos é considerada exequível. Tal estratégia, conforme Resnick (1991, p. 51, tradução nossa), "busca proporcionar aos alunos maior controle sobre a comunicação dos problemas que exploram".

Compreendemos que a abordagem não se resume a direcionar os alunos a seguir passos predefinidos na resolução de problemas. Em vez disso, visa a criar ambientes que "permitam aos alunos associar problemas similares já abordados em sala de aula, considerando os elementos de interpretação, análise-síntese e estabelecimento de estratégias, erros (depuração) que interagem de maneira sintônica e integrada" (Azevedo, 2022, p. 131). No âmbito da representação gráfica, os alunos realizaram a análise dos pontos mínimos da Torre de Hanói (representação de valores discretos) e também a generalizaram os resultados a partir da função $f(x) = 2^x - 1$ (valores contínuos em R). No decorrer da pesquisa, os participantes engajaram-se em discussões acerca de erros identificados, colaborativamente corrigindo-os, conforme evidenciado no diálogo entre os estudantes Andreza e Arthur: "*Se* $f(x) = 2^x$, *o gráfico passa no y = 1;* $f(x) = 2^x + 1$, *o gráfico passa no y = 2*" e [Estudante Arthur] "*Ah, massa! Elas foram apenas deslocadas verticalmente a y [eixo y].*" A Ilustração 2C apresenta uma síntese do contexto de discussão e abordagem das funções trabalhadas em sala de aula.

Ilustração 2C – Representações gráficas da Função Exponencial no Geogebra

Função Exponencial | $f(x) = 2^x - 1$ $x \in R$ | Função Crescente | $a > 1$.	Funções Exponenciais – Transformação Geométrica $f(x) = b.a^x \pm k$, sendo $a > 1$ e $a \neq 1$; $b = 1$ e $k \in R$.
	

Fonte: Elaborada pelo primeiro autor.

A prática de depuração compartilhada de funções exponenciais, com foco nas transformações geométricas, particularmente nas translações, proporcionou aos estudantes a busca por informações adicionais, viabilizando o desenvolvimento de novas ideias por meio do contínuo processo de reflexão metacognitiva. Nesse processo, entendemos que novos conceitos matemáticos podem ser processados e aprimorados pelo estudante. Não é “usar a regra que resolve o problema [ou aplicar a fórmula pronta]; é preciso pensar sobre o problema que promove a aprendizagem e a capacidade de lidar com problemas” (Papert, 2008, p. 91).

Nesse contexto, o Construcionismo pondera improvável que os estudantes se envolvam em atividades nas quais as ideias são sempre definidas por outra pessoa. Por meio dos excertos e das ilustrações (2B/C), percebemos que os estudantes não se limitaram à mera exploração de um material concreto, como a Torre de Hanói. Eles também demonstraram habilidade ao analisar e manipular diversas representações matemáticas, incluindo tabelas, gráficos e registros escritos. Ao empregar o *Geogebra*, particularmente, exploraram os valores discretos das peças da Torre de Hanói, dados e a translação de diferentes curvas exponenciais a partir da função canônica $f(x) = 2^x$, envolvendo valores contínuos no conjunto dos números reais (R).

Em vez de simplesmente memorizar a função, os estudantes investigaram o número mínimo de movimentos, $f(x) = 2^x - 1$, assim como exploraram a família de funções exponenciais correlatas. Esse engajamento evidencia uma abordagem mais aprofundada e consistente em relação ao tema. Ao longo do processo de interpretação e construção de significados matemáticos de forma atuante e ativa dos estudantes, compreendemos que não se exclui uma base não formalizada Matemática, mas a apreende como um fator importante no processo de construção de conhecimento e formação pela interação entre os estudantes. E é justamente essa ideia que serve como alicerce "para a Matemática formal, [sem] interrupção para uma melhor aprendizagem" (Papert, 2008, p. 30), na qual o processo de Formação em Matemática se constitui no discurso informal de ideias geradas entre os participantes.

5 Discussão dos Resultados

Com base nos dados obtidos nesta pesquisa, e em conformidade com o objetivo proposto, compreendemos que a construção do conhecimento acerca da função exponencial se efetua por meio da participação ativa dos estudantes no contexto de sala de aula. Essa participação abrange o estabelecimento de relações semânticas entre problemas de associação e comparação, a articulação de diversas representações matemáticas e a integração da linguagem algébrica e geométrica. A construção do conhecimento sobre a função exponencial é dinâmica e não linear, sendo influenciada diretamente pelo ambiente no qual os estudantes estão inseridos. Isso possibilita a estimulação de debates de ideias e a formulação de hipóteses durante o processo de aprendizagem. O estudo ainda revela que a abordagem parte do princípio de que as ideias informais e intuitivas representam uma oportunidade para a construção do conhecimento matemático, mesmo quando não são necessariamente formalizadas.

Ressaltamos que ao proporcionar novas abordagens para a construção do conhecimento relacionado à função exponencial, é imperativo evitar a limitação imposta pela dicotomia de perguntas e respostas na sala de aula, assim como por problemas que seguem uma abordagem de receita, onde os alunos são instruídos a realizar tarefas mecanicamente sem compreensão profunda. Ao longo do processo de construção do conhecimento, os estudantes, ao plotar o gráfico de pontos com o número de discos no eixo das abscissas e a quantidade mínima de movimentos no eixo das ordenadas, comparando diferentes elementos e representações, conseguiram realizar uma generalização lógica do crescimento exponencial. Este processo transcende a mera abordagem dos conteúdos de recursividade ou de Função Exponencial, relacionando-os de forma harmônica. Tal relação é exemplificada na Tabela 3 abaixo:

Tabela 3 – Correlação de funções recursivas e exponenciais desenvolvidas em sala de aula

Termos	Expressões recursivas	Expressões Exponenciais	Resultados
a_1	1	1	1
a_2	$2.(a_1)+1$	2^2-1	3
a_3	$2.(a_2)+1$	2^3-1	7
a_4	$2.(a_3)+1$	2^4-1	15
a_5	$2.(a_4)+1$	2^5-1	31
	...		
a_n	$2.(a_{n-1})+1$	2^n-1	

Fonte: Elaborada pelo primeiro autor.

A Tabela 3 sintetiza as duas representações/expressões lógico-numéricas exploradas ao longo do desenvolvimento da pesquisa com os participantes. Sob a perspectiva Construcionista, essas distintas representações intuitivas-generalizadas oferecem aos alunos a oportunidade de refletir e analisar, sugerindo abordagens variadas para a resolução de um mesmo problema com perspectivas diferentes. Isso contrasta com a abordagem simples de apresentação de tabelas com informações verticalizadas, desprovidas de discussão, interpretações e análises pertinentes no contexto da construção de conhecimento matemático. Conforme indicado pelos dados da pesquisa, o estímulo ao questionamento e à análise dos fenômenos da função exponencial tende a propiciar a construção de propriedades dessa função, estabelecendo uma conexão recíproca entre Geometria e Álgebra, preservando os aspectos matemáticos complexos com significado.

Os resultados obtidos mostram que o processo de construção do conhecimento matemático transcende a simples exposição do professor, destacando-se como uma atividade dinâmica e interativa. A formalização dos conceitos e ideias em Matemática emerge de diálogos e questionamentos contínuos entre os participantes, partindo da valorização do conhecimento intuitivo até a sistematização da lógica e da recursividade em um processo de generalização.

Considerações finais

À luz dos resultados expostos nas seções precedentes, é evidente que o ambiente de aprendizagem durante a construção do conhecimento de funções exponenciais por meio da criação de representações das Torres de Hanói e de modelos computacionais, no contexto da formação em Matemática no Ensino Médio, orienta consistentemente o enfoque do trabalho para questões abertas, exploratórias e investigativas, conforme alinhado às teorias em consideração. Tal abordagem favorece a investigação ativa dos estudantes e a capacidade de lidar com problemas similares, promovendo a construção de significados matemáticos. Os resultados deste estudo corroboram a importância de valorizar situações nas quais os estudantes enfrentam a imprevisibilidade, refinam diversas estratégias e desenvolvem soluções para contextos geométricos e algébricos de forma participativa, colaborativa e reflexiva-depurativa.

Nos dados analisados, é perceptível a suspensão da prática de repetição desprovida de significado, típica de exercícios matemáticos e fórmulas isoladas sem contextos. Os dados corroboram a importância dos estudantes relacionarem as ideias de recursividade e função exponencial, valorizando tanto as ideias lógicas quanto as regularidades e padrões matemáticos observados durante o processo de aprendizagem. Neste ínterim, é imperativo que o professor possua conhecimentos matemáticos substanciais, familiaridade com diferentes abordagens, e disposição para um aprendizado conjunto com os alunos. A produção de Torres de Hanói em diversas configurações e a abordagem de tópicos integrados, como recursividade e função exponencial, exigem comprometimento e corresponsabilidade na construção colaborativa de significados. Portanto, a necessidade de uma abordagem mais profunda e significativa no processo de ensino e aprendizagem revela-se essencial para transcender o mero formalismo, promovendo uma Formação em Matemática mais ativa, atual e crítica no Ensino Médio.

Agradecimentos

Agradecemos aos estudantes do Ensino Médio do Instituto Federal Goiano (IFGoiano) pela participação na pesquisa e à Rafaela S. B. Biazotti pela revisão final deste artigo.

Referenciais

AZEVEDO, G. T. **Processo formativo em Matemática: invenções robóticas para o Parkinson**. 2022. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2022. Disponível em: http://hdl.handle.net/11449/236186. Acesso em: 31 de Jul. 2024.

AZEVEDO, G. T.; ARAÚJO, U. F. Desenvolvimento Científico-Robótico no âmbito da formação em Matemática: pensamento computacional e relevância social. **Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, v. 14, n. 1, p. 1-17, 15 abr. 2024. Disponível em: https://doi.org/10.37001/ripem.v14i1.3706. Acesso em: 31 de Jul. 2024.

AZEVEDO, G. T.; MALTEMPI, M. V.; LYRA, G. M. V. Produção de games nas aulas de Matemática: por que não? **Acta Scientiae**, Canoas, v. 20, n. 1, p. 950-966, 2018. Disponível em: https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.v20iss5id4152. Acesso em: 31 de Jul. 2024.

AZEVEDO, G. T.; MALTEMPI, M. V. Invenções robóticas para o tratamento de Parkinson: pensamento computacional e formação matemática. **Bolema**, Rio Claro, v. 35, n. 69, p. 63-88, 2021. Disponível em: https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n69a04. Acesso em: 31 de Jul. 2024.

AZEVEDO, G. T.; MALTEMPI, M. V.; LYRA-SILVA, G. V. Processo formativo do aluno em Matemática: jogos digitais e tratamento de Parkinson. **Zetetiké**, Campinas, v. 26, n. 3, p. 569-585, 2018. Disponível em: http://dx.doi.org/10.20396/zet.v26i3.8651962. Acesso em: 31 de Jul. 2024.

AZEVEDO, G. T.; MALTEMPI, M. V. Processo de aprendizagem de Matemática à luz das metodologias ativas e do pensamento computacional. **Ciência & Educação**, v. 26, p. 1-18, 2020. Disponível em: https://doi.org/10.1590/1516-731320200061. Acesso em: 31 de Jul. 2024.

AZEVEDO, G. T.; MALTEMPI, M. V. Desenvolvimento de habilidades e invenções robóticas para impactos sociais no contexto de formação em Matemática. **Ciência & Educação**, v. 29, p. 1-21, 2023. Disponível em: https://doi.org/10.1590/1516-731320230016. Acesso em: 31 de jul. de 2024.

AZEVEDO, G. T.; MALTEMPI, M. V.; POWELL, A. Contexto formativo de invenção robótico-matemática: pensamento computacional e matemática crítica. **Bolema** [online], v. 36, n. 72, p. 214-238, 2022. Disponível em: https://doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a10. Acesso em: 17 out. 2023.

BARBA, L. **Computacional Thinking**: I do not think it means what you think it means. 2016. Disponível em: https://lorenabarba.com/blog/computational-thinking-i-do-not-think-it-means-what-you-think-it-means/. Acesso em: 02 mai. 2023.

BICUDO, M. A. V. Pesquisa qualitativa e pesquisa qualitativa segundo a abordagem fenomenológica. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (org.). **Pesquisa qualitativa em educação matemática**. São Paulo: Autêntica, 2006. p. 100-118.

BLIKSTEIN P. Travels in Troy with Freire: Technology as an agent for emancipation. In: NOGUERA P.; TORRES C. A. (ed.). **Social justice education for teachers**: Paulo Freire and the possible dream. Rotterdam: Sense, 2008. p. 205–244.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 1994.

BRASIL. **Base nacional comum curricular**. Brasília: Ministério da Educação, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/#medio/a-area-de-matematica-e-suas-tecnologias. Acesso em: 14 jan. 2023.

D'AMBROSIO, U.; D'AMBROSIO, B. S. The role of ethnomathematics in curricular leadership in mathematics education. **Journal of Mathematics Education at Teachers College**, New York, v. 4, n. 1, p. 10-16, 2013.

DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. Introduction: the discipline and practice of qualitative research. In: DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. **Handbook of qualitative research**. 2. ed. London: Sage, 2000. p. 1-28.

FREITAS, L. C. Os reformadores empresariais da educação: da desmoralização do magistério à destruição do sistema público de educação. **Educação & Sociedade**, Campinas, v. 33, n. 119, p. 379-404, 2012.

LÉVY, P. **Cibercultura**. Rio de Janeiro: Editora 34, 1999.

ONU. Assembleia Geral das Nações Unidas. **Educação de Qualidade**. 2020. Disponível em: https://brasil.un.org. Acesso em: 18 jun. 2023.

PAPERT, S. An exploration in the space of mathematics educations. **International Journal of Computers for Mathematical Learning**, Dordrecht, v. 1, n. 1, p. 95-123, 1996.

PAPERT, S. **A máquina das crianças**: repensando a escola na era informática. Porto Alegre: Artes Médicas, 2008.

PAPERT, S. **Mindstorms - Children, Computers and Powerful Ideas**. New York: Basic Books, Inc., 1980.

PAPERT, S. Situating constructionism. *In*: HAREL, I.; PAPERT, S. (ed.). **Constructionism**. Norwood, US: Ablex Publishing, 1991. p. 1-12.

RESNICK, M. **Lifelong kindergarten: cultivating creativity through projects, passion, peers and play**. Cambridge: MIT Press, 2017.

WING, J. M. Computational thinking: what and why? 2010. Disponível em: http://www.cs.cmu.edu/~CompThink/resources/TheLinkWing.pdf. Acesso em: 20 dez. 2023.

WING, J. M. Research Notebook: Computational Thinking: what and why. **Thelink**, 2011. Disponível em: https://www.cs.cmu.edu/link/research-notebook-computational-thinking-what-and-why. Acesso em: 28 nov. 2023.