

Uma proposta de abordagem para o Cálculo Integral a partir de um problema da Engenharia Civil

Karina Bradaschia Rocha¹
Gabriel Loureiro de Lima²

Resumo: Neste artigo, apresenta-se uma proposta de organização didática de um evento contextualizado (problema que vincula a matemática às áreas específicas da Engenharia), elaborado com subsídio da Teoria A Matemática no Contexto das Ciências (TMCC). Esse evento foi elaborado a partir de um problema usual da Engenharia Civil — a análise e o projeto de vigas — com o intuito de possibilitar a estudantes do primeiro ano de Engenharia, na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, a construção de alguns conhecimentos relativos ao Cálculo Integral e o reforço de conhecimentos relativos a máximos e mínimos de funções reais de uma variável. Como resultados, são apontados alguns potenciais desse evento, bem como algumas dificuldades que os alunos podem enfrentar durante a resolução.

Palavras-chave: Cálculo Diferencial e Integral. Engenharia. Teoria A Matemática no Contexto das Ciências. Evento Contextualizado.

An approach proposal for Integral Calculus based on a problem of Civil Engineering

Abstract: In this article a proposal is presented for the didactic organization of a contextualized event (a problem that connects Mathematics to specific areas of Engineering) developed with the support of the Theory of Mathematics in the Context of Sciences (TMCS). This event was created based on a common problem in Civil Engineering —the analysis and design of beams— with the aim of enabling first-year Engineering students, in the Differential and Integral Calculus course, to construct some knowledge related to Integral Calculus and reinforce their understanding of maxima and minima of real functions of one variable. The results highlight some potentials of this event as well as some difficulties that students may face during the resolution process.

Keywords: Differential and Integral Calculus. Engineering. Theory of Mathematics in the Context of Sciences. Contextualized Event.

Una propuesta de enfoque para el Cálculo Integral basada en un problema de Ingeniería Civil

Resumen: En este artículo se presenta una propuesta de organización didáctica para un evento contextualizado (problema que vincula las Matemáticas a áreas específicas de la Ingeniería), elaborado con el respaldo de la Teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias (TMCC). Este evento se basa en un problema común de Ingeniería Civil — el análisis y diseño de vigas — con el objetivo de permitir a estudiantes de primer año de Ingeniería construir algunos conocimientos relacionados con el Cálculo Integral y reforzar los conocimientos sobre máximos y mínimos de funciones reales de una variable en la disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. Se destacan algunos de los posibles beneficios de este evento, así como algunas dificultades que los estudiantes pueden enfrentar durante la resolución.

Palabras clave: Cálculo Diferencial e Integral. Ingeniería. Teoría de Matemáticas en el Contexto de las Ciencias. Evento Contextualizado.

¹ Mestra em Engenharia Civil. Instituto Mauá de Tecnologia/IMT, São Caetano do Sul, SP, Brasil. E-mail: karina.rocha@maua.br - Orcid: <https://orcid.org/0000-0003-2122-1681>.

² Doutor em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo/PUC-SP, São Paulo, SP, Brasil. E-mail: gllima@pucsp.br - Orcid: <https://orcid.org/0000-0002-5723-0582>.

1 Introdução

Nos últimos anos, houve um aumento substancial na quantidade de estudos que investigam o papel de disciplinas da área de Matemática na formação de engenheiros (González-Martín *et al.*, 2021). Quéré (2019) realizou um questionário *online* para sua tese, o qual foi respondido por 261 engenheiros que concluíram sua formação na França. Apenas 24% desses participantes consideraram que a sua formação em Matemática da universidade foi adequada e alinhada às necessidades atuais e aproximadamente 50% dos engenheiros declararam utilizar tais conteúdos matemáticos no trabalho.

Em González-Martín (2021), foram entrevistados dois professores formados em Engenharia (um em Engenharia Civil e outro em Engenharia Elétrica), que expuseram um exemplo voltado para as respectivas áreas de como o Cálculo Integral é utilizado em praxeologias que, geralmente, surgem em cursos de Engenharia, tanto em termos de conteúdo das disciplinas específicas quanto de práticas de ensino. O exemplo concernente à Engenharia Civil foi a determinação do momento fletor de uma viga, em que as integrais são usadas para determinar a força cortante e o momento fletor nos casos com carga distribuída.

O autor, com base na explanação do professor de Engenharia Civil, aponta que, na prática, para a resolução dos exercícios, o uso de integrais não é aparente e as propriedades das integrais estão implícitas nas justificativas. Além disso, ele relata que embora sejam esboçados os gráficos de funções antiderivadas, este procedimento é feito a partir de cálculos aritméticos simples. Contudo, afirma que as análises referentes aos exercícios trazidos fornecem ideias para atividades que poderiam ser utilizadas por professores de Cálculo para introduzir integrais em um contexto de modelagem, destacando ainda que essas atividades poderiam enfatizar uma abordagem para integrais como acúmulo.

Nesse sentido, os conceitos trabalhados na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral constituem a fundamentação para aqueles que são estudados nas áreas específicas, mas os estudantes, frequentemente, encontram desafios na compreensão dos diversos conceitos matemáticos apresentados, o que leva a taxas significativas de reprovação nesta disciplina (Lima *et al.*, 2022). Destarte, para um melhor desempenho acadêmico, Arifin, Wahyudin e Herman (2021) apontam que uma atitude mais positiva por parte dos alunos implica em maior autoeficácia e motivação e, segundo Turra *et al.* (2019), um dos fatores que pode influenciar positivamente a atitude dos estudantes em relação à Matemática é a metodologia de ensino utilizada. Complementando essa ideia, Mercat *et al.* (2018, p. 17) ressaltam que “diversas pesquisas evidenciam que a percepção do aluno em relação à Matemática e ao seu ensino têm

um impacto sobre seu desempenho acadêmico em Matemática e atitudes e percepções positivas em relação a este assunto irão encorajar o indivíduo a aprendê-lo melhor”.

Conforme González-Martín *et al.* (2021), os estudantes de cursos nos quais a Matemática não é o foco principal enfrentam desafios relacionados a disciplinas dessa área, de modo que um fator comum que pode estar exacerbando essas dificuldades é a ausência de integração desta ciência com outros campos de estudo, como, para exemplificar, a Engenharia. Uma maneira de vincular a Matemática aos conteúdos específicos de tal curso buscando uma maior motivação por parte dos estudantes é a partir da utilização de Eventos Contextualizados (EC), nome dado a problemas que integram disciplinas matemáticas e não matemáticas, componentes de trabalho em sala de aula no âmbito da Teoria A Matemática no Contexto das Ciências (TMCC). Tratando, especificamente, da motivação do discente para o estudo da Matemática nas carreiras de Ciências Exatas, como, por exemplo, a Engenharia, Pohjolainen (2018) destaca que esta pode ser ampliada por meio da explicitação de como a Matemática é empregada na indústria, na sociedade, na vida cotidiana e, especialmente, na futura atuação profissional do estudante: ideia central no trabalho com EC.

Nos últimos anos, o grupo de pesquisa do qual os autores deste artigo são integrantes têm realizado algumas investigações relacionadas à elaboração, implementação e análise de EC voltados para o ensino e para a aprendizagem de diferentes conteúdos. Em Gomes *et al.* (2018b), é explorado um problema clássico para a Engenharia Civil: a análise dinâmica de pórticos, que pode ser utilizada, entre outros, na elaboração de um EC focado no ensino e na aprendizagem de conceitos de Álgebra Linear.

Em se tratando de EC destinados a disciplinas do primeiro ano de Engenharia, Gomes *et al.* (2018a) apresentam dois exemplos desse tipo de problema, os quais foram concebidos para serem utilizados na disciplina de Vetores e Geometria Analítica; já Gomes *et al.* (2019) e Lima, Bianchini e Gomes (2021) propuseram EC voltados à disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, sendo o primeiro baseado no problema dos pórticos e com objetivo de revisar conceitos trabalhados no Ensino Médio — mas com uma abordagem voltada ao Ensino Superior e à Engenharia — e o segundo voltado ao estudo de funções exponenciais, baseado no âmbito do estudo da curva característica de um diodo semicondutor.

Para disciplinas do segundo ano em diante, Souza e Lima (2020) apresentam um EC para o ensino de integral dupla, fundamentado por um problema de mecânica dos fluidos, enquanto a pesquisa conduzida por Pinto (2021) se concentrou na aprendizagem, por parte dos estudantes matriculados em um curso de Engenharia Civil, das Equações Diferenciais

Ordinárias (EDO) de variáveis separáveis, a partir de um EC desenvolvido com base em um cenário relacionado à Transferência de Calor por condução em paredes de alvenaria planas; Silva (2022), por sua vez, analisa a elaboração e as contribuições da implementação de um EC, que objetiva o ensino e a aprendizagem de EDO a partir de uma situação relacionada à inclinação de vigas em balanço submetidas a carga concentrada na extremidade livre; e, por fim, um dos objetivos de Philot (2022, p. 19) foi elaborar e analisar as contribuições da implementação de um EC “voltado à construção dos conceitos de autovalores e autovetores para estudantes da segunda série do curso de Engenharia de Controle e Automação e áreas afins”.

Como se vê, os estudos mencionados anteriormente confirmam a importância da utilização de EC para a revisão de conceitos prévios e construção de novos conhecimentos. Essa abordagem direcionada ao Ensino Superior e à Engenharia serve para inspirar curiosidade, fomentar discussões, promover pesquisas e dar aos alunos uma compreensão mais significativa do que foi aprendido. Ainda, conforme descrito detalhadamente em Lima *et al.* (2021), a utilização de eventos contextualizados atende ao que é recomendado nas Diretrizes Curriculares Nacionais do Curso de Graduação em Engenharia – DCN (Brasil, 2019), em especial, o Art. 6º, o qual visa à organização do curso de Graduação em Engenharia e das atividades de aprendizagem que nele devem ser inseridas para assegurar o desenvolvimento das competências estabelecidas no perfil do egresso.

Dessa forma, nesse trabalho, será apresentado um exemplo de EC voltado à análise e projeto de vigas (situação clássica da Engenharia Civil), que tem como público-alvo estudantes do primeiro ano de Engenharia que estejam cursando a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. A finalidade do EC é construir alguns conhecimentos relativos ao Cálculo Integral e reforçar conhecimentos relativos a máximos e mínimos de funções reais de uma variável real.

Convém salientar que, embora seja amplamente reconhecido nas pesquisas que os conceitos normalmente estudados nas disciplinas iniciais de Cálculo Diferencial e Integral possuem diversas aplicações nas situações específicas da Engenharia, como o projeto de vigas na Engenharia Civil, essa relação nem sempre é explorada desde o início da formação. Na pesquisa que estamos desenvolvendo, da qual este artigo é um dos resultados, buscaremos utilizar essas aplicações já no primeiro ano do curso de Engenharia. A ideia é organizá-las de forma didática para estimular o estudo de conceitos matemáticos ainda desconhecidos pelos alunos ou revisitar de forma articulada à sua futura área de atuação profissional, conceitos com os quais o graduando já teve contato.

Como enfatizado por Pitt (2019), torna-se cada vez mais urgente e importante que as Instituições de Ensino Superior que oferecem cursos de Engenharia rompam com o tradicional modelo focado em leituras passivas como principais atividades no processo formativo do estudante. Em conformidade com o autor, para que sejam atraentes aos discentes e eficazes na formação de futuros engenheiros, os cursos devem, tanto quanto possível, desde o início, oportunizar momentos de trabalhos em grupos com situações nas quais as Ciências Básicas e a Matemática possam ser imediatamente reconhecidas por eles como suportes, alicerces em suas formações e não como conteúdos delas desvinculados.

A seguir, serão apresentados alguns aspectos subjacentes à TMCC e como esses foram empregados na elaboração e organização didática do EC em questão.

2 Fundamentação Teórica

A Teoria A Matemática no Contexto das Ciências (TMCC) começa a ser elaborada em 1982, no Instituto Politécnico Nacional do México, pela pesquisadora Patricia Camarena Gallardo e nasce voltada para o âmbito universitário, especialmente, para cursos de Engenharia, nos quais a Matemática não é buscada como uma finalidade em si; o foco não está em formar matemáticos, mas, sim, em desenvolver competências matemáticas essenciais para a prática profissional (Camarena, 2021).

A TMCC foi desenvolvida na linha de pesquisa da Matemática Social, cujo objetivo principal é estabelecer as bases para ações educativas fundamentadas a serem implementadas, de maneira objetiva, para lidar com três problemas: a natureza abstrata da Matemática, a falta de vinculação entre a Matemática e suas aplicações e usos em outras ciências e o baixo nível acadêmico observado nos graduados de algumas carreiras universitárias. Tendo esses problemas por objeto de reflexão, desenvolveu-se uma teoria educacional direcionada, especificamente, ao estudo dos processos de ensino e de aprendizagem da matemática no nível universitário (Camarena *et al.*, 2022).

Nessa conjuntura, para enfrentar os problemas já mencionados e refletir acerca de perguntas como “De que maneira motivar o estudante?” ou “Como vincular a Matemática com a futura profissão do estudante?”, surge a TMCC (Camarena, 2013). Em última instância, o objetivo ao considerar tal referencial é que o indivíduo desenvolva um pensamento matemático e uma cultura matemática (Camarena *et al.*, 2022), para que atue de maneira racional, lógica e analítica, tanto no âmbito profissional quanto no seu dia a dia, construindo uma base sólida para a resolução de problemas e tomada de decisões (Camarena, 2013).

Segundo Camarena (2021), as problemáticas a serem abordadas pela TMCC são compostas por elementos inseridos no que a autora denomina de cinco fases da Teoria, a saber, curricular, epistemológica, docente, didática e cognitiva, as quais estão presentes no ambiente de aprendizagem, embora nem sempre de maneira explícita. Para lidar com as supracitadas problemáticas e como abordá-las, em cada fase, são estabelecidos processos, metodologias e construtos elaborados no âmbito da TMCC. Essas fases são correlacionadas e dependem das condições sociológicas dos atores do processo educativo (Camarena, 2013).

Para a elaboração do EC que será apresentado, no âmbito metodológico, recorreu-se à fase curricular para identificar uma situação da Engenharia Civil com potencial de originar um EC e à fase epistemológica para construir o enunciado do EC a partir da situação identificada. Já para fundamentar, em termos de organização didática e de estratégias metodológicas, a futura implementação do EC, foi mobilizada a fase didática da TMCC.

A fase curricular da TMCC envolve um processo metodológico para o desenvolvimento de programas de estudo de matemática em profissões nas quais a matemática não é um objetivo em si, ou seja, que não formarão matemáticos, denominado *Dipcing (Diseño de Programas de Estudio en Carreras de Ingeniería)*. Um ponto de destaque dessa fase reside no fato de possuir uma abordagem da matemática que atenda às necessidades da profissão em que está inserida (Camarena, 2013).

Por sua vez, na fase epistemológica da TMCC, busca-se compreender como os conceitos matemáticos e os conceitos de outras áreas do conhecimento — no caso, a Engenharia — estão interligados. As análises realizadas nessa fase possibilitam a elaboração de materiais didáticos destinados à abordagem contextualizada da Matemática em um curso específico, auxiliando os estudantes a desenvolverem a habilidade de efetivar o que Camarena (2004) chama de transposição contextualizada: um construto teórico que dá continuidade à transposição didática (Chevallard, 1991), a qual mostra que os conceitos matemáticos aprendidos em sala de aula, muitas vezes, precisam sofrer uma transformação para que possam ser utilizados em suas áreas de aplicação.

De maneira a atingir os objetivos principais com a implementação do EC elaborado na fase epistemológica, passam a atuar os preceitos da fase didática da TMCC, por meio da qual propõe-se que a organização do trabalho com o evento em sala de aula se dê por meio do Modelo Didático da Matemática em Contexto (MoDiMaCo).

O MoDiMaCo tem como foco a práxis social, visando a estimular a construção do conhecimento pelo estudante e o desenvolvimento de habilidades para a aplicação dos

conhecimentos matemáticos nas áreas sociais que os requerem (Camarena, 2013). Com esse propósito, implementa-se, no ambiente de aprendizagem, a estratégia didática conhecida como Matemática em Contexto.

Essa abordagem visa a proporcionar ao estudante a habilidade de estabelecer conexões e aplicar, em sua trajetória profissional, o conhecimento matemático internalizado. A propósito, a Didática da Matemática em Contexto fundamenta-se no construtivismo e, conforme postulado por Camarena (2017), insere o estudante no centro do processo de aprendizagem, sendo este o principal responsável pelo conhecimento a ser construído, enquanto o professor atua como mediador e facilitador desse processo.

A estratégia que guia a Matemática em Contexto são os eventos contextualizados que, segundo Camarena (2021), são definidos como “problemas, projetos ou estudos de caso que atuam como elementos integradores das disciplinas” (p. 81) e que “não se configuram como exercícios comuns, nem como problemas ou projetos rotineiros”, mas, sim, “problemas ou projetos destinados a criar um conflito cognitivo ao serem lidos e devem motivar e intrigar os alunos a quererem continuar com a tarefa” (p. 82).

Os EC, conforme indicado por Camarena (2017) e Lima *et al.* (2021), devem ser trabalhados pelos estudantes, de forma colaborativa, em equipes formadas por três estudantes. Cada uma delas deve incluir um líder emocional, um líder intelectual e um líder operacional em cada equipe, já que cada líder possui características específicas que proporcionam papéis complementares no progresso do trabalho colaborativo. Em Lima, Bianchini e Gomes (2018) e Lima *et al.* (2021) são apresentadas informações mais aprofundadas sobre a constituição das equipes.

Passamos, então, a detalhar como os procedimentos metodológicos das fases curricular e epistemológica foram empregados para a elaboração do EC e como serão empregados os procedimentos da fase didática quando efetivamente aplicarmos o evento.

3 Metodologia para a Elaboração do EC

Conforme apontado por Camarena (2021), para a elaboração de um EC, é necessário recorrer a procedimentos metodológicos da *Dipping*, a fim de construir um banco de situações específicas da Engenharia que possam servir de suporte para o desenvolvimento do EC. Dessa forma, primeiramente, foram analisados quais conteúdos matemáticos são mobilizados nas disciplinas específicas da Engenharia Civil. Com esse fim, foram examinados o Projeto Pedagógico do Curso, a principal referência utilizada na disciplina de Cálculo Diferencial e

Integral, os planos de ensino das disciplinas não matemáticas presentes na matriz curricular e as principais referências bibliográficas utilizadas nas unidades curriculares que demandam os conteúdos matemáticos visados.

A partir do livro-texto *Mecânica dos Materiais* (Beer *et al.*, 2011), que é uma das principais bibliografias da disciplina de Resistência dos Materiais ministrada para todas as habilitações de Engenharia, e da experiência da primeira autora deste artigo, graduada em Engenharia Civil, foi identificada uma situação usual dessa habilitação de Engenharia na qual o Cálculo Integral é utilizado: a análise e o projeto de vigas em flexão (voltados à construção de piscinas e/ou reservatórios de água).

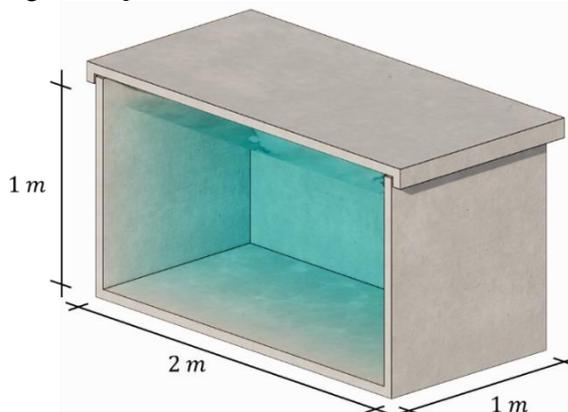
A partir desta situação, elaboramos o EC a ser apresentado na seção seguinte, por meio do qual, quando o implementarmos, visaremos a construir, junto a estudantes do primeiro ano de Engenharia, conhecimentos relativos a conceitos do Cálculo Integral e retomar as noções de máximo e mínimo de funções reais de uma variável real, bem como vincular esses conteúdos ao projeto de vigas.

4 Enunciado do Evento, Organização Didática e Procedimentos Metodológicos para sua Futura Implementação

O EC elaborado, como mencionado nas seções anteriores, tem como contexto a análise e o projeto de vigas: assunto ministrado no segundo ano, para todas as habilitações de Engenharia na disciplina de Resistência dos Materiais e que é trabalhado de forma mais aprofundada com estudantes de Engenharia Civil. Em Rocha e Lima (2023), foi apresentado o que, de acordo com Camarena (2017), é intitulado *história do evento contextualizado*, um documento que descreve uma análise prévia da situação de ensino. Nesse artigo, também foi exibida uma primeira versão do enunciado do EC e, após uma nova leitura e análise por parte dos docentes, identificou-se que era necessário acrescentar uma informação no item a) e que a antiga proposta de dimensionamento apresentada no item c) fugia do escopo do evento. Dessa forma, o Quadro 1 explicita o enunciado refinado. É importante observar que, antes de ser implementado com os estudantes, é necessário que o evento seja detalhadamente analisado e reanalisado pelo docente para que imprecisões possam ser evitadas e, se for o caso, refinamentos possam ser inseridos ao enunciado previamente ao seu desenvolvimento em sala de aula.

Quadro 1 – Enunciado do evento contextualizado

Deseja-se construir um reservatório elevado com tampa que irá fornecer água a uma casa com 6 pessoas, no formato e dimensões mostrados na figura abaixo. O material utilizado para a construção será concreto armado e, para determinar a quantidade de aço necessária para armar as paredes do reservatório, o projetista precisa determinar qual o momento fletor máximo produzido pelo empuxo da água nas paredes laterais.



Para tanto, é possível fazer uma análise plana do problema e o empuxo pode ser representado por uma carga triangular uniformemente distribuída na parede. Ele é calculado por $P = \gamma_a \cdot K_a \cdot h$, sendo $\gamma_a = 10 \text{ kN/m}^3$ o peso específico da água, $K_a = 1$ é o coeficiente de empuxo da água e h é a altura do nível d'água em relação a base do reservatório. Dessa forma, é pedido:

- As dimensões do reservatório estão adequadas para abastecer essa casa diariamente?
- Qual o momento fletor máximo em uma das paredes do reservatório?
- Para esse item, considere que o reservatório a ser construído será enterrado e com tampa. O solo onde será construído o reservatório possui peso específico $\gamma_s = 20 \text{ kN/m}^3$ e tem coeficiente de empuxo $K_c = 0,6$. Como premissa, a situação mais desfavorável durante a construção desse reservatório será o momento em que esse se encontrar vazio, já que teremos apenas o empuxo do solo atuando nas paredes. Sendo assim, determine qual o momento fletor máximo em uma das paredes nessa situação.
- Considerando agora que o reservatório enterrado já foi instalado e está pronto para o abastecimento das residências, qual o momento fletor máximo em uma das paredes? Compare o resultado obtido com o determinado no item anterior.

Fonte: Elaborado pelos autores (2023).

Em relação à proposta didática, para que o EC se desenvolva da melhor forma possível, é sugerido que, antes de apresentá-lo aos estudantes, eles se familiarizem com o contexto no qual o problema a ser resolvido está inserido — no caso, a análise e o projeto de vigas. Assim, é proposta uma atividade de pesquisa e estudo (denominada de *Atividade de preparação prévia*) duas semanas antes de introduzir efetivamente o evento aos estudantes e iniciar sua resolução.

Essa atividade, apresentada no Quadro 2, deve ser realizada de forma interdisciplinar, envolvendo as disciplinas de Matemática e Física, já que a análise estática da viga a ser realizada pelos estudantes permeia conteúdos abordados em ambas as disciplinas. A proposta é que essa atividade seja realizada em um Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA) e que os

resultados sejam compartilhados nesse mesmo AVA.

Quadro 2 – Atividade de preparação prévia

Atividade de preparação prévia

Segundo Beer *et al.* (2011), vigas são (geralmente) elementos estruturais prismáticos retos longos, que suportam forças (na maioria dos casos perpendiculares ao eixo da viga) aplicadas em vários pontos ao longo de seu comprimento. Essas forças são chamadas de carregamento transversal, o qual provoca na viga somente flexão e cisalhamento. De maneira a melhorar a compreensão do estudo que faremos na próxima aula, respondam às seguintes questões:

- Quais são os principais tipos de carregamento transversal que podem solicitar uma viga? Quais são as unidades comumente utilizadas?
- Quais são as possíveis classificações de uma viga segundo sua vinculação?
- Quais são os esforços internos que podem surgir em uma viga?
- Encontre um exemplo real de uma viga biapoiada submetida a um carregamento uniformemente distribuído e anexe a foto abaixo. Em seguida, faça o diagrama de corpo livre da viga considerando uma carga distribuída genérica P e um vão de comprimento L . Qual será a força cortante e o momento fletor máximos?

Fonte: Elaborado pelos autores (2023).

Para uma melhor compreensão dos leitores, sempre que uma viga é submetida a um determinado carregamento, internamente surgem os chamados *esforços internos solicitantes*, ligações internas de tensões. O chamado esforço normal (N) age sempre na direção perpendicular à seção transversal da viga e pode ser um esforço de tração ou de compressão. O esforço cortante (V) representa o efeito da força que tende a cisalhar (ou “cortar”) o elemento de barra, ou seja, age na direção transversal ao eixo da viga. Por fim, o momento fletor (M) representa o efeito de flexão (ou dobramento) em uma seção transversal de uma barra.

De forma a efetuar corretamente o dimensionamento e projeto de vigas em flexão, é necessário determinar qual a intensidade e localização do momento fletor máximo no elemento de barra, afinal, esse é um esforço que pode variar de acordo com uma distância x medida a partir de uma das extremidades do elemento de barra e é diretamente proporcional à tensão normal que ocorre em determinado ponto da viga. Para determinar de forma mais simples esse momento máximo, é possível construir uma representação gráfica desses valores de momento em função da distância x , o que é chamado na Engenharia de diagrama de esforços internos solicitantes (BEER et al., 2011).

Caso a viga suporte mais de dois ou três carregamentos diferentes, ao invés de se considerar o equilíbrio de cada lado da seção analisada e determinar assim os valores de V e M desejados, é mais vantajoso considerar uma relação existente entre o carregamento atuante p , a força cortante V e o momento fletor M , dada por

$$\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dV}{dx} = -p(x) \quad (1)$$

Ou seja, uma vez determinada a função V é possível determinar M integrando a função V em relação a x ou, uma vez representada graficamente a função V , é possível determinar a medida da área sob essa curva, considerando essa positiva na região em que V for positiva e negativa na região em que V for negativa. Ainda, a Equação 1 indica que $V = 0$ em pontos em que M é máximo, o que facilita a determinação dos pontos críticos para a análise de vigas. Para maiores detalhes consultar Beer *et al.* (2011).

Para a futura implementação do EC, do ponto de vista metodológico, serão propostos e conduzidos pela primeira autora do artigo dois encontros com duração de 2 horas para a resolução do evento, de maneira que, no início do primeiro encontro, sejam retomadas e discutidas coletivamente as questões da atividade de preparação prévia, com o intuito de organizar de maneira cientificamente precisa, ainda que de modo acessível a estudantes ingressantes no curso de Engenharia, os conhecimentos que eles desenvolveram por meio da atividade que conduziram. Após essas reflexões, os estudantes devem se reunir nos grupos colaborativos com três integrantes cada.

Com o intuito de assistir às equipes na resolução do EC foram elaboradas questões auxiliares (Quadros 3 e 4) para cada um dos encontros, as quais podem ser respondidas com auxílio de qualquer recurso tecnológico a que os alunos tenham acesso. Na sequência de cada resposta, o professor deve fazer uma discussão sobre as explanações dadas pelos estudantes. A divisão foi feita objetivando que os estudantes resolvessem os itens a) e b) no 1º encontro e os itens c) e d) no 2º encontro.

Quadro 3 – Questões auxiliares do 1º encontro

1. Qual é o consumo médio diário de água de uma pessoa?
2. Faça um diagrama de corpo livre (DCL) de uma das paredes do reservatório.
3. Determine a força resultante P_A do esforço proveniente do empuxo da água.
4. Localize no DCL a posição da resultante P_A do esforço proveniente do empuxo da água.
5. A equação do esforço cortante é uma relação funcional? Em caso afirmativo, qual a variável dependente e qual a variável independente?
6. A equação do momento fletor é uma relação funcional? Em caso afirmativo, qual a variável dependente e qual a variável independente?
7. Em qual posição ocorre o momento fletor máximo? Em seguida, determine seu valor.

Fonte: Elaborado pelos autores (2023).

O objetivo do 1º encontro é que os alunos iniciem a resolução do EC fazendo uma pesquisa em meios eletrônicos sobre qual é o consumo médio diário de água de uma pessoa

(Questão 1), a fim de verificar se as dimensões do reservatório de água estão adequadas para abastecer a casa diariamente (item a)). Na sequência, os estudantes devem responder às Questões 2 a 7 que visam a retomar conceitos de funções reais de uma variável real e auxiliar na análise estática do problema para que assim consigam responder à pergunta do item b).

Durante a resolução desses dois primeiros itens, as equipes podem se deparar com algumas dificuldades relacionadas ao contexto do evento, como: entender que a análise a ser realizada é plana e que, para simplificar os cálculos, deve ser feita a cada 1 metro de extensão; saber que o valor da força resultante P_A do empuxo da água é igual à medida da área do triângulo retângulo (que é a carga distribuída gerada pelo empuxo da água na parede) e que essa força está localizada no centro de gravidade desse triângulo.

Já o 2º encontro tem como meta finalizar alguns pontos que, eventualmente, tenham restado do 1º encontro e a resolução dos itens c) e d) do EC, nos quais são apresentadas situações diferentes, mas com uma proposta similar de resolução, daquela trazida no item b). Dessa forma, os conceitos mobilizados nesse encontro são semelhantes aos do 1º encontro, bem como as questões auxiliares recomendadas. Para maiores informações acerca do contexto do evento, é oportuno consultar Rocha e Lima (2023). A seguir, serão feitas algumas considerações em relação ao que foi apresentado e como pretende-se dar continuidade a esse trabalho em um futuro próximo.

Quadro 4 – Questões auxiliares do 2º encontro

1. Faça um diagrama de corpo livre (DCL) de uma das paredes do reservatório considerando a situação proposta no item c).
2. Determine a força resultante P_S do esforço proveniente do empuxo do solo.
3. Localize no DCL a posição da resultante P_S do esforço proveniente do empuxo do solo.
4. A equação do esforço cortante é uma relação funcional? Em caso afirmativo, qual a variável dependente e qual a variável independente?
5. A equação do momento fletor é uma relação funcional? Em caso afirmativo, qual a variável dependente e qual a variável independente?
6. Em qual posição ocorre o momento fletor máximo? Em seguida, determine seu valor.
7. O que muda entre a situação colocada no item d) e a do item c)? Faça um novo diagrama de corpo livre (DCL) de uma das paredes do reservatório considerando a situação proposta no item d).
8. Realize o que é proposto nas questões 2 a 6 para a nova situação.

Fonte: Elaborado pelos autores (2023).

Considerações finais

Nesse artigo, foi apresentada uma proposta de organização didática e levantadas algumas possíveis dificuldades que os alunos podem encontrar ao resolver um EC que tem por objetivo construir, junto a estudantes do primeiro ano de Engenharia, na disciplina de Cálculo

Diferencial e Integral, alguns conhecimentos relativos ao Cálculo Integral e reforçar conhecimentos relativos a máximos e mínimos de funções reais de uma variável real. O enunciado do EC exposto no Quadro 1 foi modificado em relação ao publicado em Rocha e Lima (2023) e pode ser refinado a cada nova leitura e análise por parte dos docentes. Tal refinamento pode se dar antes da implementação do evento em sala de aula, para evitar imprecisões conceituais e obstáculos, por meio de uma proposição mais clara do problema, mas também pode ocorrer após a implementação, a partir do que foi observado pelo docente ou pelo pesquisador durante o trabalho com o evento, visando a incrementar as experiências de aprendizagem dos sujeitos participantes.

Após a elaboração, aperfeiçoamento do enunciado e organização didática do evento, a próxima etapa será a implementação desse por meio de um projeto piloto junto a um grupo de estudantes que estão finalizando a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. A coleta de dados será realizada por meio de gravações em áudio e vídeo, bem como dos materiais escritos pelos estudantes. A análise subsequente, sob diversas perspectivas, nos permitirá avaliar se os objetivos estabelecidos foram alcançados, identificando ajustes ou reformulações necessárias para otimizar os resultados em termos da aprendizagem dos engenheiros em formação.

É relevante destacar que a abordagem para a matemática nos cursos de Engenharia aqui proposta está voltada à solução de um dos problemas citados por González-Martín *et al.* (2021): uma das dificuldades dos estudantes em relação à matemática nos cursos nos quais esse não é o objetivo principal está na frequente falta de conexão entre os conteúdos lecionados nas disciplinas da área de matemática e os conteúdos das disciplinas específicas de cursos como a Engenharia.

Por fim, outro ponto que merece ênfase e que é levantado por González-Martín *et al.* (2021) seria que, para a reorganização da forma de abordagem do conteúdo — de uma estrutura “tradicional” rumo a uma proposta que contemple tarefas mais realistas e voltadas para diferentes contextos (como é a proposta da utilização de EC em sala de aula) — acontecer da melhor forma possível, é necessário um trabalho coletivo, que envolva professores de matemática (que podem ser matemáticos, engenheiros ou especialistas em outras áreas), professores de outras disciplinas, pesquisadores em educação matemática e profissionais de diferentes campos.

Agradecimentos

Agradecemos à Pontifícia Universidade Católica de São Paulo pelo apoio e à CAPES pela bolsa concedida para a realização do doutorado da primeira autora.

Referências

- ARIFIN, S.; WAHYUDIN; HERMAN, T. The Effect of Students' Mathematics Self-efficacy on Mathematical Understanding Performance. *İlköğretim Online*, [s.l.], v. 20, n. 1, p. 617–627, 1 jan. 2021. Elementary Education Online. DOI: <http://dx.doi.org/10.17051/ilkonline.2021.01.52>.
- BEER, Ferdinand Pierre *et al.* **Mecânica dos Materiais**. 5. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2011.
- BRASIL. **Resolução CNE/CES n. 2/2019, de 23 de abril de 2019**. Diretrizes Curriculares Nacionais do Curso de Graduação em Engenharia. Disponível em: <https://abmes.org.br/legislacoes/detalhe/2764/resolucao-cne-ces-n-2>. Acesso em: 9 nov. 2023.
- CAMARENA, P. Constructos Teóricos de la Metodología Dipping en el Área de la Matemática. **3º Congreso Internacional de Ingeniería Electromecánica y de Sistemas**, p. 1–7, 2004.
- CAMARENA, P. A treinta años de la teoría educativa “Matemática en el Contexto de las Ciencias”. **Inovación Educativa**, [s.l.], v. 13, n. 62, p. 17–44, 2013. Disponível em: http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-26732013000200003. Acesso em: 9 nov. 2023.
- CAMARENA, P. Didáctica de la matemática em contexto. **Educação Matemática em Pesquisa**, São Paulo, v. 19, n. 2, 01–26, 2017. DOI: <https://doi.org/10.23925/1983-3156.2017v19i2p1-26>
- CAMARENA, Patricia. **Teoría de la matemática en el contexto de las ciencias**. 1. ed. Santiago del Estero: EDUNSE, 2021.
- CAMARENA, Patricia *et al.* Pensamiento matemático y cultura matemática: concepciones semánticas en la teoría de la matemática en el contexto de las ciencias. **PNA**, v. 17, n. 1, p. 51–88, 2022.
- CHEVALLARD, Yves. **La transposición didáctica, del saber sabio al saber enseñado**. Buenos Aires: Aique Grupo Editor, 1991.
- GOMES, Eloiza *et al.* Utilização de eventos contextualizados nas aulas de Vetores e Geometria Analítica – Primeiras Reflexões. *In*: CONGRESSO BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO EM ENGENHARIA, XLVI, 2018, Salvador. **Anais...** Salvador: ABENGE, 2018a. p. 1–10.
- GOMES, Eloiza *et al.* Análise dinâmica de pórticos: uma oportunidade para a construção de um evento contextualizado para o ensino e a aprendizagem de álgebra linear. *In*: CONGRESSO BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO EM ENGENHARIA, XLVI, 2018, Salvador. **Anais...** Salvador: ABENGE, 2018b. p. 1–10.
- GOMES, Eloiza *et al.* Evento contextualizado: estudo de um problema da Engenharia Civil para o ensino de Matemática. *In*: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, XV, 2019, Medellín. **Anais...** v. 1, Medellín, 2019, p. 1–8.
- GONZÁLEZ-MARTÍN, A. S. $V_B - V_A = \int_A^B f(x)dx$. The Use of Integrals in Engineering Programmes: a Praxeological Analysis of Textbooks and Teaching Practices in Strength of Materials and Electricity and Magnetism Courses. **International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education**, v. 7, p. 211–234, 2021.
- GONZÁLEZ-MARTÍN, A. S. *et al.* Mathematics and other disciplines, and the role of modelling. Research And Development In **University Mathematics Education**, [s.l.], p. 169–189, 2 abr. 2021. Routledge. DOI: <http://dx.doi.org/10.4324/9780429346859-12>.

- LIMA, G. L.; BIANCHINI, B. L.; GOMES, E. Conhecimentos docentes e o Modelo Didático da Matemática em Contexto: reflexões iniciais. **Educação Matemática Debate**, v. 2, n. 4, p. 116–135, 2018. DOI: <http://dx.doi.org/10.24116/emd25266136v2n42018a06>
- LIMA, G. L., BIANCHINI, B. L.; GOMES, E. Estudando a Curva Característica de um Diodo Semicondutor na disciplina inicial de Cálculo Diferencial e Integral: oportunidade para o desenvolvimento de competências matemáticas e gerais na Engenharia. *In: Livro de actas del XXII Encuentro Nacional y XIV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería*, 2021. p. 178–189. DOI: 10.22235/emci2021.2
- LIMA, G. L. *et al.* Ensino da Matemática na Engenharia e as atuais Diretrizes Curriculares Nacionais: o Modelo Didático da Matemática em Contexto como possível estratégia. **Currículo sem Fronteiras**, v. 21, n. 2, 2021, p. 785-816.
- LIMA, M. E. S. *et al.* The Teacher, the Fedathi Sequence and the Failure Indexes of the Subject Differential and Integral Calculus. **Research, Society and Development**, [s.l.], v. 11, n. 9, p. e44011932007, 2022. DOI: 10.33448/rsd-v11i9.32007. Disponível em: <https://rsdjournal.org/index.php/rsd/article/view/32007>. Acesso em: 8 nov. 2023.
- MERCAT *et al.* Perceptions of Mathematics. *In: POHJOLAINEN, S. et al. (eds.). Modern Mathematics Education for Engineering Curricula in Europe (A Comparative Analysis of EU, Russia, Georgia and Armenia)*. Switzerland: Springer, p. 17–31, 2018.
- PINTO, Rieuse Lopes. **Equações diferenciais ordinárias de variáveis separáveis na engenharia civil**: uma abordagem contextualizada a partir de um problema de transferência de calor. 2021. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2021.
- PITT, M. Why go to university? The past and future of engineering education. *In: KAPRANO, P. (ed.). The interdisciplinary future of engineering education: breaking through boundaries in teaching and learning*. New York e London: Routledge Taylor & Francis Group, p. 17-27, 2019.
- PHILOT, Juliana Martins. **Evento contextualizado**: uma proposta de ensino e de aprendizagem de autovalor e autovetor no curso de Engenharia de Controle e Automação e áreas afins. 2022. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2022.
- POHJOLAINEN, S. Mathematics Education in EU for STEM Disciplines. *In: POHJOLAINEN, S. et al. (eds.). Modern Mathematics Education for Engineering Curricula in Europe (A Comparative Analysis of EU, Russia, Georgia and Armenia)*. Suíça: Springer, p. 1-16, 2018.
- QUÉRÉ, Pierre-Vincent. **Les mathématiques dans la formation des ingénieurs et sur leur lieu de travail: études et propositions (cas de la France)**. Education. Université de Bretagne occidentale – Brest, 2019. Français. NNT: 2019BRES0041ff. tel-02281937v3f. Disponível em: <https://theses.hal.science/tel-02281937v3>. Acesso em: 9 nov. 2023.
- ROCHA, K. B.; LIMA, G. L. Reservatório elevado: um evento contextualizado para o ensino de Matemática elaborado à luz da TMCC. *In: CONGRESSO BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO EM ENGENHARIA, 51º, 2023, Rio de Janeiro. Anais...* p. 1–11, set. 2023.
- SILVA, Alessandro Rosa. **Uma proposta de ensino de equações diferenciais em cursos de Engenharia Civil à luz da teoria a matemática no contexto das ciências**. 2022. Tese (Doutorado

em Educação Matemática) – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2022.

SOUZA, G. M.; LIMA, G. L. Uma proposta de abordagem contextualizada das integrais múltiplas na engenharia. **Revista de Produção Discente em Educação Matemática**. São Paulo, v. 9, n. 2, p. 48–57, 2020. DOI: <http://dx.doi.org/10.23925/2238-8044.2020v9i2p48-57>.

TURRA, H. *et al.* Flipped classroom experiences and their impact on engineering students' attitudes towards university-level mathematics. **Higher Education Pedagogies**, [s.l.], v. 4, n. 1, p. 136–155, 1 jan. 2019. Informa UK Limited. DOI: <http://dx.doi.org/10.1080/23752696.2019.1644963>.