

A construção do pensamento proporcional: uma proposta para o oitavo ano do Ensino Fundamental

Júlia Rauber Rodrigues¹
Eleni Bisognin²

Resumo: Este trabalho apresenta resultados de uma pesquisa que teve como propósito analisar a construção do pensamento proporcional por alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental. Faz parte de uma dissertação de mestrado organizada a partir da abordagem metodológica da Pesquisa Baseada em Design a qual compreende quatro etapas: a) análise e reflexão do problema educativo; b) elaboração de um artefato pedagógico a partir de uma teoria norteadora; c) intervenção pedagógica; d) análise e reflexão sobre todo processo realizado. Para obtenção dos dados, foram utilizados os registros escritos dos alunos e as gravações em áudio. Os resultados da aplicação das atividades do artefato pedagógico foram analisados de acordo com os enfoques propostos por Burgos *et al.* (2020), quais sejam: enfoque informal-qualitativo; aritmético; algébrico; geométrico. Pode-se inferir da análise dos resultados que os alunos, além de solidificarem seus conhecimentos sobre a proporcionalidade, também desenvolveram as habilidades de comunicação e cooperação.

Palavras-chave: Pensamento Proporcional. Proporcionalidade. Ensino de Matemática. Pesquisa Baseada em Design.

The construction of proportional thinking: a proposal for the eighth grade of Elementary Education

Abstract: This paper presents the results of a study aimed at analyzing the development of proportional thinking among eighth-grade elementary school students. It is part of a master's dissertation structured according to the methodological approach of Design-Based Research, which comprises four stages: (a) analysis and reflection on the educational problem; (b) design of a pedagogical artifact based on a guiding theory; (c) pedagogical intervention; and (d) analysis and reflection on the entire process. Data were collected through students' written records and audio recordings. The results of the pedagogical activities were analyzed according to the categories proposed by Burgos *et al.* (2020), namely: informal-qualitative, arithmetic, algebraic, and geometric approaches. The analysis suggests that, in addition to consolidating their understanding of proportionality, students also developed communication and collaboration skills.

Keywords: Proportional Thinking. Proportionality. Mathematics Education. Design-Based Research.

La construcción del pensamiento proporcional: una propuesta para el octavo año de la educación primaria

Resumen: Este trabajo presenta los resultados de una investigación que tuvo como propósito analizar la construcción del pensamiento proporcional por alumnos del octavo año de Educación Básica. Forma parte de una disertación de maestría organizada a partir del enfoque metodológico de la Investigación Basada en el Diseño que comprende cuatro etapas: a) análisis y reflexión del problema educativo; b) elaboración de un artefacto pedagógico a partir de una teoría orientadora; c) intervención pedagógica y d) análisis y reflexión sobre todo proceso realizado. Para obtener los datos se utilizaron los registros escritos de los alumnos y las grabaciones en audio. Los resultados de la aplicación de las actividades del artefacto pedagógico fueron analizados según los enfoques propuestos por Burgos *et al.* (2020) que son: enfoque informal-cualitativo; aritmético; algebraico; geométrico. Se puede inferir del análisis de los resultados que los alumnos, además de solidificar sus conocimientos sobre la proporcionalidad, también

¹ Mestre em Ensino de Ciências e Matemática. Universidade Franciscana. Santa Maria, RS, Brasil. E-mail: juliarauberrodrigues14@gmail.com - Orcid: <https://orcid.org/0009-0008-1279-8714>.

² Doutora em Matemática. Universidade Franciscana. Santa Maria, RS, Brasil. E-mail: eleni@ufn.edu.br - Orcid: <https://orcid.org/0000-0003-3266-6336>.

desarrollaron las habilidades de comunicación y cooperación.

Palabras clave: Pensamiento Proporcional. Proporcionalidad. Enseñanza de Matemáticas. Investigación Basada en el Diseño.

1 Introdução

O pensamento proporcional é uma habilidade fundamental que permeia diversas áreas do conhecimento e da vida cotidiana, visto que a proporcionalidade auxilia na interpretação de dados e facilita a visualização das relações entre as grandezas. No que diz respeito ao ensino básico, nas competências e habilidades matemáticas propostas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), o pensamento proporcional constitui conhecimentos basilares para a formação intelectual do aluno.

A luz dos fatos, essas habilidades permeiam toda a construção do pensamento matemático, mas também em outras áreas do conhecimento. Sendo assim, desde a Matemática Básica até as aplicações complexas na Engenharia e nas Ciências Sociais, a compreensão e a aplicação das proporções permitem resolver problemas, tomar decisões e compreender melhor o mundo ao nosso redor.

A proporcionalidade envolve a análise de relações entre grandezas e a capacidade de identificar padrões e regularidades essenciais para o desenvolvimento do pensamento lógico e crítico. Por isso, neste trabalho, elegeram-se turmas de oitavo ano, visto que nesse nível os discentes são desafiados a ver padrões mais abstratos.

Nessa pesquisa, buscamos responder a seguinte questão: qual a contribuição de um artefato pedagógico, constituído de questões que abordam o conteúdo de proporcionalidade, na construção do pensamento proporcional por alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental?

Para o desenvolvimento desta pesquisa foi utilizada a abordagem metodológica da Pesquisa Baseada em Design, a qual, de acordo com Reeves (2000), compreende quatro etapas: a) análise e reflexão do problema educativo; b) elaboração de um artefato pedagógico a partir de uma teoria norteadora; c) intervenção pedagógica para avaliar o artefato elaborado; d) análise e reflexão sobre todo processo realizado, a fim de construir princípios de design.

Para a constituição do artefato pedagógico, foram elaboradas atividades envolvendo o conteúdo de proporcionalidade, as quais foram aplicadas para alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental. Para análise dos resultados, foram utilizados os enfoques propostos por Burgos *et al.* (2020), quais sejam: enfoque informal-qualitativo; aritmético; algébrico; geométrico; e na interpretação das razões.

2 O pensamento proporcional

Compreender o processo de ensino e aprendizagem do aluno exige reconhecer as habilidades essenciais para a construção de habilidades mais complexas. Dentre os conteúdos básicos que envolvem as cinco unidades temáticas, propostas pela BNCC (BRASIL, 2018) - Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas e, Probabilidade e Estatística - é possível reconhecer habilidades primordiais. Dentre elas, tem-se o pensamento proporcional.

Habilidades e competências, nesse viés, dizem respeito a relações que envolvem grandezas. Conforme Lesh, Post e Behr (1988), o raciocínio proporcional, dentre suas complexidades, envolve as relações de covariação e comparações múltiplas entre as grandezas. Além disso, ele resolve problemas que abordam: problemas de valor omisso; de comparação; de transformação; de valor médio; proporções que envolvem a conversão entre razão, taxa e frações; proporções que envolvem unidades de medida, assim como números; problemas de conversão entre sistemas de representação.

No que diz respeito à Educação Brasileira, a BNCC organiza as habilidades e as competências que o discente deve desenvolver em cada ano escolar. Nesse sentido, este trabalho, com foco em alunos de oitavo ano, reflete a partir de habilidades para resolver e elaborar problemas que envolvem relações proporcionais. Conforme a BNCC (BRASIL, 2017, p. 313), é possível afirmar que é fundamental:

(EF08MA12) Identificar a natureza da variação de duas grandezas, diretamente, inversamente proporcionais ou não proporcionais, expressando a relação existente por meio de sentença algébrica e representá-la no plano cartesiano.

(EF08MA13) Resolver e elaborar problemas que envolvam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, por meio de estratégias variadas.

Nesse sentido, para contribuir com a aprendizagem do aluno é importante identificar como ele constrói o pensamento proporcional. No contexto deste trabalho, entende-se a necessidade de um desenvolvimento que pode ocorrer através da observação e da intuição, visto que os métodos mais comuns de resolução se baseiam no algoritmo do produto cruzado. Entende-se a partir de Post *et al.* (1988) que o aluno parte intuitivamente da observação utilizando o princípio da razão unitária, no sentido de “quanto para um”, evoluindo para observações através das razões unitárias múltiplas, fator de mudança ou fator escalar, que tem o sentido de “tantas vezes como”. Essas estratégias partem de relações mais visuais e se concretizam quando condicionadas a aspectos numéricos dos problemas. Por isso, as soluções buscadas pelos alunos compreendem a comparação das razões, algoritmo do produto cruzado

ou a regra de três simples, sendo esse um processo mecânico desprovido de significado no contexto dos problemas, e, não menos relevante, há a estratégia da interpretação gráfica, usada para identificar razões equivalentes ou para identificar o valor desconhecido em problemas de valor omissso.

Dessa forma, reconhece-se que os estudantes devem conseguir resolver distintos problemas em diferentes aplicações do raciocínio proporcional, conforme avançam em idade escolar. Por isso, no que diz respeito a habilidades essenciais ao oitavo ano, Burgos *et al.* (2020) destacam quatro enfoques principais: informal-qualitativo, aritmético, algébrico e geométrico. Além disso, entende-se que dentro desses enfoques gerais há relações mais específicas como: razão como quociente, razão como parte-todo, razão como medida e razão como proporção. Essas quatro formas de analisar as razões são abordadas de distintas formas durante a construção das habilidades essenciais do pensamento proporcional.

Enquanto os enfoques dizem respeito a interpretação geral dos problemas, as relações complementam como o aluno deve solucionar cada atividade. Esse processo afeta a construção da aprendizagem do aluno, desde o entendimento até a busca pela solução correta.

O informal-qualitativo está centrado no entendimento da comparação multiplicativa das quantidades, instintivamente, através da observação, a qual é uma forma primitiva e intuitiva de abordar o tema, podendo contar, por exemplo, com uso de materiais manipuláveis. O enfoque geométrico relaciona as razões e proporções entre segmentos, escalas e semelhanças de figuras. Por sua vez, o enfoque aritmético, baseia-se nas relações de razão e proporção. Uma razão estabelece uma comparação multiplicativa entre um par ordenado de quantidades de grandezas, que estão relacionadas de forma direta ou inversamente proporcional. Uma proporção é a igualdade entre duas razões formuladas ao comparar tais grandezas. Esse tipo de enfoque é predominante nas propostas curriculares e investigações. O processo de resolução é totalmente aritmético: a proporção é uma relação de igualdade entre duas razões, $a.b = c.d$, no qual a , b , c e d são números inteiros quaisquer e as razões a/b e c/d são relações multiplicativas entre os números a , b e c , d , respectivamente. Uma dessas grandezas pode aparecer como faltante, nesse caso, a proporção é uma relação de igualdade entre duas razões, em que um dos termos é um valor desconhecido, por exemplo, $a.b = c.x$, onde a , b e c são números inteiros conhecidos e x é o valor que se planeja determinar. Por fim, o enfoque algébrico está vinculado à noção de função linear, partindo da abordagem funcional da função linear. Para esse caso, tem-se conhecimento de um modelo matemático: uma função $y = kx$, onde k é a razão, a constante unitária ou a constante de proporcionalidade.

Em relação à interpretação sobre as razões, segundo Lamon (2007), “razão como quociente” enfatiza a compreensão da razão como uma relação entre duas quantidades expressas como um quociente numérico, ou seja, pode ser vista com uma fração, um decimal ou um percentual. Já na relação parte-todo, conforme descrito por Usiskin (2012), a abordagem “razão como parte-para-todo” considera a razão como uma comparação entre uma parte de um todo e outra parte do mesmo todo. Segundo Stylianides (2007), razão como medida enfatiza a interpretação da razão como uma medida relativa entre duas grandezas, como, por exemplo, a ideia de velocidade, distância pelo tempo. Por fim, de acordo com Thompson (1994), a abordagem razão como proporção envolve a comparação de duas razões diferentes, formando uma proporção.

Neste trabalho, alia-se às diferentes razões com a exploração de problemas por meio dos distintos enfoques. Nesse sentido, compreende-se que o aluno necessita do domínio do tema via uma proposta que permeia as definições da proporcionalidade e como pode ser abordada.

Com base nisso, entende-se que para a formação de habilidades propostas pela BNCC é fundamental que o aluno saiba desenvolver estratégias para solucionar problemas nos quatro principais enfoques. Para tanto, é fundamental que o docente traga para sala de aula atividades que deem conta dessas perspectivas.

3 Metodologia

Este trabalho desenvolve-se mediante uma abordagem qualitativa, já que, conforme os estudos de Minayo (2009), tem o caráter de elucidar a lógica que permeia a prática social na realidade, pois o ser humano se distingue na forma de agir, pensar e interpretar ações dentro e a partir da realidade vivida e partilhada com seus semelhantes. Com isso, a pesquisa qualitativa permite a compreensão de múltiplos aspectos da realidade, viabilizando a avaliação e a assimilação da dinâmica interna de processos e atividades. Nesse sentido, para apresentar atividades com diferentes enfoques que podem ser utilizadas em sala de aula do oitavo ano, são analisadas atividades elaboradas em determinado contexto.

Para desenvolvimento da pesquisa, foi utilizada a abordagem metodológica da Pesquisa Baseada em Design. Essa abordagem envolve a geração de um artefato educacional e pode ser, dentre outras formas, uma sequência de atividades de ensino ou um material didático elaborado em um determinado contexto e modificado conforme avaliações teóricas e práticas para o melhor resultado. De acordo com McKenney e Reeves (2019, p.12, tradução nossa), a Pesquisa Baseada em Design deve ser “teoricamente orientada, intervencionista, colaborativa,

fundamentalmente responsiva e interativa”.

Essas cinco perspectivas dizem respeito, respectivamente: à importância do conhecimento científico para embasar a pesquisa; ao impacto que causa aos envolvidos na realidade pesquisada, sejam participantes, colaboradores ou pesquisadores; à necessidade de um grupo colaborativo para reflexão e análise dos dados obtidos, em busca de bons resultados; à segurança de um trabalho bem fundamentado teoricamente, com relevância no contexto e; à interação que ocorre entre as partes envolvidas. Dessa forma, tais processos integram fundamentalmente a metodologia, exigindo domínio da proposta pelo pesquisador.

Para Reeves (2000), a pesquisa em design é como uma epistemologia pragmática que considera a teoria da aprendizagem cooperativamente, na busca por soluções reais para problemas reais de aprendizagem. Ele é o autor que organiza um processo cíclico, influenciado pelo contexto e organizado em fases que se influenciam mutuamente para a obtenção dos resultados necessários à realidade. Inicialmente, há a análise do problema prático, reconhecido e válido, base para a metodologia. Ainda, o trabalho exige o apoio das equipes de trabalho, por meio de grupos colaborativos, visando obter materiais teóricos e dados da prática para serem analisados e tornar plausível o desenvolvimento de um artefato. Por fim, no primeiro ciclo, há avaliação e testes, ou seja, o artefato é aplicado e analisado. Adquiridos tais dados, tem-se o processo reflexivo para ser estudada sua relevância, pontos a melhorar ou refutar. Depois disso, retorna-se ao processo inicial.

Cabe ressaltar que as características desse processo trazem à tona o refinamento de problemas, soluções e métodos. Nessa perspectiva, entendem-se os ciclos e a necessidade para refinamento da atividade, além da possibilidade de estudar o local e generalizar para contextos maiores.

Neste artigo, utiliza-se da Pesquisa Baseada em Design como metodologia norteadora. Inicialmente, estudou-se o local e o contexto onde a pesquisa foi aplicada, bem como o material teórico e prático pertinente. Ao reconhecer a proporcionalidade como temática para o desenvolvimento do artefato, devido a sua relevância, foram elaboradas atividades referentes a esse conteúdo visando propiciar a construção do pensamento proporcional. Todo o processo ocorreu com o auxílio de um grupo colaborativo constituído pela professora e autora da pesquisa mais cinco alunos do Curso de Licenciatura em Matemática integrantes do projeto Residência Pedagógica, os quais auxiliaram na elaboração e na análise, desde os materiais teóricos até a aplicação.

A pesquisa foi desenvolvida na Escola Estadual de Ensino Fundamental Professor

Firmino Cardoso Júnior, no município de São Pedro do Sul, Rio Grande do Sul, na região central do estado. A escola onde ocorreu as aplicações do trabalho localiza-se na região central da cidade, abrangendo o público que reside próximo à escola.

Para o desenvolvimento dessas tarefas, foram selecionados alunos dos oitavos anos de 2023, sendo duas turmas - Turma 1 e Turma 2 - com vinte estudantes cada. Dentre os 40 alunos, algumas soluções são apresentadas neste artigo, a partir de nomes fictícios. Em uma das turmas onde a atividade foi aplicada, a autora era a regente; já a outra contou com o apoio da professora regente. O perfil dos alunos os caracteriza entre 13 e 14 anos, todos residentes da cidade. No entanto, as turmas possuem perfis de alunos distintos.

Na aplicação das atividades, estavam em sala a docente e os integrantes do grupo colaborativo, cuja função era registrar um diário de classe com observações pessoais sobre as tarefas desenvolvidas. Além disso, foram realizadas gravações dos diálogos de sala e recolhido o material de rascunho dos alunos. As observações desse grupo, juntamente com as da pesquisadora, enriqueceram a análise em questão.

4 Resultados e Discussões

A primeira atividade trabalha conceitos intuitivos relacionados às abordagens de razão e proporção, utilizando material manipulável. A segunda é constituída por problemas que abordam divisões proporcionais inversas e diretas. Já a terceira atividade é constituída de diferentes questões com o uso de razão e proporção aplicadas em contexto real.

Conforme Burgos *et al.* (2020), há quatro enfoques principais que devem ser abordados para construção do pensamento proporcional: o informal-qualitativo, o aritmético, o algébrico e o geométrico. Tais enfoque já foram definidos na base teórica deste trabalho.

O contexto informal-qualitativo diz respeito à forma intuitiva com a qual o discente interpreta o problema. Esse fator tem base no conceito de raciocínio intuitivo explorado por Silvestre (2006), onde intuitivo é o conhecimento que os alunos constroem com base na experiência diária. Tendo essa habilidade, posteriormente será possível quantificar os dados dos problemas e comparar, mediante representações numéricas, podendo compreender os números como objetos matemáticos. Essas relações se tornam mais evidentes em situações de comparação, acréscimo e decréscimo, e relação parte/todo. Dado a presença dos números como objetos mentais, é possível começar a pensar sobre as relações entre números e sobre os efeitos que as operações neles influem.

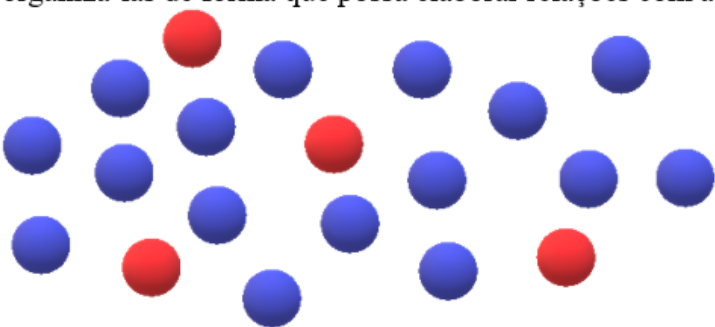
Nesse sentido, pensar intuitivamente pode partir de algo material, visual e manipulável,

fazendo com que os alunos visualizem os conceitos de razão e proporção primeiro através do físico. Por isso, utilizou-se das tampinhas como objeto para manipulação. Para a turma 1 foi fundamental, pois auxiliou no desenvolvimento do raciocínio e na construção do conceito de modo intuitivo, mas para a Turma 2 mostrou-se irrelevante.

Utilizar-se do enfoque aritmético é pensar através das relações proporcionais entre as grandezas, como na razão parte-todo. É como comparar e calcular partes de um todo de maneira simples. Por exemplo, se temos 4 tampinhas vermelhas e 16 tampinhas azuis, a razão aritmética entre tampinhas vermelhas e azuis é 4 para 16, que pode ser simplificada para 1 para 4, ou 14 ou 1:4. Com isso, apresenta-se a seguir questões que trazem à tona esses aspectos:

Figura 1: Recorte da atividade 1

Observe a quantidade de círculos, que representam a visualização de cima de tampinhas de garrafa PET, da figura a seguir e responda às questões abaixo. Para ajudar em suas análises, você poderá utilizar as tampinhas disponibilizadas pela professora. Procure organizá-las de forma que possa elaborar relações com a figura abaixo.



a. Qual o total de tampinhas representadas na figura?

b. Qual o total de tampinhas vermelhas representadas na figura?

c. Qual o total de tampinhas azuis representadas na figura?

d. Qual a razão entre o número de tampinhas vermelhas e o número total de tampinhas?

e. Qual o percentual que o número de tampinhas vermelhas representa em relação ao total de tampinhas?

Fonte: Autoras, 2023.

Atividades de letra (a), (b) e (c) foram resolvidas com facilidade pelas duas turmas, alguns utilizaram-se das tampinhas e outros apenas da figura. Essas questões tinham o objetivo de propiciar ao aluno a quantificação e a observação à figura como um número, habilidade essencial para o desenvolvimento do pensamento proporcional como afirma Silvestre (2006).

Para a atividade (d), foi necessário compreender a ideia de representação de “a relação entre”. Nesse caso, os alunos resolveram a atividade tendo em vista a retomada do conceito de razão.

Partia-se, nesse sentido, do pressuposto que ao encontrarem a razão, os alunos teriam

facilidade em transformá-la em porcentagem, pois já conheciam alguns métodos. No entanto, foi necessário encorajá-los, bem como convidá-los a revisar suas anotações para que relembassem as estratégias e resolvessem a questão de letra (e). Durante a solução dessa atividade, algumas observações dos alunos foram fundamentais. Os alunos, de codinome Eva, Caio e Gui, pertencentes a duplas diferentes, discutiam entre si e com as demais duplas. Durante suas observações, lembraram-se da relação de equivalência:

Eva: *“A fração será o número de tampinhas que a gente quer, pelo número total delas.”*

Professora: *“E o percentual?”*

Eva: *“É uma fração equivalente de denominador 100.”*

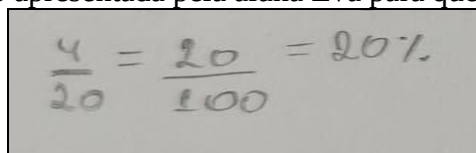
Professora: *“Certo! O 20 do denominador se transformou em 100, agora você precisa mudar o numerador, a parte de cima, tu não podes multiplicar apenas uma parte, pois a fração precisa ser equivalente.”*

Gui: *“Eu não lembrava como transformava em fração equivalente.”*

Caio: *“É simples, agora é só descobrir por qual número multiplicamos o 20 para obter 100.”*

Percebe-se que a linguagem utilizada se baseia na forma como os alunos entendem e traduzem a Matemática para si, respeitando como compreendem as operações. Observa-se na Figura 2 a solução elaborada por esses alunos:

Figura 2: Solução apresentada pela aluna Eva para questão (e) atividade 1



$$\frac{4}{20} = \frac{20}{100} = 20\%$$

Fonte: Autoras, 2023.

Pode-se observar que os alunos escreveram corretamente na linguagem Matemática o que dialogavam. Além de reconhecerem o papel da igualdade, indicam razões equivalentes e a partir disso o percentual.

Ainda nessa atividade, os alunos relacionaram as tampinhas vermelhas com as azuis e azuis com vermelhas, buscando razões entre elas. A seguir, apresenta-se uma estratégia utilizada para reconhecer a relação aritmética 1 para 4. Nota-se que o aluno tomou como base fileiras para observar de forma física e posteriormente numérica.

Figura 3: Esquema elaborado por Luan com uso de material manipulável



Fonte: Autoras, 2023.

Já o enfoque algébrico envolve o uso de variáveis e equações para descrever relações proporcionais e representar matematicamente as relações entre quantidades desconhecidas, como, por exemplo, quando o aluno relaciona um valor desconhecido e utiliza-se de estratégias como o produto cruzado.

Nessa mesma atividade em questão, propunha-se aos alunos as seguintes questões:

Figura 4: Questões para encontrar valores desconhecidos

- m)** Mantendo a proporção da figura, se o número de tampinhas fosse ampliado para 200, quantas seriam de cor vermelha e quantas seriam de cor azul?
- o)** Mantendo a proporção da figura, se o número de tampinhas fosse reduzido para dez, quantas seriam de cor vermelha e quantas seriam de cor azul?

Fonte: Autoras, 2023.

A exemplo da solução da questão (m), temos a seguinte solução, onde a aluna Aline desenvolve um produto cruzado e sinaliza o valor desconhecido como “x”. É importante ressaltar que mesmo que o aluno tenha essa forma de solucionar, há outras formas de abordar a questão.

Figura 5: Questão (m) resolvida pela aluna Aline

$$\frac{4}{20} \times \frac{x}{200} = 20x = 800$$

$$x = \frac{800}{20} = 40$$

40 TAMPINHAS VERMELHAS

160 TAMPINHAS AZUIS

Fonte: Autoras, 2023.

A partir disso, a atividade 2 desenvolve-se para exigir raciocínios mais complexos. Apresenta-se, a seguir, uma atividade que pode ser entendida por diferentes enfoques e sinaliza a razão como relação, medida e proporção.

Figura 6: Questão proposta na atividade 2

Uma máquina produz um certo número de modelos iguais de carro por hora, conforme o quadro abaixo.

Número de modelos iguais	Tempo de produção
3	2 horas
	4 horas
9	

A partir dos dados apresentados, pergunta-se:

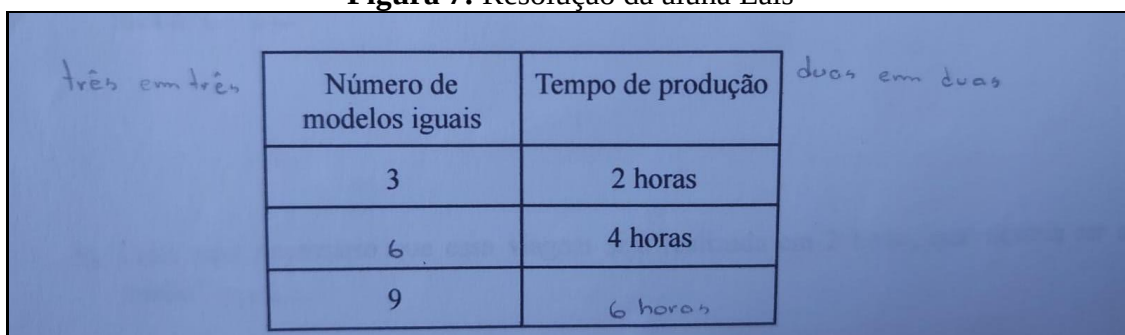
- Quantos modelos iguais serão produzidos em 4 horas?
- Quantas horas serão necessárias para produzir 9 desses modelos?
- Quantos modelos iguais serão produzidos em 10 horas?
- Quantas horas serão necessárias para produzir 21 desses modelos?
- Utilizaremos o *Software* GeoGebra e a quantidade de horas necessárias para construir um grande número de carros. Plote esses pontos no Geogebra e descreva o comportamento da figura formada pelos pontos encontrados na letra e. Qual a tendência do gráfico quando o número de carros a serem fabricados aumenta?

Fonte: Autoras, 2023.

As atividades (c) e (d) foram as que os alunos mostraram mais dificuldades. Já na questão (e) as discussões foram pouco relevantes e as respostas curtas. Os alunos acharam os números sugeridos muito altos e usaram apenas os já anotados na tabela. Nessa questão, de (a) até (e), cinco alunos não chegaram à resposta correta em duas questões, sete alunos em uma questão e oito alunos realizaram a atividade com êxito. Pela ausência de cálculos e de uma tabela mais completa nas anotações dos alunos, supõe-se, dadas as observações de sala, que o equívoco em algumas questões foi por falta de atenção ou por não realizar mentalmente a operação correta.

Para resolver a atividade, a maioria dos alunos buscou completar a tabela observando fatores de covariação entre a mesma grandeza. Como se pode observar na Figura 8, onde a aluna anota o padrão de variação. Em seus raciocínios mais instintivos, esse se mostrou um método preferido dos alunos.

Figura 7: Resolução da aluna Laís



Número de modelos iguais	Tempo de produção
3	2 horas
6	4 horas
9	6 horas

Fonte: Autoras, 2024.

Durante a construção dos gráficos, a estratégia utilizada foi a de transferir a tabela do papel para o GeoGebra. Ou seja, mesmo na construção do gráfico, o fator determinante de análise foi a tabela apresentada na atividade, utilizando um fator mais informal qualitativo na interpretação dos dados. Sendo assim, em raciocínios de investigação de padrões iniciais, a tabela foi forte aliada dos estudantes.

Para plotar as informações no GeoGebra, os alunos tiveram uma explicação sobre como poderiam utilizar o recurso, através da tabela ou realizando a razão de proporcionalidade. Além disso, a professora lembrou sobre pontos no plano cartesiano, do tipo (x,y) , enfatizando os eixos e também fazendo conexões com os dados da tabela, de modo que os alunos realizassem corretamente suas ponderações.

Essa razão de proporcionalidade sugerida aos estudantes tem conexão com o conceito de coeficiente angular da reta no caso de uma função linear, sendo esse um conceito avançado para os alunos, pois a BNCC apresenta apenas no nono ano ou no Ensino Médio. Ao fim, foi necessário dialogar com os alunos sobre as considerações.

Professora: “Vamos concluir a letra (e).”

[...] Professora realiza a leitura da questão.

“Qual a tendência do gráfico quando o número de carros a serem fabricados aumenta? Aumentou o número de carros, o que aconteceu com o gráfico?”

Alunos: “Ele subiu.”

Professora: “Ele subiu? Ele foi crescendo, aumentando... e em qual formato?”

Alunos: “Reta”

Professora: “Essas condições que vocês veem define proporcionalidade. Pois as grandezas aumentam de forma proporcional, quando uma aumenta a outra também, isso apresenta a proporcionalidade direta.”

Os alunos chegaram à representação gráfica correta, mas não conseguiram justificar

mais do que com a palavra “aumenta”. Por isso, a discussão de observação é fundamental para auxiliar os alunos na percepção do gráfico, sendo o objetivo da atividade.

O método de resolução aritmético, através da regra de três, não foi observado na primeira turma. No entanto, na Turma 2 ele ganhou destaque. Ao dialogar com as demais docentes da área, foi afirmado que essas turmas já conheciam o método desde o 7º ano.

Mesmo que baseados no método tabular, os alunos encontraram uma forma de verificar a veracidade dos dados encontrados a partir da validação da equivalência entre razões. Com isso, todos os alunos apresentaram a solução da questão corretamente.

Professora: *“Estou observando vocês e gostaria de saber, qual é a razão de proporção?”*

Peter: *“Tempo e Número de carros.”*

Professora: *“Essas são as grandezas, qual a relação entre elas?”*

Peter: *“Em duas horas são produzidas três máquinas.”*

A professora escreveu na lousa $\frac{2}{3}$ e repetiu a afirmação do aluno. Todos os alunos mostraram empolgação e ficaram felizes ao visualizar matematicamente o que estavam discutindo e comentaram: *“Aaaah, agora faz sentido!”*. Percebe-se que, mesmo em pequenas interações, a posição do docente é fundamental na dinâmica, o que caracteriza e qualifica o efeito proposto pelas questões.

Já na interpretação gráfica, os alunos seguiram a mesma ideia da turma. Mesmo que esses alunos tivessem construído a ideia de razão e de proporção, os alunos utilizaram a tabela com os pontos e os conectaram através da reta, tal qual o outro grupo. Nesse sentido, considerando que o *software* era novo para todos, entendeu-se que esse é um método mais simples.

A Turma 2 teve maior dificuldade com o acesso à Internet, devido aos problemas de conexão. Eles vinham realizando as demais tarefas com velocidade e dinamismo, mas devido aos recursos não tão adequados, precisaram de mais tempo.

Após as construções, discutiu-se:

Professora: *“O que são essas ‘bolinhas’?”*

Alunos: *“Pontos.”*

Professora: *“Pontos. Ok. E esses pontos estão alinhados?”*

Alunos: *“Sim.”*

Professora: *“Formando que figura?”*

Alunos: *“Uma reta.”*

Professora: *“E qual o comportamento? Quanto mais passa o tempo...”*

Alunos: *“Aumenta o número de máquinas que conseguimos produzir.”*

As justificativas da questão (e) foram mais completas que as vistas anteriormente. A docente incentivou respostas mais completas, já que havia observado anteriormente essa dificuldade. Então, as seguintes explicações foram encontradas na maioria dos trabalhos: *“quando aumenta o número de horas, aumenta o número de modelos proporcionalmente”*.

5 Considerações Finais

Entende-se o processo de ensino e aprendizagem como mutável que pode ser eficiente se explorado com embasamento teórico e prático, constituído de uma união de percepções e análises pertinentes à realidade. Ao promover um ambiente de mais autonomia, os alunos construíram novos conhecimentos através da busca por amparo de outros colegas e da docente. Esse fator pode não ser visto dessa forma em outros contextos, pois é provável que em uma turma que já tenha o conhecimento do método ou um perfil de estudantes mais autônomos o artefato apresente resultados distintos. No entanto, entende-se que as questões propostas dão conta das habilidades da BNCC.

Quando o aluno explora suas habilidades dessa forma, suas seguranças e inseguranças ganham voz, refletindo o processo variável e de adaptação ao contexto, porque a abordagem da Pesquisa Baseada em Design ocorre em contextos reais. Dessa maneira, o uso de metodologias que se adaptam a cada realidade possibilita a aplicação do artefato em diferentes contextos.

As atividades elaboradas sob diferentes enfoques que exploram grandezas diretas e inversamente proporcionais propiciam o desenvolvimento do pensamento proporcional dos alunos, uma vez que elas se configuram em uma proposta dinâmica, envolvente e que aborda diferentes habilidades como percepção visual, observação de padrões e raciocínio aritmético. Tais habilidade são base para a construção de conhecimentos futuros, aliadas ao entendimento de razões em diferentes contextos, bem como dos principais enfoques propostos por Burgos *et al.* (2020).

O desenvolvimento do pensamento proporcional é fundamental para a compreensão de diversos conceitos matemáticos e científicos. Essa proposta de abordagem pedagógica incentiva a autonomia dos alunos e o uso de materiais manipuláveis, podendo facilitar significativamente a compreensão. As observações feitas pela docente e pelos integrantes do grupo colaborativo mostraram que ao compartilharem dúvidas e trabalharem em grupo os alunos não só solidificam seus conhecimentos sobre a proporcionalidade, como também

desenvolvem habilidades importantes de comunicação e cooperação.

Referências

- BURGOS, Maria; CASTILLO, Maria José; BELTRÁN-PELLICER, Pablo; GIACOMONE, Belén; GODINO, Juan D. Análisis didáctico de una lección sobre proporcionalidad en un libro de texto de primaria con herramientas del enfoque ontosemiótico. **Bolema**, Rio Claro, v. 34, n. 66, p. 40–68, abr. 2020.
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**: BNCC. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 24 jan. 2023.
- LAMON, Susan. Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. In: CAI, Jinfa; KNUTH, Eric (ed.). **The development of mathematics teaching**: Design, scale, effects. New York: Springer, 2007. p. 19–51.
- MCKENNEY, Susan; REEVES, Thomas C. **Conducting educational design research**. Abingdon: Routledge, 2019.
- MINAYO, Maria Cecília de Souza. Trabalho de campo: contexto de observação, interação e descoberta. In: MINAYO, Maria Cecília de Souza; DESLANDES, Simone de Fátima; GOMES, Romeu (org.). **Pesquisa social**: teoria, método e criatividade. 28. ed. Petrópolis: Vozes, 2009.
- PONTE, João Pedro da; BROCARD, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Coleção Tendências em Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.
- POST, Thomas; BEHR, Merlyn; LESH, Richard. Proportionality and the development of prealgebra understandings. In: COXFORD, A. F.; SCHULTE, A. P. (ed.). **Algebraic concepts in the curriculum K-12**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1988.
- REEVES, Thomas C. **Socially responsible educational technology research**. Educational Technology, p. 19–28, 2000.
- SILVESTRE, Ana Isabel. **Investigações e novas tecnologias no ensino da proporcionalidade direta**: uma experiência no 2.º ciclo. 2006. Dissertação (Mestrado) – Universidade de Lisboa, Lisboa, 2006.
- SILVESTRE, Ana Isabel; PONTE, João Pedro. Proporcionalidade directa no 6.º ano de escolaridade: uma abordagem exploratória. **Interacções**, v. 59, p. 137–158, 2012.
- STAKE, Robert E. **The art of case study research**. Thousand Oaks: Sage, 1995.
- STYLIANIDES, Angeliki J. On the foundational and pedagogical significance of definitions in mathematics. In: WOO, Jung-Ho; LEW, Hong-Chang; PARK, Kang-Sook; SEO, Duck-Yoon (ed.). **Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**. Seoul: PME, 2007. v. 4, p. 49–56.
- THOMPSON, Paul W. Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of arithmetic. **Educational Studies in Mathematics**, v. 26, n. 2/3, p. 229–274, 1994.
- USISKIN, Zalman. Conceptions of school algebra and uses of variables. In: STACEY, Kaye; CHICK, Helen; KENDAL, Margaret (ed.). **The future of the teaching and learning of algebra**: the 12th ICMI Study. New York: Springer, 2012. p. 105–115.