Sociedade Brasileira de Educação Matemática

Resolver problemas à luz da Educação Matemática Crítica

Milton Sgambatti Júnior[1]
Barbara Lutaif Bianchini[2]

Resumo: Neste estudo investiga-se o uso da metodologia de Resolução de Problemas articulada à Educação Matemática Crítica como estratégia para potencializar o processo de ensino-aprendizagem da Matemática. A proposta foi aplicada a uma turma de 2ª série do Ensino Médio de uma escola tradicional de São Paulo, na qual buscou-se aproximar os estudantes da Matemática e fortalecer sua formação crítica e cidadã por meio de uma sequência didática; na presente pesquisa analisou-se dados provenientes da primeira de três etapas de uma sequência didática. Os resultados indicam que a metodologia favorece o engajamento, amplia a compreensão conceitual e abre caminhos para práticas pedagógicas menos tradicionais. Também evidencia desafios e possibilidades que exigem maior investigação para consolidar processos de ensino que rompam com modelos convencionais. Verificou-se, ainda, que mesmo quando se aproxima-se do paradigma do exercício, a abordagem mantém sua potência formativa.

Palavras-chave: Educação Matemática Crítica. Resolução de problemas. Avaliação de resultados. Cenários de Investigação.

Solve problems considering Critical Mathematics Education

Abstract: This study investigates the use of Problem-solving methodology articulated with Critical Mathematics Education as a strategy to enhance the teaching-learning process of Mathematics. The proposal was applied to a 2nd-year high school class in a traditional school in São Paulo, where the aim was to bring students closer to Mathematics and strengthen their critical and civic education through a didactic sequence; in this research, data from the first of three stages of a didactic sequence were analyzed. The results indicate that the methodology favors engagement, broadens conceptual understanding, and opens paths to less traditional pedagogical practices. It also highlights challenges and possibilities that require further investigation to consolidate teaching processes that break with conventional models. It was also found that even when approaching the exercise paradigm, the approach maintains its formative potential.

Keywords: Critical Mathematics Education. Problem-solving. Results assessment. Research Scenarios.

Resolver problemas a la luz de la Educación Matemática Crítica

Resumen: Este estudio investiga el uso de la metodología de Resolución de Problemas articulada con la Educación Matemática Crítica como estrategia para potenciar el proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas. La propuesta se aplicó a una clase de 2º año de secundaria en una escuela tradicional de São Paulo, donde el objetivo era acercar a los estudiantes a las Matemáticas y fortalecer su formación crítica y cívica a través de una secuencia didáctica; en esta investigación, se analizaron datos de la primera de tres etapas de una secuencia didáctica. Los resultados indican que la metodología favorece la participación, amplía la comprensión conceptual y abre caminos a prácticas pedagógicas menos tradicionales. También destaca desafíos y posibilidades que requieren mayor investigación para consolidar procesos de enseñanza que rompan con los modelos convencionales. También se encontró que incluso al acercarse al paradigma del ejercicio, el enfoque mantiene su potencial formativo.

Palabras clave: Educação Matemática Crítica. Resolución de problemas. Evaluación de resultados. Escenarios de investigación.

[1] Doutorando em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, SP, Brasil. E-mail: milton.sgambatti@hotmail.com. Orcid: https://orcid.org/0009-0004-2559-5650.

[2] Doutora em Educação. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, SP, Brasil. E-mail: barbaralb@gmail.com. Orcid: https://orcid.org/0000-0003-0388-1985.

eISSN 2317-904X DOI: 10.37001/emr.v30i88. Recebido 04/09/2024 | Aprovado 10/09/2025 | Publicado • 30/09/2025

1 Introdução

O uso da metodologia de resolução de problemas é reconhecido há anos como estratégia capaz de dinamizar e potencializar a aprendizagem da Matemática, atribuindo sentido aos conteúdos e favorecendo o engajamento dos estudantes. Este estudo busca contribuir para o planejamento docente e para a condução de atividades baseadas nessa metodologia, especialmente no contexto pós-pandemia, que deixou desafios relacionados à aprendizagem, à relação dos estudantes com a Matemática e ao fortalecimento da estima necessária para sua formação crítica e cidadã.

Desde a retomada do ensino presencial ainda é comum nos depararmos com muitos desafios que têm dificultado os processos pedagógicos e a aprendizagem dos estudantes; elencamos dois, que serão objeto de reflexão nesse estudo: (i) como criar uma relação próxima entre os estudantes e a Matemática e (ii) como criar e/ou fortalecer nos estudantes a estima necessária para que caminhem em sua formação crítica e cidadã utilizando o saber matemático como meio.

A retomada presencial abriu oportunidades para reconexão humana, diálogo e experimentação de estratégias inovadoras. A compreensão da Matemática como construção humana, conforme propõe Freudenthal (1973), reforça sua acessibilidade e relação com a resolução de problemas cotidianos. A aproximação entre a metodologia de Resolução de Problemas e Educação Matemática Crítica ancora-se na ideia de que

> uma situação só pode ser concebida como um problema na medida em que [...] não dispomos de procedimentos automáticos que nos permitam solucioná-la de forma mais ou menos imediata, sem exigir, de alguma forma, um processo de reflexão ou de tomada de decisões. (Echeverría; Pozzo, 1998, p.16.)

Proença (2018) reflete, ainda, que "[...] uma situação de Matemática se torna um problema quando a pessoa precisa mobilizar conceitos, princípios e procedimentos matemáticos aprendidos anteriormente para chegar a uma resposta. Não se trata, assim, do uso direto de uma fórmula ou regra conhecidas [...] (Proença, 2018, p.17-18). A essas reflexões acrescentamos uma importante característica da Matemática que, em nosso estudo, é trabalhada de forma estrutural, que é o fato da Matemática, em algumas oportunidades e para algumas situações-problema, ser capaz de apresentar uma solução específica, muitas vezes tida como única solução para a questão proposta, mas que em diversas oportunidades, como na que trabalhamos e apresentaremos nesse estudo, ela pode e deveria discutir o assunto, tema ou problema e apresentar possibilidades distintas de solução para o problema, ampliando assim suas possibilidades de interpretação e não obrigatoriamente atingir o objetivo de encontrar a solução – única ou correta – para o problema proposto.

Criar espaços propícios ao desenvolvimento da criticidade exige planejamento cuidadoso, respeito ao tempo dos estudantes e construção de conflitos cognitivos férteis. Como destaca Polya (1995), "encontrar a solução de um problema constitui uma descoberta" (Polya, 1995, p.64) e essa descoberta fortalece vínculos entre os estudantes e a Matemática e contribui para o fortalecimento da estima dos estudantes. Este estudo apresentamos, analisamos e discutimos a primeira de três sequências didáticas planejadas e aplicadas: a primeira baseada em um problema da realidade, datado do século VI a.C. e reconstruído a partir de um problema de semirrealidade, como sugere Skovsmose (2000); a segunda e a terceira foram construídas a partir de novos Cenários de Investigação, também em contexto de semirrealidade (Skovsmose, 2000) nas quais os estudantes deveriam construir, apoiados em reflexões críticas construídas coletivamente, processos autorais para a Resolução de Problemas (Polya, 1995).

Pontuamos que a articulação entre essas três sequências didáticas foi capaz de (re)criar uma Matemática rica em relações, na qual é possível enfatizar as relações com uma realidade já vivida mais do que com uma realidade falsa ou forçosamente contextualizada, mas nos ajuda a fortalecer o conceito de que "a realidade vivida deveria ser a espinha dorsal que une experiências Matemáticas." (Skovsmose, 2001, p.27).

A competência crítica visada envolve engajamento dos estudantes e análise reflexiva do currículo, que deve contemplar problemas situados na realidade e favorecer participação ativa de professores e estudantes, visto que eles "têm a possibilidade de tomar decisões e se envolver no processo do planejamento educacional" (Skovsmose, 2001, p.50). Concordamos com Skovsmose (2001) que romper com manuais que oferecem exercícios disfarçados de problemas é essencial para permitir processos inventivos, nos quais estudantes possam criar, experimentar e relacionar saberes à sociedade. Tal engajamento está ligado ao fortalecimento político e social dos estudantes, associado à natureza dialógica do conhecimento crítico-reflexivo e um dos pilares da Educação Matemática Crítica.

Uma das maneiras de alcançar esses resultados é romper com a utilização *ipsis litteris*, do que podemos chamar de manuais didáticos, que podem ser exemplificados como sendo os manuais do professor, comum em livros de apoio didático, que contém exemplos resolvidos que orientam os estudantes nas resoluções dos exercícios[3] que são propostos na sequência desses exemplos. Nesses casos o que os estudantes devem fazer é *seguir o modelo* e encontrar as soluções (únicas e corretas) solicitadas nos exercícios disfarçados de problemas.

Partindo do princípio, fundamental para a Educação Matemática Crítica, de que a Matemática é uma construção humana e seus processos, modos de pensar, estratégias e leituras críticas são construídos pela humanidade e não descobertos, é que devem estar disponíveis para todos os estudantes, que poderão inventar, criar e experimentar possibilidades; propusemos atividades em ambiente no qual os estudantes estejam aptos a criar e a experimentar com a Matemática, esses problemas são relevantes, visto que estão conectados às suas experiências práticas e pessoais. Neste espaço, é possível caracterizar o engajamento dos estudantes no processo de criação como elemento capaz de potencializar o engajamento político e social de tais estudantes o que colocaria em cena a natureza dialógica do conhecimento crítico-reflexivo que, por sua vez, é princípio constituinte da Educação Matemática Crítica. (Skovsmose, 2001).

Neste Cenário, propício à investigação (Skovsmose, 2000), as sequências didáticas, apoiadas em princípios da Educação Matemática Crítica (Skovsmose, 2000, 2001), utilizaram a estratégia de Resolução de Problemas proposta por Polya (1995) e o contexto histórico da construção do aqueduto de Eupalinos para explorando saberes diversos e buscar promover curiosidade, conflito cognitivo e tomada de decisões, essenciais para aproximar os estudantes da Matemática e fortalecer sua análise crítica de situações cotidianas.

2 O problema matemático com referência a uma semirrealidade

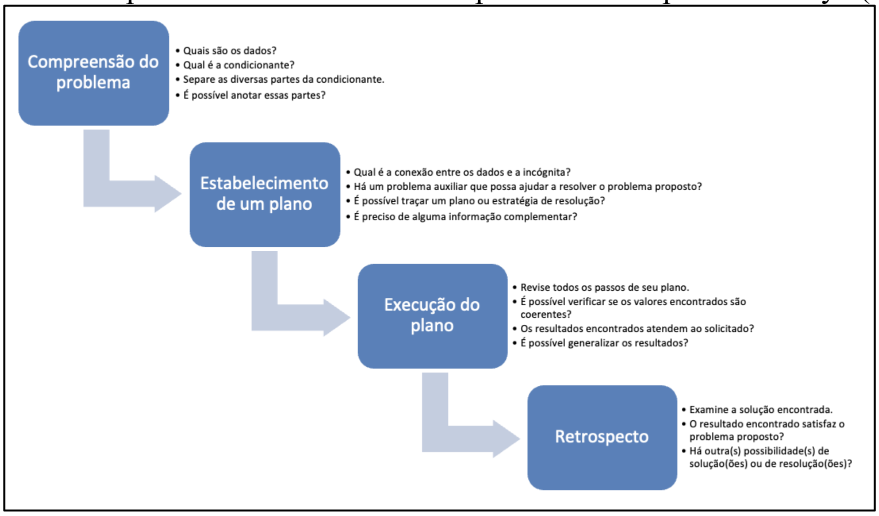
Nossa proposta de aplicação da Matemática, foi estruturada apoiada na **Resolução de Problemas**, conforme mostra a Figura 1, nas etapas de resolução de um problema proposta por Polya (1995): (1) Compreensão do problema; (2) Estabelecimento de um plano; (3) Execução do plano e (4) Retrospecto. A atividade proposta aos estudantes envolvia ainda uma sensibilização inicial, que tratamos como uma etapa 0 (zero) às etapas propostas por Polya (1995), visto que sua importância e relevância, a nosso ver, é equivalente às quatro etapas por ele propostas.

Essa etapa (etapa 0) foi planejada para colaborar com a aderência dos estudantes à

[3] Nesses manuais, muitas vezes, esse grupo de itens/exercícios, é tratada como um grupo de "*problemas*" que seguem e/ou se aproximam sobremaneira do modelo do exemplo resolvido; o uso do termo *problemas* conduz muitos professores ao equívoco de pensar estar aplicando a metodologia de resolução de problemas, enquanto, de fato, o que está sendo feito é uma simples *lista de exercícios*.

proposta e com a intenção de reconectar cada um deles com a Matemática e com saberes matemáticos capazes de os conduzir nos processos de reflexão e de investigação da situação-problema proposta.

Figura 1 – Etapas de "Como resolver um problema" adaptada de Polya (1995)



Fonte: elaborado pelo primeiro autor autor (2025)

Ao seguir essas etapas os estudantes fariam uso de elementos da **Educação Matemática Crítica**, que está associada a um ambiente de aprendizagem no qual eles são convidados a, utilizando a linguagem crítico-matemática, problematizar e investigar situações em um referencial de semirrealidade (ver Figura 2). Um dos objetivos da atividade dessa primeira sequência didática foi criar espaço que propiciasse aos estudantes o desenvolvimento de estratégias diversas para a criação de modelos completos ou parciais capazes de representar a realidade subjetiva e/ou objetiva[4] a que foram expostos e ainda verificar se a investigação em curso fica mais simples de ser analisada e avaliada a partir do modelo criado (Barbosa, 2004).

As estratégias de ensino baseadas em *Cenários para Investigação* diferem significativamente daquelas centradas em exercícios. Segundo Skovsmose (2000), a distinção está nas formas de conduzir e estimular os estudantes a produzirem significados, independentemente dos objetos de conhecimento envolvidos. A escolha das atividades implica também a escolha dos motivos que orientam as ações nelas propostas; assim, o contexto que sustenta o trabalho em sala de aula pode alterar a postura dos estudantes diante do problema apresentado. Esses diferentes tipos de referência são fundamentais para compreender como se

[4] A realidade subjetiva deve ser relevante e compreendida pelo estudante a partir de seu quadro teórico atual, isto é, deve considerar o saber prévio de cada um dos estudantes enquanto a realidade objetiva deve ter uma relação próxima com questões reais existentes no cotidiano desses mesmos estudantes.

produz significado nas atividades e, para Skovsmose, esses referenciais podem ser classificados em três modalidades.

> Primeiro, questões e atividades matemáticas podem se referir à matemática e somente a ela. Segundo, é possível se referir a uma semirrealidade – não se trata de uma realidade que "de fato" observamos, mas uma realidade construída [...]. Finalmente, alunos e professores podem trabalhar com tarefas com referências a situações da vida real. (Skovsmose, 2000, p.68)

Combinando os dois paradigmas e as três referências citadas, o autor estabelece seis tipos de ambientes possíveis para a sala de aula, como apresentado na Figura 2.

Figura 2 – Ambientes de aprendizagem, adaptado de Skovsmose (2000, p.68)

Paradigma / **Referência**	Exercício	Cenários para investigação
Matemática pura	(1)	(2)
Semirrealidade	(3)	(4)
Realidade	(5)	(6)

Fonte: elaborado pelo primeiro autor (2025)

A partir de Skovsmose (2000), a sequência didática analisada pode ser caracterizada como uma proposta que se origina de uma situação referenciada na realidade e é transformada em um problema de semirrealidade dentro do paradigma dos Cenários para Investigação, correspondendo ao ambiente (4) do quadro citado na Figura 2. Em nossas práticas de ensino, buscamos formular questões que aproximem a Matemática do cotidiano dos estudantes; por isso, utilizamos a realidade histórica como suporte para problemas que dialogam com situações atuais. Além de favorecer a aprendizagem da Matemática a partir de sua própria estrutura, essa abordagem pretende evidenciar sua presença nas experiências diárias, reforçando seu caráter humano e acessível. Tal ambiente torna possível integrar saberes diversos e destacar a natureza multifacetada e interdisciplinar da Matemática.

3 O desenvolvimento da investigação

Após o planejamento das três sequências didáticas, decidimos implementar a primeira no início de fevereiro com uma turma de 25 estudantes da 2ª série do Ensino Médio de um colégio particular da zona centro-sul de São Paulo. Na aula inicial, após o retorno das férias, promovemos um momento de acolhimento e diálogo para que os estudantes compartilhassem experiências vividas no período. Esse momento integrou a etapa de sensibilização – etapa 0, adicionada à proposta de Polya (1995) – mostrando como vivências cotidianas, como viagens, podem gerar aprendizagens inesperadas quando ampliamos nosso olhar e nos dispomos a explorar o ambiente de forma mais atenta.

A conversa evoluiu para o contexto histórico do problema que seria trabalhado, iniciando com perguntas descontraídas sobre a Grécia e suas ilhas. O interesse dos estudantes foi rapidamente capturado, com relatos sobre aspectos turísticos, culturais e históricos do país. Em seguida, apresentamos, por meio do *Google Maps*, a localização das ilhas gregas, com foco na Ilha de Samos, destacando sua relevância histórica e figuras associadas, como Hera, Pitágoras e Aristarco. Esse percurso introdutório buscou criar engajamento e estabelecer a base contextual para a atividade planejada.

Em nossas telas iniciais de sensibilização (Figura 3), havia imagens que motivariam os estudantes a interagir e nos ajudaria a seguir o plano de nossa sequência didática; ainda nesta primeira tela mostramos uma imagem relacionada às importantes belezas naturais da Grécia, belezas que são responsáveis por muitas das visitas turísticas que este país recebe.

Figura 3 – Apresentação do contexto da aula: A Ilha de Samos, na Grécia

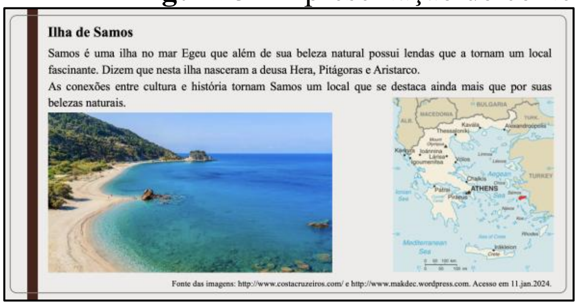


Imagem A

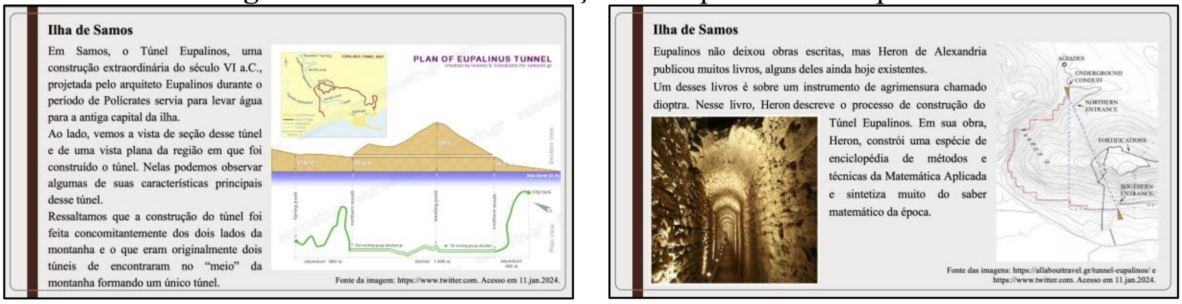
Imagem B

Fonte: elaborado pelo primeiro autor (2025)

É importante destacar que essa sequência didática foi articulada com professores de Ciências Sociais (Filosofia, História e Geografia), ampliando seu potencial pedagógico. Como desdobramento, os docentes de História planejavam discutir, duas semanas depois, os cinco períodos da história da Grécia. Por isso, incluímos na sensibilização uma breve apresentação do Heraion – templo de Hera e Patrimônio Mundial da UNESCO – como uma espécie de antecipação do conteúdo que seria aprofundado posteriormente. Em seguida, avançamos para a contextualização da Ilha de Samos, inserindo os estudantes em um ambiente de semirrealidade dentro do paradigma dos Cenários para Investigação (Skovsmose, 2000).

Nessa contextualização, apresentamos a antiga região de Samos, cercada por três centros econômicos – Nea Poli, Pythagoreio e Moni Agias Triadas – e discutimos suas dificuldades históricas de acesso à água. Introduzimos então o Aqueduto de Eupalinos, descrito por Heródoto, construído no século VI a.C. por encomenda de Polícrates. A obra, notável por ser escavada simultaneamente a partir de duas extremidades da montanha e apresentar mínimo desencontro em seu encontro central, serviu como base histórica e motivadora para a sequência didática.

Figura 4 – Plano de construção do Aqueduto de Eupalinos



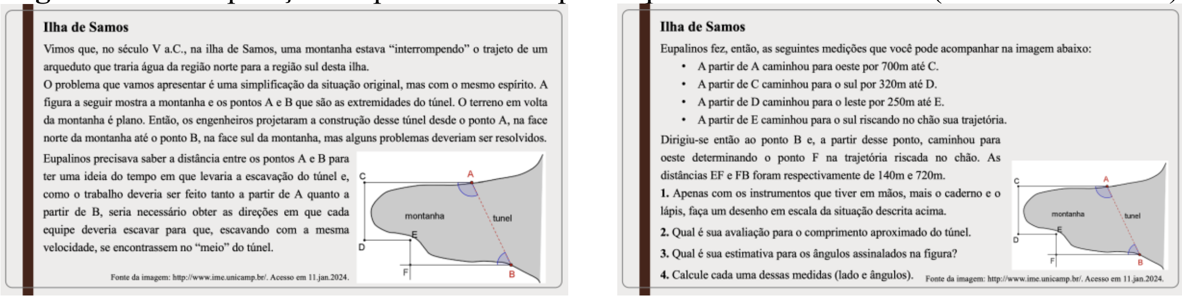
Fonte: elaborado pelo primeiro autor (2025)

Finalizamos esse momento de sensibilização entrando no *Google Maps* e apresentamos aos estudantes em duas e em três dimensões como é a região de *Pythagoreio* para que imaginassem o quão desafiador havia sido para Eupalinos conceber, planejar e construir, no século VI a.C., o aqueduto (Figura 5).

Para concluir o indispensável momento de sensibilização, permitimos que os estudantes pesquisassem autonomamente, em seus Chromebooks, informações complementares sobre o que havia sido discutido. Em seguida, iniciamos a sequência didática em um contexto de semirrealidade (Skovsmose, 2000), propondo o problema inspirado em Polya (1995): *Como Eupalinos conseguiu, apenas conhecendo a superfície praticamente plana da montanha, planejar um túnel e iniciar escavações simultâneas em ambos os lados?* A questão despertou dúvidas imediatas sobre instrumentos de medição, formas de orientação subterrânea e métodos de cálculo da época, conduzindo a uma discussão mediada pelo professor.

Com a curiosidade dos estudantes já mobilizada, avançamos para a formalização da investigação. Apresentamos, em lousa digital, a transposição do problema real para o problema matemático em semirrealidade e as quatro tarefas que estruturariam o trabalho (Figura 5). A primeira tarefa solicitava aos estudantes que, utilizando apenas instrumentos disponíveis, caderno e lápis, construíssem um desenho em escala da situação apresentada.

Figura 5 – Transposição do problema real para o problema matemático (de semirrealidade)



Fonte: elaborado pelo primeiro autor (2025)

A ausência de réguas gerou um incômodo generalizado entre os estudantes, que rapidamente questionaram como proceder sem instrumentos de medida. Ao serem orientados a *dar um jeito*, como Eupalinos, e autorizados a criar suas próprias unidades de medida, surgiram diversas soluções inventivas. Entre elas, destacaram-se: o uso de duas folhas de fichário sobrepostas para improvisar um *papel quadriculado*; a utilização de uma faixa da carteirinha escolar, com cerca de 0,9 cm, como régua e unidade de medida; e o emprego da largura de um clipe de papel como referência métrica. As produções resultantes dessas estratégias podem ser observadas na Figura 6.

Figura 6 – Imagens das representações, *em escala*, do problema matemático proposto

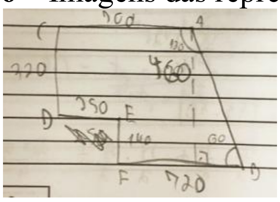


Imagem A

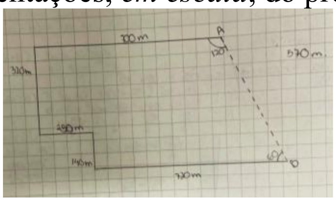


Imagem B

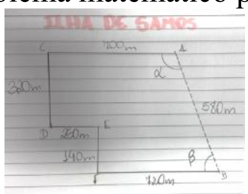


Imagem C

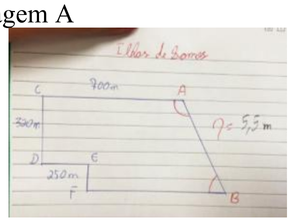


Imagem D

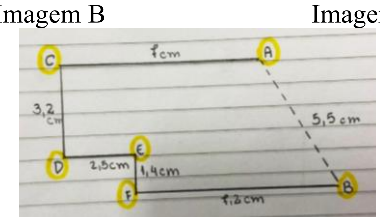


Imagem E

Fonte: imagens de arquivo pessoal do primeiro autor (2025)

A análise das produções da Figura 6 mostra que alguns estudantes não utilizaram unidades de medida, resultando em simples esboços, como nas Imagens A, C e D. O autor da Imagem A fez um desenho livre, sem preocupação com escala ou instrumentos auxiliares. Já o estudante que produziu a Imagem C, embora também não tenha criado uma unidade métrica, apresentou um desenho mais preciso, utilizando régua e incluindo uma estimativa não solicitada do comprimento do túnel. Na Imagem D, o estudante criou um *papel quadriculado* rotacionando a folha de fichário e estimou o comprimento do túnel, mas sem converter adequadamente as unidades e realizando aproximações para facilitar o desenho. Essas produções evidenciam diferentes níveis de precisão, criatividade e compreensão da tarefa.

As representações das Imagens B e E mostram estudantes que utilizaram instrumentos de medição para construir desenhos em escala. Na Imagem B, o aluno empregou papel quadriculado, atribuindo a cada quadrado o valor de 50 metros, produzindo uma representação coerente e registrando, inclusive, uma estimativa preliminar do comprimento do túnel. Já o estudante da Imagem E utilizou uma régua disponível em seu estojo e estimou o comprimento em centímetros, convertendo a unidade para facilitar o desenho, mas sem retornar à unidade original em metros.

De modo revelador, quatro dos cinco estudantes anteciparam espontaneamente a etapa seguinte da investigação ao elaborar estimativas para o comprimento do túnel, mesmo sem solicitação explícita. Na sequência, ao avançar para a segunda questão da atividade, 21 dos 25 participantes já possuíam estimativas prontas, o que permitiu discutir conversões entre unidades e a importância de adequar medidas às representações gráficas.

Tabela 1 – Aproximações do comprimento do túnel de Eupalinos

Estimativa para o comprimento do Túnel de Eupalinos										
Comprimento (em metros)	510	520	530	540	550	560	570	590	600	610
Quantidade de estudantes	1	1	3	5	4	3	4	1	2	1

Fonte: elaborado pelo primeiro autor (2025)

Os resultados foram sistematizados coletivamente na lousa e, diante das estimativas reunidas, os próprios estudantes concluíram que *o resultado certo deveria estar entre 530 e 570 metros*. Esse momento permitiu uma breve discussão sobre distribuição normal e curva normal, cujo esboço validou a percepção do grupo. Os dados obtidos foram encaminhados ao professor de álgebra, que os utilizará futuramente em atividades de estatística com a mesma turma.

Para responder à questão proposta, os estudantes precisavam elaborar um plano de ação, presente na etapa 2, descrita por Polya (1995), relativa ao estabelecimento de um plano. Esse momento, tradicionalmente associado a maior desconforto nas aulas, novamente se mostrou desafiador: a turma demonstrou dificuldade em elaborar estratégias sem imediatamente executá-las ou buscar respostas numéricas. Apesar do contrato didático enfatizar a importância do pensamento criativo e do percurso de resolução, muitos continuaram a procurar *o valor correto* do problema.

Mesmo orientados a apenas formular uma estratégia para estimar o ângulo, vários insistiram em obter o resultado exato, questionando qual seria o valor do ângulo ou se deveriam calculá-lo usando trigonometria. Ainda que não tenham conseguido limitar-se à etapa de planejamento, os estudantes efetivamente criaram estratégias e rapidamente as colocaram em prática, produzindo estimativas. As soluções encontradas foram variadas e criativas, como ilustrado nas representações da Figura 7.

Figura 7 – Imagens das estratégias utilizadas pelos estudantes para encontrar o ângulo $\hat{B}$.

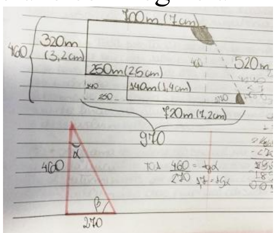


Imagem A

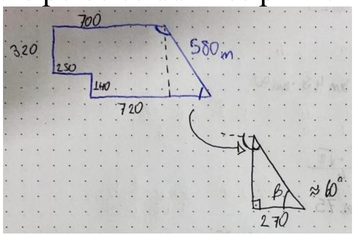


Imagem B

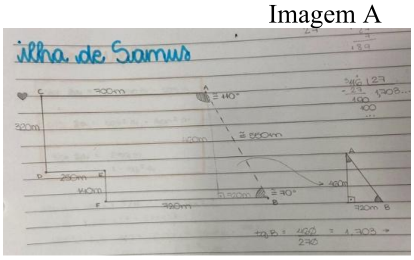


Imagem C

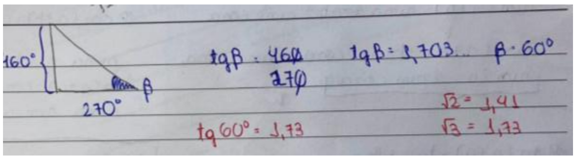


Imagem D

Fonte: imagens de arquivo pessoal do primeiro autor (2025)

Para determinar o ângulo solicitado, os estudantes mobilizaram conhecimentos de geometria plana ao reorganizar a figura original, identificando nela um triângulo retângulo – procedimento presente em todas as representações da Figura 7. Em seguida, ativaram conceitos de trigonometria no triângulo retângulo, selecionando a razão trigonométrica mais adequada (seno, cosseno ou tangente), como ilustrado nas Imagens C e D. Além disso, recorreram ao conhecimento dos valores aproximados das razões trigonométricas de arcos notáveis ou da raiz de 3, permitindo relacionar os resultados obtidos à medida do ângulo buscado.

O estudante da Imagem D utilizou a tangente para estimar o ângulo $\hat{B}$, obtendo $tg\ \hat{B} = 1{,}703$. Com esse valor e recorrendo aos arcos notáveis – além das aproximações de $\sqrt{2}$ (como sendo 1,41) e de $\sqrt{3}$ (como sendo 1,73) – concluiu que o ângulo seria cerca de 60°, embora sem ajustar a estimativa por ser ligeiramente menor. Já o estudante da Imagem C também encontrou $tg\ \hat{B} = 1{,}703$, porém desconsiderou esse resultado ao estimar o ângulo diretamente em 70°, justificando que *parecia maior do que 60°*. Ao ser questionado, afirmou que calculou a tangente esperando *achar alguma coisa*, mas, por não reconhecer o valor, optou por uma estimativa intuitiva.

O estudante da Imagem B relata ter construído autonomamente o triângulo necessário para determinar $\hat{B}$, mas, ao ouvir a resposta dos colegas, optou por registrar diretamente o valor sem realizar os cálculos. Já o estudante da Imagem A utilizou a tangente, encontrando $tg\ \hat{B} = 1{,}7$, porém não conseguiu relacionar esse resultado a um ângulo e buscava ainda uma estratégia para isso. Ao solicitar a tabela da tangente, foi orientado a pesquisá-la online e, analisando criticamente seus valores – $tg\ 60° = 1{,}732$ e $tg\ 59° = 1{,}664$ – concluiu que o ângulo aproximado seria 59,5°, solução não registrada na imagem, mas informada verbalmente.

A mobilização dos estudantes ocorreu de forma espontânea e colaborativa, sem sinais de desmotivação ao longo da investigação. Após concluírem a terceira questão, avançaram para a etapa final: calcular precisamente os lados e ângulos do problema. Para determinar o valor exato de $\hat{B}$, os estudantes utilizaram calculadoras científicas ou tabelas trigonométricas, revisando ou confirmando suas estimativas anteriores.

Na etapa final, calcularam o comprimento do túnel com base nos dados obtidos. A maioria (24 de 25) aplicou o Teorema de Pitágoras, enquanto um estudante utilizou a tangente de forma aproximada, tomando a medida de 60° para o ângulo $\hat{B}$. Os resultados convergiram, levando o grupo à conclusão de que o túnel possuía aproximadamente 533 metros.

Figura 8 – Imagens das estratégias utilizadas pelos estudantes para encontrar o ângulo $\hat{B}$.

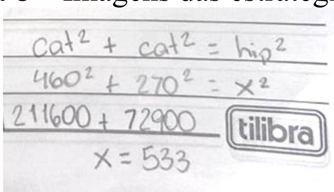


Imagem A

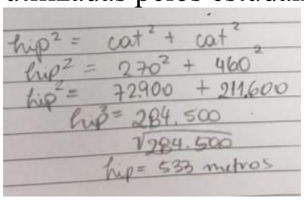


Imagem B

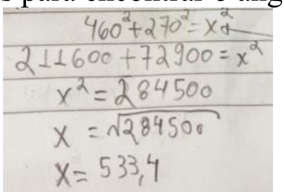


Imagem C

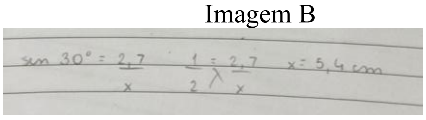


Imagem D

Fonte: imagens de arquivo pessoal do primeiro autor (2025)

As Imagens A, B e C, da Figura 8, ilustram o uso do Teorema de Pitágoras para encontrar a medida do Túnel de Eupalinos e o resultado aproximado de 533 metros, enquanto a Imagem D ilustra a estratégia escolhida pelo único estudante que utilizou uma razão trigonométrica para determinar a medida do túnel, com o resultado aproximado de 540 metros para o comprimento do túnel, que o estudante identifica como 5,4 cm, em sua memória de cálculo.

4 Considerações Finais

Apesar de a atividade ser guiada, os estudantes permaneceram motivados e curiosos sobre seus desdobramentos. Entre as perguntas 1 e 2, muitos anteciparam o que seria solicitado e 84% (21 de 25) responderam à segunda questão antes mesmo de ela ser apresentada. Embora isso indique certa aproximação da atividade com o paradigma do exercício, não comprometeu o processo investigativo planejado.

Esse comportamento revela que exercícios tradicionais podem estar parcialmente presentes em situações de investigação, mas estas, por sua natureza, ampliam a complexidade e a profundidade do trabalho, indo além da simples reprodução de procedimentos e favorecendo aprendizagens mais ricas.

A análise mostra que, ao serem convidados a estimar os ângulos da figura (questão 3), os estudantes se surpreenderam, pois esperavam o cálculo do comprimento entre A e B. Essa expectativa explica por que 96% deles (24 de 25) recorreram ao Teorema de Pitágoras, mesmo havendo uma estratégia mais simples baseada na tangente do ângulo estimado. Essa escolha evidencia a força do paradigma dos exercícios e reforça a importância de trabalhar com situações de investigação, especialmente em contextos de semirrealidade (Skovsmose, 2000). Nessas situações, conforme orienta Polya (1995), é fundamental analisar o problema, compreender seu contexto e planejar estratégias antes de iniciar os cálculos, o que favorece a elaboração de diferentes caminhos e a seleção de métodos mais adequados.

A sequência didática permitiu discutir a Matemática como uma construção humana, cujos conceitos e escolhas são elaborados – e não simplesmente descobertos – por qualquer pessoa, e não apenas por aqueles considerados *talentosos* (Brouwer, 1948; Freudenthal, 1973). Espera-se, com essa experiência, que os estudantes passem a dedicar mais tempo à compreensão das propostas e ao planejamento de estratégias, desenvolvendo modos de pensar que os aproximem de respostas ou caminhos possíveis para os problemas apresentados.

Ao planejar a sequência didática com base nas quatro etapas da resolução de problemas de Polya (1995), buscou-se evidenciar que cada fase contribui igualmente para a compreensão profunda do problema, favorecendo aprendizagens memoráveis e transferíveis. Implementada sob a perspectiva da Educação Matemática Crítica (Skovsmose, 2001), a proposta potencializou seus objetivos formativos, promovendo engajamento, curiosidade e motivação. Os estudantes permaneceram envolvidos ao longo do processo, impulsionados pelo conflito cognitivo e pela busca por múltiplas soluções, em consonância com o que descreve Zabala (1998).

Encerramos o estudo revisitando os objetivos de aproximar os estudantes da Matemática e fortalecer sua autoestima para utilizá-la criticamente. Observamos que, ao longo da sequência didática, os estudantes mantiveram-se confortáveis e curiosos diante do processo investigativo. Embora seja desafiador escolher exemplos que representem aplicações reais da Matemática, constatamos que situações usuais tendem a apresentar apenas pseudo-realidade. Ao introduzir um problema genuíno e contextualizado histórica, cultural e socialmente, conseguimos envolver os estudantes e destacar a relevância do feito matemático. Essa abordagem permitiu reviver, em conjunto, parte do percurso original, encurtando a distância entre estudantes e Matemática e reforçando sua compreensão como construção humana acessível a todos, capaz de contribuir para a formação crítica e cidadã (Freudenthal, 1973).

Ole Skovsmose (2000, 2001), como um dos principais expoentes da Educação Matemática Crítica, propõe os Cenários para Investigação como uma forma de articular, de maneira efetiva, a Educação Crítica e a Educação Matemática. Na sequência didática aqui analisada, não exploramos questões relacionadas aos impactos sociais e econômicos da construção do túnel na época em que ocorreu, nem às possíveis implicações contemporâneas desse tipo de obra. Tampouco discutimos aspectos referentes à qualidade das construções daquele período em comparação às atuais, aos efeitos ambientais que tais empreendimentos podem causar à natureza, à sociedade e ao indivíduo, ou ainda à origem dos recursos financeiros utilizados então – e de onde adviriam hoje. Consideramos, contudo, que essas problematizações são pertinentes e oferecem um campo fecundo para investigações futuras em Educação Matemática que adotem a perspectiva da Educação Matemática Crítica e dos Cenários para Investigação.

Referências

BARBOSA, J.C. Modelagem Matemática: o que é? Por quê? E como? **Veritati**, n.4, p.73-80, UCSal: Salvador, 2004.

BROUWER, L.E.J. Consciousness, philosophy and mathematics. In: Brouwer, L.E.J. **Collect works**. v.I., p.480-494. Nova York: North-Holland, Amsterdam and American Elsevier, 1948.

ECHEVERRÍA, M.P.P.; POZZO, J.I. Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender. In: POZZO, J. I. (Org.). **A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender**. p.13-42. Porto Alegre: ArtMed, 1998.

FREUDENTHAL, H. **Mathematics as an education task**. Dordretcht: Reidel Publishing Company, 1973.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático**. Tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araújo. 2ª ed. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

PROENÇA, M.C. **Resolução de Problemas**: encaminhamentos para o ensino e a aprendizagem de matemática em sala de aula. Maringá: Eduem, 2018.

SKOVSMOSE, O. **Cenários para Investigação**. Tradução de Jonei Cerqueira Barbosa. Bolema, Rio Claro, v.13, n.14, p.66-91, 2000.

SKOVSMOSE, O. **Educação Matemática Crítica**: A questão da democracia. Campinas: Papirus Editora, 2001.

ZABALA, A. **A prática educativa: como ensinar**. Porto Alegre: Artmed, 1998.