Sociedade Brasileira de Educação Matemática

emr

Teoria Visual de Grupos: uma perspectiva didática sob a obra de Nathan Carter para o ensino de Álgebra Abstrata

Visual Group Theory: a didactic perspective on Nathan Carter's work for teaching Abstract Algebra

Renata Teófilo de Sousa[1]

Francisco Régis Vieira Alves[2]

Ana Paula Florêncio Aires[3]

O livro *Visual Group Theory* (Teoria Visual dos Grupos), de Nathan C. Carter, apresenta uma introdução acessível à Teoria dos Grupos, com foco na visualização e em uma compreensão intuitiva do tema. A obra se destaca pelo uso de diagramas, como os diagramas de Cayley, que permitem uma compreensão visual da estrutura e das interações dentro dos grupos matemáticos. O autor utiliza uma abordagem que se afasta dos métodos tradicionais presentes em livros sobre o tema, geralmente focados em definições e provas abstratas, para explorar a Teoria dos Grupos por meio de representações gráficas e exemplos intuitivos. Ressalta-se, inclusive, que a obra desponta como referência uma inovadora para pesquisas que buscam articular visualização, experimentação digital e compreensão conceitual na abordagem didática da Teoria dos Grupos.

O livro é dividido em dez capítulos, que tratam desde as definições básicas do que é um grupo até tópicos avançados, como a Teoria de Sylow e a Teoria de Galois. Carter (2009) inicia com exemplos familiares de simetria, como o Cubo Mágico (Cubo de Rubik), e progride para grupos mais abstratos.

O grande diferencial do livro está no enfoque visual. Enquanto a maioria dos textos sobre Teoria dos Grupos tende a ser denso e teórico, Carter (2009) adota uma metodologia intuitiva que privilegia a compreensão a partir do componente visual. O livro possui mais de trezentas ilustrações e torna a Teoria dos Grupos acessível, especialmente para estudantes que se beneficiam de representações gráficas em seu aprendizado matemático. Na obra, os

[1]Doutoranda em Ensino. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE). Docente da Secretaria de Educação do Ceará (SEDUC-CE), Sobral, CE, Brasil. E-mail: renata.sousa1@prof.ce.gov.br. Orcid: https://orcid.org/0000-0001-5507-2691.

[2] Doutor em Educação. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Fortaleza, CE, Brasil. E-mail: fregis@ifce.edu.br. Orcid: https://orcid.org/0000-0003-3710-1561.

[3] Doutora em Educação Matemática. Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, Vila Real, Portugal. Centro de Investigação em Didática e Tecnologia na Formação de Formadores (CIDTFF), Universidade de Aveiro, Aveiro, Portugal. E-mail: aaires@utad.pt. Orcid: https://orcid.org/0000-0001-8138-3776.

eISSN 2317-904X DOI: 10.37001/emr.v30i88.4338. Recebido • 07/10/2024 | Aprovado • 01/09/2025 | Publicado • 30/09/2025

diagramas de Cayley são um dos principais recursos utilizados para otimizar a visualização de grupos finitos e suas operações internas.

Outro ponto positivo é o foco particular em grupos finitos, o que permite aos leitores construírem uma base sólida antes de avançar para generalizações infinitas. Carter (2009) integra um *software* interativo, denominado *Group Explorer*[4] e, a partir disso, incentiva uma abordagem prática e experimental do conteúdo. Isso alinha-se à proposta da obra e às metodologias de ensino que empregam o uso de tecnologias para aprofundar o entendimento.

A organização linear do livro, como mencionado no prefácio pelo próprio autor, facilita o estudo sequencial dos tópicos. No entanto, alguns capítulos, como o quinto, que trata de diferentes famílias de grupos, podem ser explorados separadamente, sem prejudicar a compreensão do restante da obra. Por outro lado, o livro não cobre a Teoria dos Grupos de maneira completa, como o próprio autor admite. Carter (2009) justifica que seu objetivo não é fazer com que o livro seja um texto exaustivo, mas sim oferecer uma introdução clara e ilustrada ao tema, que pode ser complementada por leituras mais formais. Essa limitação pode frustrar leitores que buscam uma cobertura mais rigorosa e completa da temática.

Nos parágrafos que seguem, buscamos apresentar, de modo não exaustivo, uma síntese do conteúdo de cada um dos dez capítulos da obra.

O capítulo 1, intitulado *What is a group?* (O que é um grupo?) (pp. 3-10), apresenta uma introdução à Teoria dos Grupos usando o exemplo do Cubo Mágico (Cubo de Rubik) (p. 3). Carter (2009) destaca as propriedades do cubo, que servem para introduzir conceitos fundamentais, como a simetria e a definição de ações reversíveis e determinísticas (p. 5). Ao explorar o cubo de Rubik, o autor estabelece quatro regras fundamentais (Observações 1.1 a 1.4, pp. 4-5), que ajudam a definir o que é um grupo. O autor então recontextualiza essas regras como axiomas de grupos (Regras 1.5 a 1.8, p. 6), preparando o leitor para uma definição "informal" de grupo (Definição 1.9, p. 7). Além disso, os exercícios disponibilizados ao final do capítulo (pp. 7-9) surgem como um desafio aos interessados no tema, estimulando os leitores a experimentar e testar esses conceitos, destacando-se a aplicabilidade prática das definições. O foco está na compreensão de como essas regras funcionam em situações práticas antes de se introduzirem formalidades matemáticas.

No capítulo 2, *What do groups look like?* (Qual é a aparência dos grupos?) (pp. 11-24), Carter (2009) desenvolve a ideia de representação visual de grupos e explora como eles podem

[4] https://nathancarter.github.io/group-explorer/index.html

ser *mapeados*. O autor faz uso de um quebra-cabeça mais simples que o cubo de Rubik: um retângulo de papel com seus cantos numerados (p. 14). Essa abordagem simplificada ajuda a introduzir o conceito de diagramas de Cayley (p. 18), que são mapas visuais das ações de um grupo. Carter descreve como construir tais diagramas (Figura 2.7, p. 18), representando as configurações possíveis de um objeto e as transições entre essas configurações. Um ponto alto é a comparação entre o diagrama de Cayley do retângulo e o de um sistema de dois interruptores de luz (Figura 2.8, p. 20), destacando que grupos diferentes podem compartilhar a mesma estrutura. Essa ideia de equivalência estrutural prepara o leitor para considerar grupos de maneira abstrata.

No Capítulo 3, *Why study groups?* (Por que estudar grupos?) (pp. 25-40), Carter (2009) aprofunda as razões para estudar esse tema, destacando seu papel na modelagem de simetrias e ações. O autor explica que grupos são onipresentes, aparecendo em contextos como a "simetria molecular" (p. 25) e "movimentos em danças" (p. 36). Esse capítulo ajuda a estabelecer a importância dos grupos na vida cotidiana e em diferentes áreas da ciência. Uma seção interessante (pp. 34-36) discute os "grupos de ações", destacando como as ações de grupos podem ser usadas para modelar transformações em conjuntos, ampliando o alcance da teoria. A abordagem de Carter reforça a relevância dos grupos em muitos campos e estimula o interesse do leitor ao apresentar aplicações práticas.

No capítulo 4, *Algebra at last* (Álgebra, finalmente) (pp. 41-62), ocorre uma transição da abordagem visual para a definição algébrica formal de grupos. O autor apresenta as "tabelas de multiplicação" (ou tabelas de grupo) como uma ferramenta para organizar as operações de grupo (p. 45). Carter (2009) também explora o conceito de "geradores" (p. 44) e mostra como os grupos podem ser construídos a partir de um pequeno conjunto de operações. Um destaque importante deste capítulo é a Definição 4.5 (p. 48), que apresenta a definição formal de um grupo como um conjunto equipado com uma operação binária que satisfaz propriedades específicas (associatividade, elemento identidade e inversos). Esse capítulo é essencial para conectar a visualização intuitiva de grupos ao formalismo algébrico, preparando o leitor para uma abordagem mais rigorosa da teoria.

No capítulo 5, *Five families* (Cinco famílias) (pp. 63-96), são apresentadas cinco famílias principais de grupos finitos, com foco em suas propriedades e aplicações. Carter (2009) começa com os "grupos cíclicos" (p. 64), que são grupos gerados por um único elemento. Em seguida, explora os "grupos abelianos" (p. 68), que são comutativos, enfatizando a sua importância em várias áreas da matemática. Os "grupos diedrais", que modelam as simetrias de polígonos (p. 74), são apresentados com diagramas de Cayley, que destacam suas características específicas (Figura 5.9, p. 76). Os "grupos simétricos e alternados" (p. 78) são discutidos com exemplos, como as permutações de conjuntos, cuja complexidade destacada. Nesse capítulo, é possível compreender as diferentes "famílias de grupos", e os exercícios ao final (p. 87) ajudam a consolidar o conhecimento.

No capítulo 6, *Subgroups* (Subgrupos) (pp. 97-116), o autor foca na ideia fundamental de subgrupos, que são grupos menores contidos em um grupo maior. Carter (2009) começa mostrando como os subgrupos podem ser visualizados nos diagramas de Cayley (p. 99). Ele também introduz conceitos como "*cosets*" (p. 102) e o Teorema de Lagrange (p. 105), que relaciona a ordem de um subgrupo com a ordem do grupo total. Passagens importantes incluem discussões sobre como identificar subgrupos e como representa-los graficamente (pp. 99-101). Assim, esse capítulo fornece uma base para compreender como os grupos podem ser decompostos em partes menores, explorando suas possíveis interações internas.

No capítulo 7, *Products and quotients* (Produtos e quocientes) (pp. 117-156), o autor explora os produtos de grupos, começando com os produtos diretos (p. 117) e, posteriormente, com os produtos semidiretos (p. 128). Carter (2009) discute como combinar grupos para criar novos grupos, utilizando exemplos práticos e diagramas que ilustram esses conceitos. Um aspecto central do capítulo é a introdução dos subgrupos normais e grupos quocientes (p. 132), apresentados como conceitos essenciais para compreender como grupos podem ser simplificados. O capítulo também aborda conceitos como os "normalizadores" e as "classes de conjugação" (p. 140-142), oferecendo uma compreensão mais ampla da estrutura de grupos complexos.

No capítulo 8, *The power of homomorphisms* (O poder dos homomorfismos) (pp. 157-192), Carter (2009) apresenta os homomorfismos de grupos, que são "funções que preservam a estrutura algébrica de um grupo para outro" (p. 157). Ele detalha o Teorema Fundamental do Homomorfismo (p. 167) e mostra como os homomorfismos podem ser usados para simplificar a análise de grupos. A aritmética modular (p. 169) e o Teorema Fundamental dos Grupos Abelianos (p. 175) são explorados, conectando os conceitos de homomorfismos a resultados fundamentais da Teoria dos Grupos. Nesse capítulo, o autor também reforça o poder da visualização para compreender essas funções, mostrando como os homomorfismos podem ser representados em diagramas ilustrativos.

No capítulo 9, *Sylow theory* (Teoria de Sylow) (pp. 193-220), Carter (2009) discute a Teoria de Sylow, considerando-a central para a compreensão da estrutura dos grupos finitos. O autor começa por introduzir os "grupos de ações" (p. 194) e utiliza o Teorema de Cauchy (p. 199) para abordar subgrupos de ordem p. Os Teoremas de Sylow são apresentados juntamente com suas implicações para a decomposição de grupos em subgrupos. Esse capítulo tem uma natureza mais técnica e exige um conhecimento prévio mais sólido da Teoria dos Grupos, mas, ao mesmo tempo, fornece ao leitor uma compreensão clara de como subgrupos específicos podem ser identificados e utilizados para analisar a estrutura de um grupo.

Por fim, temos o capítulo 10, *Galois theory* (Teoria de Galois) (pp. 221-260). Esse último capítulo explora a Teoria de Galois, conectando os grupos à Teoria dos Corpos e às Equações Polinomiais. Carter (2009) discute questões fundamentais, como a "solvência de polinômios" (p. 221), e introduz os "grupos de Galois" (p. 233), que descrevem simetrias nas raízes de equações. A culminância do capítulo é a demonstração da "insolubilidade da equação do quinto grau" (p. 247), destacando o aspecto histórico e o potencial da Teoria de Galois. Embora algumas provas sejam apresentadas sem todos os detalhes, o autor transmite o raciocínio central e o impacto dessas ideias no contexto geral da matemática.

A obra *Visual Group Theory* pode ser considerada uma contribuição inovadora para o ensino e a aprendizagem da Teoria dos Grupos. A abordagem visual proposta por Carter (2009) constitui não apenas uma alternativa metodológica, mas também um ponto de partida para a construção conceitual e o desenvolvimento do pensamento abstrato, ao articular representações gráficas, manipulação simbólica e experimentação digital. O uso dos diagramas de Cayley e do *software Group Explorer* permite transitar de forma fluida entre o concreto e o formal, favorecendo tanto a intuição quanto o rigor matemático. Assim, mais do que uma escolha didática baseada em preferências individuais, a proposta de Carter mostra-se uma via epistemologicamente consistente para compreender as estruturas algébricas a partir de experiências visuais que estimulam conexões cognitivas profundas e o raciocínio relacional.

Referências

CARTER, Nathan. C. **Visual Group Theory**. Waltham: Bentley University, 2009.