

## Atividades Investigativas para Exploração do Pensamento Diferencial-com-GeoGebra de Estudantes de Ensino Médio

Ana Rita Domingues<sup>1</sup>

Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva<sup>2</sup>

**Resumo:** Este artigo apresenta atividades elaboradas em uma pesquisa sobre o uso do GeoGebra como recurso didático para o ensino de Cálculo no Ensino Médio. As atividades foram desenvolvidas com base na abordagem de seres-humanos-com-mídias e na metodologia de experimentos de ensino, explorando conceitos como área e volume. Organizadas para promover a investigação matemática, as propostas permitem que os estudantes construam conjecturas e experimentem diferentes estratégias de solução. Os resultados indicam que o uso do GeoGebra favorece a compreensão conceitual e estimula o pensamento matemático ativo, tornando-se uma ferramenta didática relevante para a sala de aula.

**Palavras-chave:** Educação Matemática. Tecnologias Digitais. Investigação Matemática.

## Investigative Activities for Exploring Differential Thinking-with-GeoGebra of High School Students

**Abstract:** This article presents activities developed in research on the use of GeoGebra as a teaching resource for Calculus instruction in high school. The activities were designed based on the humans-with-media approach and the teaching experiment methodology, exploring concepts such as area and volume. Structured to promote mathematical investigation, these tasks allow students to formulate conjectures and experiment with different solution strategies. The results indicate that GeoGebra enhances conceptual understanding and stimulates active mathematical thinking, making it a valuable didactic tool for the classroom.

**Keywords:** Mathematics Education. Digital Technologies. Mathematical Investigation.

## Actividades Investigativas para la Exploración del Pensamiento Diferencial-con-GeoGebra de Estudiantes de Educación Secundaria

**Resumen:** Este artículo presenta actividades desarrolladas en una investigación sobre el uso de GeoGebra como recurso didáctico para la enseñanza del Cálculo en la educación secundaria. Las actividades fueron diseñadas con base en el enfoque de seres-humanos-con-medios y en la metodología de experimentos de enseñanza, explorando conceptos como área y volumen. Estructuradas para fomentar la investigación matemática, estas propuestas permiten a los estudiantes formular conjeturas y experimentar con diferentes estrategias de solución. Los resultados indican que el uso de GeoGebra favorece la comprensión conceptual y estimula el pensamiento matemático activo, convirtiéndose en una herramienta didáctica valiosa para el aula.

**Palabras clave:** Educación Matemática. Tecnologías Digitales. Investigación Matemática.

### 1 Introdução

Neste texto, apresentamos duas atividades elaboradas no escopo de uma pesquisa cujo

<sup>1</sup> Mestra em Ensino e Processos Formativos. Secretaria de Educação do Estado de São Paulo. Lavínia, SP, Brasil. E-mail: [ana.rita.domingues2@gmail.com](mailto:ana.rita.domingues2@gmail.com). Orcid: <https://orcid.org/0000-0002-4308-0261>.

<sup>2</sup> Livre-docente em Educação Matemática. Universidade Estadual Paulista. São José do Rio Preto, SP, Brasil. E-mail: [ricardo.scucuglia@unesp.br](mailto:ricardo.scucuglia@unesp.br). Orcid: <https://orcid.org/0000-0002-5810-2259>.

objetivo foi investigar aspectos do Pensamento Diferencial (PD) emergentes em um grupo de estudantes do Ensino Médio ao pensar-com-GeoGebra em tarefas que envolvem a investigação da área de regiões limitadas por eixos e curvas e o cálculo do volume de regiões limitadas por superfícies planas e curvas (DOMINGUES, 2021). O trabalho, de natureza qualitativa, esteve apoiado na noção de investigação matemática e no construto teórico seres-humanos-com-mídias (BORBA; VILLARREAL, 2005), buscando observar e compreender a manifestação de quatro aspectos do PD. São eles: *Noção de limite e continuidade*, *Noção de infinitésimo*, *Conceito de integral definida* e *Concepção visual-geométrica*. Foram elaboradas cinco atividades nesta pesquisa, sendo as duas primeiras exploradas por estudantes do primeiro ano e as três últimas por estudantes do terceiro ano. Neste texto, apresentamos as duas primeiras atividades, realizadas em duas sessões de ensino com duas duplas de estudantes do Ensino Médio de uma escola pública estadual do interior de São Paulo.

Os procedimentos metodológicos de registro das sessões foram: filmagens do ambiente, captação de tela do computador e de *webcam* e os arquivos gerados pelos estudantes no GeoGebra. Os resultados da pesquisa indicam que o processo de pensar-com-GeoGebra oferece meios para o desenvolvimento de elementos investigativos, nos quais os estudantes elaboraram conjecturas, testando-as, e (re)pensaram as estratégias de soluções utilizadas de maneira dinâmica. Quanto à emersão dos aspectos do PD, em particular, identificaram-se indícios de que eles se complementam e manifestam-se em conjunto, atribuindo complexidade aos processos de pensamentos dos estudantes-com-tecnologias. Esta pesquisa contribui à Educação Matemática no que se refere à produção de conhecimentos acerca do uso de tecnologias digitais voltado ao ensino de Cálculo no Ensino Médio.

## 2 As Atividades

O planejamento e a criação das atividades a serem investigadas nas sessões de ensino ocorreram no primeiro e no início do segundo semestre de 2019. As atividades elaboradas adotam um caráter de exploração, investigação e experimentação com tecnologia (BORBA; VILLARREAL, 2005), além de seguirem a proposta semiaberta. Desse modo, oferecem meios para o surgimento de conjecturas matemáticas, exploração de várias formas de resoluções, exploração de caráter visual, dinâmico e manipulativo de objetos matemáticos, entre outros aspectos (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2018). Todas as atividades foram idealizadas e exploradas com o *software* GeoGebra. A escolha de ter esse *software* como ambiente investigativo foi orientada pela intencionalidade de abordar as suas potencialidades seguindo

uma perspectiva educacional, acreditando que o **pensar-com-GeoGebra** (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2018) abriria espaço para a emergência de aspectos do PD.

Em cada sessão de ensino, os participantes receberam as atividades impressas com a finalidade de uso pontual, dando luz à discussão e ilustrando o objeto de investigação e sua construção. No total, foram elaboradas cinco atividades: duas explorando regiões limitadas e três explorando sólidos de revolução. Todas as atividades foram pensadas para que os estudantes se voltassem ao diálogo, manipulação e investigação dos pensamentos emergentes, visando a uma aproximação e generalização para os problemas apresentados. A cada cenário criado e explorado pelos participantes os questionamentos *ser uma boa aproximação e como melhorar* eram colocados para reflexão, gerando uma nova investigação.

As atividades foram aplicadas na sequência:

#### *1ª série do Ensino Médio*

- Atividade 1: Quadratura do círculo (investigação da área do círculo);
- Atividade 2: Cubatura da esfera (investigação do volume da esfera).

#### *2ª série e 3ª série do Ensino Médio*

- Atividade 3: O problema da área (investigação da área sob a curva da parábola);
- Atividade 4: O problema do volume (investigação do volume do parabolóide);
- Atividade 5: A relação entre os volumes (investigação da relação entre o volume do cilindro, cone e parabolóide, todos de mesma base e altura).

A escolha das regiões e dos sólidos apresentados nesse trabalho se deu por incorporarem problemas geométricos apresentados ao longo do desenvolvimento do Cálculo Diferencial e que instigaram o estudo e investigação de grandes matemáticos como: Arquimedes, Fermat, Cavalieri, Torricelli, Newton, Leibniz e outros. Além do mais, as atividades apresentam o desafio de ter como objetos de investigação problemas que excedem os conteúdos proposto para o Ensino Médio. A seguir, optamos por apresentar neste texto a descrição das duas primeiras atividades elaboradas nesse trabalho.

### **3 Quadratura do Círculo**

Essa atividade tem como objetivo determinar a área de um círculo aplicando a estratégia de cálculo por aproximação, que consiste em explorar e comparar a área de regiões conhecidas com a desejada. Esta pesquisa entende área como sendo a região limitada por segmentos de retas, eixos e/ou curvas, cujo valor numérico associado pode ser determinado por meio de diferentes estratégias de cálculo. Entretanto, essa definição de área foi explorada de modo

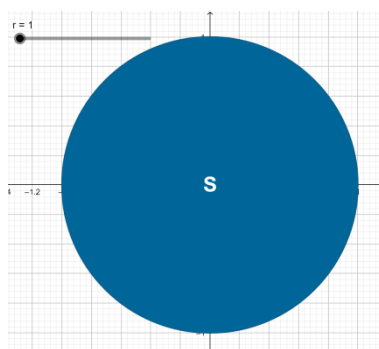
implícito com os estudantes ao longo do desenvolvimento de todas as atividades propostas por esta pesquisa e que envolvem esse conceito.

Inicialmente, a atividade foi pensada e elaborada partindo da estratégia de cálculo desenvolvida no Egito antigo (BARON, 1985), que consiste em achar a área de um quadrado que seja equivalente à área do círculo e, a partir disso, também explorar aproximações para  $\pi$ . Entretanto, vale ressaltar que, durante o desenvolvimento prático da atividade com os participantes da produção de dados desta pesquisa, a estrutura inicialmente elaborada foi usada como orientação e tutoria em momentos específicos e direcionados, e o desenvolvimento central da investigação foi motivado pelas ideias, diálogos, criações e explorações feitas pelas duplas. Os quadros a seguir apresentam uma possível abordagem para essa atividade usando o *software* GeoGebra, bem como alguns questionamentos propostos durante o seu desenvolvimento prático.

### Quadro 1: Apresentação da atividade 1

*Determine a área de uma região S limitada pela circunferência  $x^2 + y^2 = 1$ .*





Figura 1: Região circular S









Fonte: Dados da Pesquisa.

### Quadro 1: Etapa 1 – Instrução para início da atividade 1 e estruturação de uma possível abordagem

1. Construção do cenário de investigação no GeoGebra (reduzido a um quadrante).

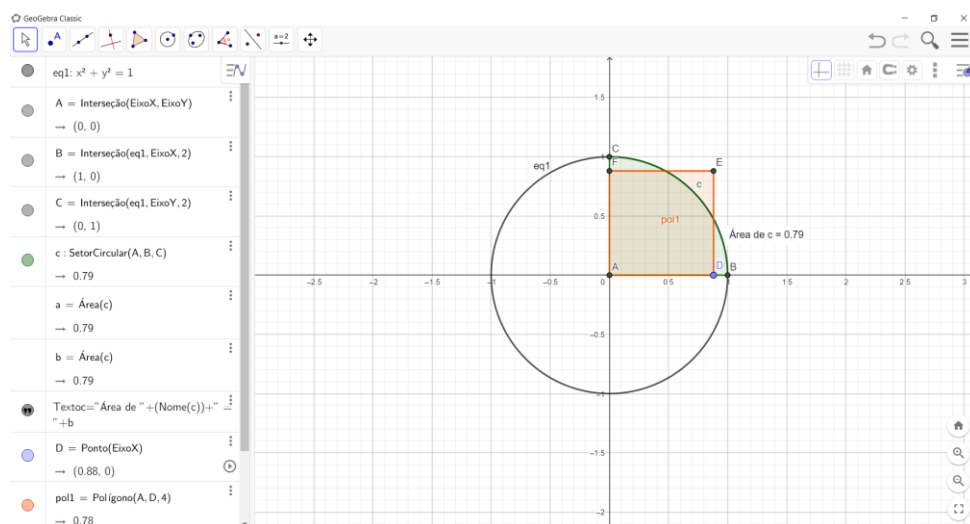
- a) Clique no campo “Entrada” , digite a equação  $x^2 + y^2 = 1$  e pressione a tecla “Enter”  no teclado ou no GeoGebra.
- b) Construa um quadrante circular. Para isso, clique na aba “Círculo”  e selecione a ferramenta “Setor Circular” , em seguida, clique com o mouse nas posições (0,0) e (1,0) na “Janela de visualização 2” e

leve o ícone do mouse até a posição (0,1), clicando sobre ela.

- c) Calcule a área do quadrante circular construído, selecionando a ferramenta “Ângulo” , seguido de “Área”  e clicando sobre o objeto construído anteriormente. Esta ação será realizada sempre que for necessário calcular a área de uma figura construída com ferramentas definidas do GeoGebra.
- d) Oculte o setor circular construído no item anterior clicando sobre o ícone , presente na “Janela de Álgebra” do lado esquerdo da tela. Ao fazer isso, o ícone ficará branco . Esta ação sempre será realizada quando for necessário ocultar ou expor um objeto construído.
- e) Construa um quadrado. Para isso clique na aba “Polígono”  e selecione a ferramenta “Polígono Regular” , posicionando dois vértices, o primeiro em (0,0) e o outro em qualquer ponto da abscissa, tal que  $0 < x < 1$ , e definindo 4 como o total de vértices.
- f) Calcule a área do quadrado.
- g) Exponha a construção do quadrante circular.

Fonte: Dados da Pesquisa.

**Figura 1:** Quadrante circular e quadrado para comparação de área



Fonte: Dados da Pesquisa.

Na prática, essa primeira etapa da atividade foi usada com o intuito de auxiliar os estudantes na construção de uma região limitada por uma circunferência no *software* GeoGebra.

Desse modo, apenas o item a) (**Quadro 1**) foi desenvolvido conforme o arquivo impresso entregue às duplas. Os demais itens foram explorados como forma de fomentar e/ou complementar a investigação, dependendo do progresso da dupla.

O **Quadro 2** apresenta um questionamento que pode ser explorado segundo a construção completa sugerida no **Quadro 1**. Outros questionamentos podem ser feitos independente da exploração trilhada pelos estudantes, como: *Comparando a área da nova região com a área da região limitada pela circunferência, ela é uma boa aproximação ao que desejamos? É possível melhorar essa aproximação? O que devemos fazer para obter essa melhor aproximação?*

**Quadro 2:** Questionamento da primeira etapa da atividade 1

- a) Qual o valor da medida do lado do quadrado para que sua área seja uma boa aproximação à área do quadrante circular?


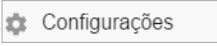
Fonte: Dados da Pesquisa.

Esses questionamentos foram oportunamente colocados quando os estudantes esboçavam indícios de finalização dessa etapa da investigação, convidando-os a refletir sobre o caminho escolhido, o percurso desenvolvido e o valor encontrado. Desse modo, a atividade segue o caráter investigativo e exploratório, possibilitando aos participantes a construção de novos cenários, o aprimoramento das ideias já em execução e/ou a iniciação de uma nova sequência de ideias. A dinâmica de refazer os questionamentos se manteve até os estudantes manifestarem o interesse em assumir algum valor como desfecho da etapa 1 dessa atividade, mas tendo ciência do caminho a ser trilhado, caso fosse necessário seguir com a investigação.

Na segunda etapa da atividade, os estudantes foram convidados a explorar uma aproximação para  $\pi$ , por meio da relação entre o lado do quadrado construído em um quadrante e o raio da circunferência que limita a região estudada na etapa 1 dessa atividade. É importante ressaltar que, para esse momento, a proposta de investigação apresentada no **Quadro 1** precisa ser explorada com os participantes, ainda que seja como forma de fomentar e/ou complementar as discussões e observações. Reforçamos que o **Quadro 3** e **Quadro 4**, a seguir, assim como os anteriores, apresentam uma sugestão de abordagem para a atividade e que, na prática, seus elementos foram introduzidos a partir de diálogos e construções orientadas, não sendo necessária a dependência do roteiro.

**Quadro 3:** Etapa 2 – Instrução para início da segunda investigação da atividade 1

## 2. Explorando aproximações para $\pi$ .

- a) Aumente o arredondamento dos valores exibidos na janela do GeoGebra para 10 casas decimais clicando no ícone , seguido da opção “Configurações” .

Fonte: Dados da Pesquisa.

A intenção em aumentar o número de casas decimais dos valores obtidos anteriormente está em observar e validar a possibilidade de seguir com a investigação e a busca por melhores aproximações para o valor de  $\pi$  na atividade. Essa observação pode ser acompanhada de questionamentos, como os apresentados no **Quadro 4**, a seguir.

### Quadro 4: Questionamentos da segunda etapa da atividade 1

- b) Os valores encontrados anteriormente para as áreas continuam sendo uma boa aproximação? Se for, é possível achar uma melhor?
- c) Existe alguma outra estratégia para encontrar a melhor aproximação desejada? Como podemos explorá-la?

Fonte: Dados da Pesquisa.

Essa segunda etapa da atividade pode ser conduzida explorando diretamente o problema apresentado por Baron (1985), em busca de um outro par de pontos  $p$  e  $q$  tal que  $\left(\frac{p}{q}\right)^2 \cong \frac{\pi}{4} r^2$ .

Desenhe um quadrante circular (estimado de olho) e construa um quadrado com área igual à do quadrante que desenhou. Finalmente, *medindo* o lado do quadrado e exprimindo-o em termos do raio do círculo, você será capaz de ver como os seus resultados comparam-se com as aproximações egípcias, isto é, lado do quadrado =  $8/9$  raio (BARON, 1985, p. 13).

Além disso, também pode envolver a aproximação entre as áreas do círculo e do quadrado,  $\pi r^2 \cong l^2$ , observando e explorando os valores associados as construções feitas no *software* GeoGebra.

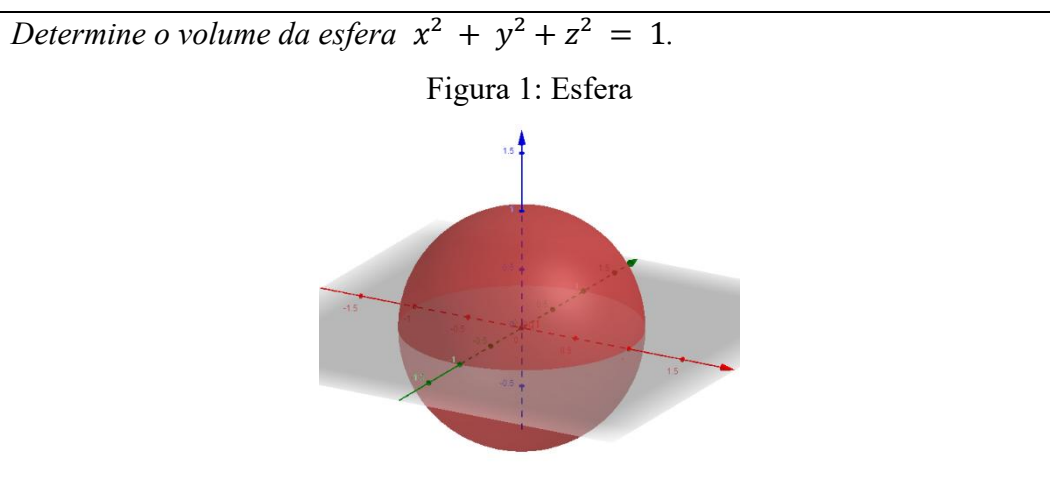
## 4 Cubatura da Esfera

Esta atividade tem como objetivo levar a proposta de investigação apresentada na atividade anterior para o ambiente 3D, buscando determinar o volume de uma esfera aplicando a estratégia de cálculo por aproximação. Esta pesquisa entende volume como sendo a região limitada por eixos e superfícies planas e/ou curvas, cujo valor numérico associado pode ser determinado mediante diferentes estratégias de cálculo. Esse entendimento de volume foi

explorado de modo implícito com os estudantes ao longo do desenvolvimento de todas as atividades propostas por esta pesquisa e que envolvem esse conceito.

Inicialmente, a atividade foi pensada e elaborada partindo da estratégia de cálculo que busca determinar o volume de um cubo que seja equivalente ao volume da esfera e, a partir disso, também explorar aproximações para  $\pi$ . Vale ressaltar que, como os estudantes já tinham explorado a atividade anterior (*Quadratura do círculo*) usando a ideia de aproximar a área desejada a de um quadrado, essa nova atividade foi investigada pelas duplas, seguindo, diretamente, essa forma de abordagem, porém, adaptada ao ambiente 3D. Os quadros abaixo apresentam um possível roteiro de desenvolvimento para essa atividade no GeoGebra, bem como questionamentos que contribuem com o cenário investigativo e exploratório proposto.

#### Quadro 5: Apresentação da atividade 2



Fonte: Dados da Pesquisa.

#### Quadro 6: Etapa 1 – Instrução para início da atividade 2 e estruturação de uma possível abordagem

1. Construção do cenário de investigação no GeoGebra (reduzido a um octante).

- Abra a “Janela de Visualização 3D” clicando em Janela 3D.
- Clique no campo “Entrada” + Entrada..., digite a equação  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  e pressione a tecla “Enter” no teclado ou no GeoGebra.
- Calcule o volume do octante da esfera, selecionando a ferramenta “Ângulo” , seguido de “Volume” e clique sobre o objeto construído anteriormente. Em seguida, dê um duplo clique sobre a caixa de texto aberta na janela de visualização e clique dentro do ícone que aparece do lado direito da equação, acrescentando a divisão por 8. Altere

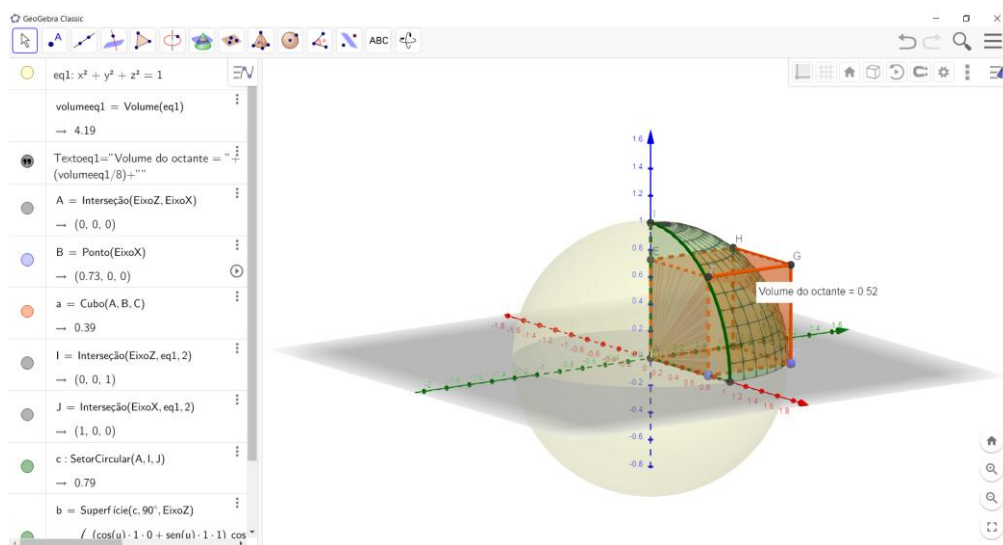


o outro lado da equação para “Volume do octante”.

- d) Construa um cubo. Para isso clique na aba “Pirâmide” e selecione a ferramenta “Cubo” , posicionando dois vértices, o primeiro em (0,0) e o outro em qualquer ponto do eixo x, tal que  $0 < x < 1$ .
- e) Calcule o volume do cubo.

Fonte: Dados da Pesquisa.

**Figura 2:** Octante da esfera e cubo para comparação de volume



Fonte: Dados da Pesquisa.

Mesmo que essas instruções não tenham sido usadas de forma direta e não tenham causado impacto no desenvolvimento da atividade por parte dos estudantes, vale ressaltar que há um erro de digitação no item d (**Quadro 6**). Ele orienta a construção de um cubo posicionando dois vértices, sendo um deles em (0, 0), quando o correto seria (0, 0, 0) por se tratar de um ambiente com três dimensões. Na prática, essa primeira etapa da atividade foi usada com o intuito de auxiliar os estudantes na construção de uma esfera no *software* GeoGebra. Desse modo, apenas os itens a e b (**Quadro 6**) foram desenvolvidos conforme o arquivo impresso entregue às duplas. Os demais itens foram desenvolvidos e explorados de modo intuitivo pelos estudantes e, em alguns momentos, orientados oralmente pela pesquisadora.

O **Quadro 7** apresenta um questionamento que pode ser explorado após a construção do cenário descrito no **Quadro 6**. Outros questionamentos que emergem durante essa investigação são: *Comparando o volume do novo sólido construído com o volume da esfera,*

*ele é uma boa aproximação ao que desejamos? É possível melhorar essa aproximação? O que devemos fazer para obter essa melhor aproximação?*

**Quadro 7:** Questionamento da primeira etapa da atividade 2



- a) Qual o valor da medida da aresta do cubo para que seu volume seja uma boa aproximação ao volume do octante da esfera?

Fonte: Dados da Pesquisa.

Esses questionamentos foram colocados sempre que os estudantes esboçavam indícios de finalização dessa etapa da investigação, convidando-os a refletir sobre o caminho escolhido, o percurso desenvolvido e o valor encontrado. Desse modo, a atividade segue o caráter investigativo e exploratório, possibilitando aos participantes a construção de novos cenários, o aprimoramento das ideias já em execução e/ou a iniciação de uma nova sequência de ideias. A dinâmica de refazer os questionamentos se manteve até os estudantes manifestarem o interesse em assumir algum valor como desfecho final da etapa 1 dessa atividade, mas tendo a consciência do caminho a ser trilhado caso fosse necessário seguir com a investigação.

Na segunda etapa da atividade, os estudantes foram convidados a explorar uma aproximação para  $\pi$ , por meio da relação entre a aresta do cubo construído em um octante e o raio da esfera. Os **Quadros 8 e 9**, a seguir, assim como os anteriores, apresentam uma sugestão de abordagem para a atividade, e que na prática seus elementos foram introduzidos a partir de diálogos e construções orientadas, não sendo necessário a dependência do roteiro.

**Quadro 8:** Etapa 2 – Instrução para início da segunda investigação da atividade 2

2. Explorando aproximações para  $\pi$ .
- a) Aumente o arredondamento dos valores exibidos na janela do GeoGebra para 10 casas decimais clicando no ícone , seguido da opção “Configurações”  Configurações .

Fonte: Dados da Pesquisa.

Assim como na atividade anterior (*Quadratura do círculo*), a intenção em aumentar o número de casas decimais dos valores obtidos anteriormente está em observar e validar a possibilidade de seguir com a investigação e a busca por melhores aproximações para a atividade, possibilitando explorar a relação entre a aresta do cubo e valores aproximados de  $\pi$ . Esse momento da investigação deve ser acompanhado de questionamentos, como, por exemplo, os apresentados no **Quadro 9**.

### Quadro 9: Questionamentos da segunda etapa da atividade 2

- b) Os valores encontrados anteriormente para os volumes continuam sendo uma boa aproximação? Se for, é possível achar uma melhor?
- c) Existe alguma outra estratégia para encontrar a melhor aproximação desejada? Como podemos explorá-la?

Fonte: Dados da Pesquisa.

Essa segunda etapa da atividade pode ser conduzida partindo de um desdobramento não apresentado por Baron (1985) em um problema presente em seu livro, na Unidade 1, em que os egípcios antigos expõem uma possível relação entre o lado de um quadrado e o raio de um círculo, abrindo espaço para explorar esse problema por meio da relação de áreas e identificar aproximações para o valor de  $\pi$ . Esse desdobramento consiste em ampliar o problema ao cálculo do volume de uma esfera, explorando, no GeoGebra, relações entre ele e o volume de um cubo, como  $\frac{4}{3}\pi r^3 \cong a^3$ , e identificando aproximações ao valor de  $\pi$ .

## 5 Considerações Finais

Este estudo teve início com o intuito de identificar quais aspectos do Pensamento Diferencial (PD) emergiam em um grupo de estudantes do Ensino Médio durante a investigação de atividades envolvendo o cálculo de áreas e volumes. Para isso, foram desenvolvidas sessões de ensino com estudantes do Ensino Médio, organizados em duplas, nas quais exploraram as atividades propostas utilizando o GeoGebra. Nesse contexto, a pergunta orientadora foi: *quais aspectos do PD e do pensar-com-GeoGebra emergem quando estudantes do Ensino Médio investigam atividades sobre cálculo de áreas e volumes?*

Portanto, o foco desta pesquisa esteve nos aspectos do PD e no uso de tecnologias digitais. Assim, para discutir sua compreensão, dialogou-se com outros tipos de pensamento presentes na Matemática, fundamentando-se nas concepções de Wielewski (2005), Henriques (2010), Sad (2000) e Reis (2001), ao considerar o PD como um tipo de pensamento matemático (PM) que, embora possua particularidades, se articula e se complementa com outros modos de pensar matematicamente. A compreensão assumida neste estudo é a de que os aspectos do PD se manifestam por meio de conceitos do Cálculo Diferencial e Integral (CDI) emergentes de forma formal e/ou intuitiva, associados à ideia de pensar-cálculo-com-tecnologias.

Além disso, a pesquisa buscou, nas produções de Baron (1985), Edwards (1979) e Boyer (2010), vestígios históricos de aspectos do PD em problemas relacionados ao cálculo de áreas

e volumes, os quais influenciaram diretamente o design das atividades elaboradas. Embora o cenário metodológico tenha sido constituído por experimentos de ensino com duplas de estudantes, entende-se que as atividades apresentam potencial para uma transposição didática para a sala de aula regular, podendo ser adaptadas a contextos com maior número de alunos, sem perda de seu caráter investigativo. Nesse sentido, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) também orientou a discussão, especialmente diante do ainda escasso trabalho no Ensino Médio que explore, de forma investigativa e articulada, elementos do CDI.

## Referências

- BARON, M. E. **Curso de História da Matemática: Origens e Desenvolvimento do Cálculo. Unidade 1 – A Matemática Grega.** Tradução de José R. B. Coelho. Brasília: Editora UnB, 1985.
- BORBA, M. C.; SCUCUGLIA, R.; GADANIDIS, G. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática: sala de aula e internet em movimento.** 2. ed.; 1. reimp. Belo Horizonte: Autêntica, 2018.
- BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. **Humans-With-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: information and communication Technologies, modeling, experimentation and visualization.** New York: Springer, 2005. v. 39.
- BOYER, C. B. **História da Matemática.** Tradução de Elza F. Gomide. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2010.
- DOMINGUES, A. R. **O Pensamento Diferencial-com-GeoGebra de Estudantes do Ensino Médio.** Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto. 178 f. São José do Rio Preto, 2021.
- EDWARDS, C. H. **The Historical Development of the Calculus.** New York: Springer-Verlag, 1979.
- HENRIQUES, A. C. C. B. **O pensamento matemático avançado e a aprendizagem da análise numérica num contexto de atividades de investigação.** 2010. 462f. Tese (Doutorado em Educação) – Instituto de Educação Universidade de Lisboa, Lisboa, 2010.
- REIS, F. S. **A tensão entre rigor e intuição no Ensino de cálculo e análise: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos.** 2001. 302f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2001.
- SAD, L. A. **Uma abordagem epistemológica do cálculo.** CD – 23ª ANPED, 2000.
- WIELEWSKI, G. D. **Aspectos do pensamento matemático na resolução de problemas: uma apresentação contextualizada da obra de Krutetskii.** 2005. 407f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2005.