

Percurso de Estudo e Pesquisa no âmbito da Geometria: uma revisão bibliográfica europeia e latino-americana

Camila Cassoli¹
Mariana Moran²

Resumo: Considerando-se o espaço que o PEP e o PEP-FP vêm conquistando no âmbito das pesquisas desenvolvidas na TAD, o objetivo deste trabalho é elaborar um panorama de pesquisas desenvolvidas na Europa e na América Latina que atrelam o PEP e o PEP-FP à Geometria. Para isso, realizou-se uma revisão bibliográfica a partir de artigos publicados nos anais do evento *7th International Conference on the Anthropological Theory of the Didactic - CITAD*. Para a seleção dos artigos, consideraram-se trabalhos europeus e latino-americanos que atrelam o PEP e/ou PEP-FP à Geometria. Por fim, com base nas análises realizadas, observou-se que as pesquisas europeias apresentam esses dispositivos em diferentes contextos interdisciplinares, com uma questão geratriz ancorada em situações do cotidiano mobilizando diferentes campos do saber. Contudo, nas pesquisas latino-americanas, ficou evidenciada uma preocupação recorrente e dificuldades na articulação entre ensino e pesquisa, assim, o PEP emerge como uma estratégia para fortalecer essa integração.

Palavras-chave: Geometria. Teoria Antropológica do Didático. Ensino e Pesquisa. CITAD.

Study and Research Path in the Field of Geometry: A European and Latin American Literature Review

Abstract: Considering the space that PEP and PEP-FP have been gaining at the core of research developed within the ATD, the objective of this work is to outline an overview of studies carried out in Europe and Latin America that link PEP and PEP-FP to Geometry. To this end, a literature review was conducted based on articles published in the proceedings of the '7th International Conference on the Anthropological Theory of the Didactic – CITAD'. For the selection of articles, only European and Latin American works linking PEP and/or PEP-FP to Geometry were considered. Finally, based on the analyses performed, it is observed that European research presents these devices in various interdisciplinary contexts, with a generative question anchored in everyday situations mobilizing different fields of knowledge. However, Latin American research shows a recurring concern and difficulties in bridging teaching and research, thus PEP emerges as a strategy to strengthen this integration.

Keywords: Geometry. Anthropological Theory of the Didactic. Teaching and Research. CITAD.

Recorrido de Estudio e Investigación en el ámbito de la Geometría: una revisión bibliográfica europea y latinoamericana

Resumen: Considerando el espacio que el PEP y el PEP-FP han venido ganando en el núcleo de las investigaciones desarrolladas en la TAD, el objetivo de este trabajo es presentar un panorama de investigaciones llevadas a cabo en Europa y América Latina que vinculan el PEP y el PEP-FP con la Geometría. Para ello, se realizó una revisión bibliográfica basada en artículos publicados en las actas del evento “7th International Conference on the Anthropological Theory of the Didactic - CITAD”. Para la selección de los artículos, se consideraron solo trabajos europeos y latinoamericanos que relacionan el PEP y/o el PEP-FP con la Geometría. A partir del análisis realizado, se observa que las investigaciones europeas presentan estos dispositivos en contextos interdisciplinares, con preguntas generadoras

¹ Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PRPGEM). Doutoranda do Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática (PCM) da Universidade Estadual de Maringá (UEM), Maringá, Paraná, Brasil. E-mail: camilacassoli5@gmail.com. Orcid: <https://orcid.org/0000-0003-0135-3441>.

² Doutora pelo Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática (PCM) da Universidade Estadual de Maringá (UEM) e Professora Associada da Universidade Estadual de Maringá (UEM), Maringá, Paraná, Brasil. E-mail: mbarroso@uem.br. Orcid: <https://orcid.org/0000-0001-8887-8560>.

ancladas en lo cotidiano. En contraste, en América Latina se evidencian dificultades para articular enseñanza e investigación, donde el PEP aparece como una estrategia para fortalecer esta relación.

Palabras clave: Geometría. Teoría Antropológica de lo Didáctico. Enseñanza e Investigación. CITAD.

1 Introdução

A Teoria Antropológica do Didático (TAD) “parte do princípio de que o saber matemático se constrói, como resposta ao estudo de questões problemáticas como [...] o produto de um processo de estudo” (Freitas, 2019, p. 245). Essa ideia está diretamente relacionada com o desenvolvimento do Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP), objeto de estudo deste trabalho.

O PEP é um dispositivo didático que apresenta o potencial de materializar a relação didática entre o professor, o aluno e o saber, isso porque colabora na elaboração de questões e reflexões sobre a dimensão formativa do saber matemático (Chevallard, 2009). A elaboração de questões no amago do PEP ocorre por meio de uma questão geratriz que demonstra potencial de gerar questões secundárias; a busca por respostas dessas inquirições auxilia na elaboração da resposta para a questão geratriz.

Esse dispositivo se expandiu para diferentes contextos, como para a formação de professores. Tem-se o PEP-FP, que tem o intuito de habituar os professores com um dispositivo eficiente para desenvolver conhecimentos teóricos e práticos relacionados à prática de lecionar (Almouloud *et al.*, 2021). Acompanhando essa evolução das pesquisas relacionadas a esse dispositivo, buscou-se elaborar uma revisão bibliográfica com o potencial de situar a comunidade científica acerca das produções recentes a partir de uma análise reflexiva sobre o tema.

Partindo disso, esta revisão tem o intuito de elaborar um panorama de pesquisas desenvolvidas na Europa e na América Latina que atrelam o PEP à Geometria. Essa escolha se deu por este artigo ser resultado de uma pesquisa de doutorado em andamento, que busca elaborar e implementar um PEP- FP de Matemática em torno da geometria dos fractais.

Nas próximas seções, serão abordados, de forma sistematizada, o referencial teórico e os procedimentos metodológicos que embasaram esta pesquisa bem como os trabalhos selecionados e suas análises.

2 Percurso de Estudo e Pesquisa

A presente pesquisa tem como aporte teórico a Teoria Antropológica do Didático (Chevallard, 1999), com foco em dispositivos desenvolvidos para analisar as mudanças de paradigmas ocorrentes no âmago do contexto escolar. Para se iniciar a discussão sobre esses

dispositivos, torna-se necessário situar as noções de “paradigma”. Chevallard e Stromskag (2022) explicam o paradigma como um contrato que orienta uma ação humana. Nesse contrato, encontra-se um conjunto de pressupostos, práticas e modos de organização do conhecimento que estrutura a maneira como se ensina e aprende em determinado contexto.

Diante disso, Chevallard (2013) revela dois paradigmas que orientam os saberes no processo de ensino da Matemática e de outras áreas do conhecimento: o ‘paradigma monumentalista’ e o ‘paradigma de questionamento do mundo’. O primeiro aborda o professor como centro do processo de ensino e aprendizagem, cuja função é apresentar os conhecimentos de forma que os alunos aceitem os ensinamentos passivamente. Esse paradigma foi comparado, por Chevallard (2013), a uma visita a um museu, na qual a única interação ocorrente é a observação. O segundo refere-se à construção do conhecimento a partir de questionamentos e exploração, ou seja, o paradigma de questionamento do mundo nutre o paradigma anterior com indagações e explorações que levam à construção do conhecimento a ser ensinado. Chevallard (2009) designou o ato de questionar o mundo como Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP).

O PEP é um dispositivo que auxilia na mudança de paradigma no contexto escolar por meio da elaboração de questionamentos sobre o saber envolvido. Esse dispositivo parte de uma questão geratriz Q_0 , que tem potencialidade de gerar outros questionamentos no processo de busca por sua resposta; essas questões derivadas são impulsionadas pela necessidade de conhecimento para se responder à Q_0 (Chevallard, 2009). Para responderem a essas inquiuições, os alunos podem recorrer a mídias tais como livros, sites, jornais, documentos, entre outros (Teixeira; Nogueira; Antunes, 2022). Essa interação só se torna possível quando o professor e o aluno têm o intuito de construir o conhecimento juntos, por meio de questionamentos, exploração e busca por respostas (Chevallard, 2009).

O PEP no contexto da formação de professores é denominado, por Ruiz-Olarría (2015), de Estudo e Pesquisa para a Formação de Professores (PEP-FP). Nesse caso, o dispositivo didático também parte de uma questão geratriz Q_0 -FP, no entanto o foco situa-se em explorar contextos da profissão ‘professor’, enfatizando um conceito matemático que pode ser abordado pelo pesquisador que exerce a função de formador. O intuito aqui é apenas situar o leitor sobre o tema que abrangerá este trabalho, portanto, caso seja de interesse daquele aprofundar o estudo desses elementos do dispositivo didático, sugere-se a leitura de Ruiz-Olarría (2015) e Chevallard (2009).

Ao se analisar esses dois conceitos, observa-se que tanto o PEP quanto o PEP-FP exploram a dinâmica entre professor, aluno e conhecimento. Essa relação pode ser diretamente

influenciada pelos aspectos sociais, políticos e culturais de cada país. Diante disso, foi realizada uma revisão bibliográfica junto aos anais do evento *7th International Conference on the Anthropological Theory of the Didactic - CITAD* que contempla artigos relacionados à TAD, e, conseqüentemente, foram encontrados trabalhos de países europeus e latino-americanos referentes ao PEP e ao PEP-FP.

As etapas percorridas, as discussões e os resultados serão evidenciados nas próximas seções.

3 Procedimentos Metodológicos

Este estudo é uma revisão bibliográfica de artigos publicados nos anais do *7th International Conference on the Anthropological Theory of the Didactic - CITAD* que ocorreu em Barcelona (Espanha), no ano de 2022. O evento congregou pesquisadores dedicados à Teoria Antropológica do Didático (TAD) com os seguintes propósitos: apresentar um panorama atualizado dos avanços e novidades da TAD; delinear um programa de pesquisa com foco nas dificuldades que afetam os sistemas educacionais; e promover reflexões acerca dos desafios decorrentes da expansão da TAD para diferentes domínios do conhecimento.

Para Gil (2008), a revisão bibliográfica é desenvolvida a partir de um material já elaborado como livros, anais, dissertações e artigos científicos. Por meio desses materiais, buscam-se a atualização do conhecimento científico, o acompanhamento do desenvolvimento do tema em questão, a análise, a validação e a síntese de contribuições teóricas já publicadas sobre determinado tema. Esses objetivos convergem com os propósitos da presente pesquisa.

É importante mencionar que a revisão bibliográfica não possui foco em fontes primárias, mas fundamenta-se na análise de fontes secundárias previamente publicadas (Gil, 2008). Diante disso, esse tipo de pesquisa não deve ser uma compilação de informações, mas uma análise reflexiva, comparando diferentes perspectivas, tendências e identificando lacunas na literatura. Para isso, Gil (2008) apresenta quatro etapas que delineiam uma revisão bibliográfica: a) Definição do tema e do problema de pesquisa; b) Levantamento das fontes bibliográficas; c) Leitura, análise e interpretação das informações; e d) Organização e escrita da revisão.

Na etapa Definição do tema e do problema de pesquisa, é fundamental delimitar o escopo do estudo em questão, para isso, é importante estabelecer o objetivo da revisão, esclarecendo o que se pretende compreender, sintetizar e discutir perante o tema escolhido. Diante disso, esta pesquisa busca discutir os PEP e os PEP-FP desenvolvidos em diferentes realidades que abrangem tanto países da Europa quanto países da América Latina.

Considerando-se que a pesquisa de doutorado em andamento que originou esta revisão abrange aspectos geométricos relacionados com esses dispositivos, foram selecionados apenas artigos que atrelam o PEP e o PEP-FP à Geometria.

A segunda etapa consiste na busca e seleção de materiais importantes para a revisão como livros, artigos científicos, dissertações, teses, entre outros documentos acadêmicos. Na etapa Levantamento das fontes bibliográficas, é necessário adotar critérios de seleção, considerando-se a relevância e a confiabilidade das fontes. As contribuições apresentadas no congresso evidenciado anteriormente foram reunidas no documento intitulado *Extended Abstracts 2022: Proceedings of the 7th International Conference on the Anthropological Theory of the Didactic (CITAD7)*, que serviu como base para a produção dos dados desta revisão. A escolha desse material justifica-se pela ampla variedade de situações relacionadas ao PEP e ao PEP-FP desenvolvidas por pesquisadores europeus e latino-americanos de destaque na área.

Após a escolha do material, foram delineados os critérios de busca por artigos que envolvessem simultaneamente o PEP e/ou o PEP-FP atrelados à Geometria. O documento foi constituído por 47 trabalhos, dos quais, 25 trabalhos relacionavam o PEP ou o PEP-FP e apenas oito atrelavam o PEP ou o PEP-FP à Geometria, sendo quatro europeus e quatro latino-americanos.

A terceira etapa consiste na leitura crítica para se identificar os resultados relevantes e possíveis lacunas na literatura e comparar os diferentes estudos para se refletir sobre as convergências e divergências. Para essa revisão em específico, não se buscou esgotar o campo da Teoria Antropológica do Didático no âmbito do PEP, isso porque os trabalhos selecionados para a análise apresentam uma compreensão fundamentada no desenvolvimento atual do PEP e do PEP-FP na Europa e na América Latina, com base em estudos e evidências científicas. As reflexões realizadas de cada um dos artigos selecionados serão apresentadas nas seções a seguir.

Por fim, a última etapa é a Organização e escrita da revisão. Nesse momento é fundamental estruturar as informações de forma que isso garanta argumentações claras e fundamentadas. Diante disso, optou-se por apresentar os trabalhos em parágrafos que sucedem uma lógica para se compreender a articulação natural das abordagens que permitem tratar do PEP/ PEP-FP e suas particularidades considerando-se o contexto.

4 Resultados e Discussões acerca dos Trabalhos Europeus

No que tange às pesquisas desenvolvidas na Europa, destaca-se a diversidade de países em que pesquisadores da área da Matemática elaboram pesquisas e recursos importantes para a fundamentação e a aplicação do PEP e do PEP-FP, considerando a particularidade de cada região. Dentre os trabalhos selecionados, foram identificados os seguintes países: Suíça, Noruega, Dinamarca e Espanha (Quadro 1).

Quadro 1 – Trabalhos da Europa que foram selecionados

Nome	Autores	País de origem
A study and research path on hyperthermia in children left in parked cars	Vegard Toppol	Noruega
Media and milieu dialectics and new resources available for students	Britta Eyriich Jessen	Dinamarca
Modelling inquiry in ATD: a framework to capture and analyze the chronogenesis and mesogenesis of an inquiry process	Jana Lackova	Suíça
Análisis de un REI-FP sobre los conocimientos lógicos en la formación matemático-didáctica inicial de maestros	Ana Maria Lerma, Berta Barquero, Francisco Javier García, Mercedes Hidalgo-Herrero, Alicia Ruiz-Olarría, Tomas Angiel Sierra	Espanha

Fonte: as autoras.

A partir da leitura dos artigos do Quadro 1, verificou-se regularidade na associação da questão geratriz com situações cotidianas vinculadas à Modelagem Matemática. Dentre estas, Toppol (2022) propõe um PEP fundamentado em uma questão geratriz referente aos casos de óbitos infantis causados por hipertermia em decorrência de veículos estacionados sob exposição solar: “Por que os bebês morrem de insolação em carros estacionados ao sol?”. Segundo o autor, essa questão demonstrou potencial para gerar novos questionamentos e modelar os aspectos matemáticos e físicos envolvidos na representação do corpo humano, favorecendo uma abordagem interdisciplinar na investigação.

Esse tema foi fundamentado nas estatísticas americanas, no entanto se tornou um assunto de interesse público, quando essa fatalidade passou a ocorrer de forma recorrente na Europa. Para se resolver essa questão, foram analisados os fatores físicos e fisiológicos que conduziram à formulação de um modelo matemático baseado no volume e na área de corpos de diferentes tamanhos. Nesse contexto, a Geometria desempenhou o papel de ferramenta facilitadora no processo de resolução do problema, enquanto o PEP, por meio de suas etapas,

estruturou o ambiente de aprendizagem ao direcionar a busca por respostas às questões emergentes. Portanto, a pesquisa de Topphol (2022) apresenta um PEP interdisciplinar que demonstra potencial para explorar conceitos além da Geometria, como, por exemplo, conceitos estatísticos.

Outro estudo que utiliza situações cotidianas para o desenvolvimento do PEP é o de Jessen (2022), que contextualiza o PEP por meio do tema ‘reconhecimento facial’ – ferramenta contemporânea presente nas tecnologias atuais. Diante disso, a questão geratriz situa o aluno como designer para refletir sobre a seguinte problemática: “Vocês são designers de soluções digitais para sistemas de segurança. Você tem um cliente que precisa de um sistema de reconhecimento facial. Para eficiência, o sistema deve exigir apenas três medidas para reconhecer as pessoas. Que medidas são necessárias e por quê?”.

A autora classificou essa questão como uma atividade de Modelagem Matemática adequada para a implementação de um PEP, de forma que este se destaca como um dispositivo que auxilia na evolução contínua da aprendizagem durante essa atividade. Com o intuito de resolverem a situação proposta, os alunos recorreram aos conceitos de polinômios, função linear e triângulo. Nesse contexto, a Geometria emergiu de maneira espontânea, demonstrando que os alunos detinham o conhecimento necessário para empregá-la como ferramenta na resolução de problemas matemáticos.

É importante ressaltar que Jessen (2022) apoia-se nos estudos de Chevallard (2009) para introduzir a concepção de PEP e argumenta que o ambiente deste permite a identificação de novos recursos disponíveis para os alunos nas aulas de Matemática, viabilizando sua exploração por meio de diferentes estratégias e investigações.

Outra pesquisa que faz uso de diferentes recursos e está atrelada à Modelagem Matemática é a de Lackova (2022), que explora um PEP direcionado à seguinte questão: “Qual a forma do cabo de suspensão da ponte Golden Gate?”. Por meio dessa questão buscou-se observar as estratégias levantadas por dois alunos voluntários de 17 anos. Com o intuito de responder à questão geratriz, os alunos buscaram auxílio em diferentes mídias, incluindo softwares para a construção de gráficos. Além disso, empregaram conceitos geométricos de maneira implícita, utilizando a localização de pontos para estruturarem os gráficos. Dessa maneira, a Geometria Analítica foi adotada como ferramenta importante para compor a solução.

Com base nas análises realizadas, Lackova (2022) observou que o PEP possibilita ao aluno desenvolver habilidades de selecionar ou descartar mídias, de modo a criar um meio didático que o auxilie na validação da questão geratriz. A autora também destaca a reformulação

que ocorre entre os papéis dos professores e dos alunos nesse contexto: o docente assume a função de mediador do processo e os alunos passam a desempenhar papel ativo na investigação na busca por validação das respostas por meio de pesquisas.

Portanto, os direcionamentos do PEP em questão “levou a uma rica atividade Matemática caracterizada por pesquisas, encontros com diferentes objetos matemáticos, momentos de reflexão, mas também por bloqueios, becos sem saída ou caminhos irrelevantes” (Lackova, 2022, p. 252, tradução nossa).

O único artigo europeu que foi desenvolvido no contexto de formação de professores é o de Lerma *et al.* (2022), cujo enfoque estava no ensino do conhecimento lógico para a formação de professores da educação infantil. Nesse contexto, o PEP-FP buscou promover a reflexão dos docentes sobre aspectos profissionais relacionados ao ensino do conhecimento lógico, de modo a avançar em direção ao paradigma de questionamento do mundo.

Foi proposta, aos participantes, a seguinte questão geratriz: “Que praxeologias o professor formador pode utilizar para que o futuro professor seja capaz de elaborar as praxeologias matemáticas e didáticas necessárias para manejar o estudo do conhecimento lógico na educação infantil para que sua razão de ser emerja?”. Para experienciar o PEP na posição de alunos e analisarem a Q0-FP, os professores participantes foram desafiados a refletir sobre o seguinte problema: como organizar e gerenciar a nova sala de achados e perdidos da escola? No processo de solução do problema, os participantes elaboraram estratégias como identificar, caracterizar, classificar e ordenar os objetos depositados nas caixas. Nesse contexto, a Geometria emerge de forma implícita e espontânea por meio dos formatos das caixas e como elemento facilitador na categorização do objeto com base em seu formato.

Lerma *et al.*, (2022) observaram, a partir da experiência vivenciada, que o PEP-FP oportunizou a formalização de tarefas, questões, técnicas e justificativas associadas às organizações matemáticas relacionadas ao conhecimento lógico. Também permitiu identificar alguns desafios presentes no ensino desse conhecimento no âmbito dos anos iniciais, em específico, os conceitos de relações de equivalência e ordem, os quais foram utilizados de maneira implícita pelos participantes. Embora alguns módulos do PEP-FP não tenham sido analisados, o estudo prévio apontou que as questões que emergiram no decorrer da experiência podem colaborar com o desenvolvimento de praxeologias importantes para se analisar e construir tarefas e atividades que envolvam os conhecimentos lógicos.

5 Resultados e discussões acerca dos trabalhos latino-americanos

Em relação às pesquisas latino-americanas, é importante destacar que os países com maior representatividade de pesquisadores que se dedicam aos estudos da TAD e contribuem com abordagens do PEP e do PEP-FP são Brasil, Peru e Argentina (Quadro 2).

Quadro 2 – Trabalhos da América Latina que foram selecionados

Nome	Autores	País de origem
About the Mapping of Personal Practice Paths in the ATD	Jany Goulart, Hamid Chaachoua, Luiz Márcio Farias, Avenilde Romo-Vázquez	Brasil
A praxeology of the Hough transforms the mathematical education of engineers	César Molina; Cintya Gonzales	Peru
Teaching Circular Motion according Antropological Theory of Didactic	Alexandre Jurandir Aparecido, Débora Coimbra	Brasil
Teaching from questions: the influence of the institutional position	María Rita Otero, María Paz Gazzola, Viviana Carolina Llanos	Argentina

Fonte: as autoras.

Convém enfatizar a cooperação estratégica entre Brasil e França nesse campo de pesquisa, o que oportuniza o desenvolvimento de projetos conjuntos e oportunidades relacionadas a programas de mestrado e doutorado sanduíche. Essa parceria possibilita que pesquisadores brasileiros realizem suas pesquisas sob a orientação de pesquisadores franceses, como demonstrado no estudo realizado por Goulart *et al.* (2022), que contou com a colaboração do pesquisador francês Hamid Chaachoua.

O texto apresentado por Goulart *et al.* (2022) é resultado de um doutorado sanduíche entre o Brasil e a França e busca criar um panorama que promova reflexões teóricas resultantes da tese. As discussões evidenciaram um ambiente híbrido como dispositivo didático em um contexto de formação de professores de Matemática de uma universidade brasileira. É importante destacar que o autor não adotou o PEP diretamente como dispositivo didático, mas elaborou um cenário teórico acerca dos Percursos Práticos Pessoais – também estabelecido por Yves Chevallard – em um contexto de uma tarefa específica. Esse direcionamento possibilitou a identificação e a descrição de um conjunto de técnicas e construções praxiológicas, contribuindo para uma reflexão sobre a “possibilidade de um Percorso de Estudo e Pesquisa que contemple o aspecto pessoal e individual de um sujeito” (Goulart, *et al.*, 2022, p. 50, tradução nossa).

No ambiente construído pelo pesquisador, foram trabalhados conceitos relacionados à álgebra vetorial, o que possibilitou o uso da Geometria Plana como estratégia de resolução. Esse contexto pode ser exemplificado pelo seguinte problema, proposto pelo autor: “Mostre que, se M e N são pontos médios dos segmentos AC e BC, respectivamente, então $|AB|=2|MN|$ ”. A partir dessa situação, emergiram algumas técnicas descritas como soma vetorial, multiplicação vetorial por escalar, distributiva, vetor oposto. Contudo, um dos participantes recorreu à semelhança de triângulos e noção de ponto médio, ou seja, buscou respaldo na Geometria Plana para elaborar suas estratégias. Assim, a Geometria emerge como técnica para a solução do problema proposto.

Portanto, Goulart *et al.* (2022, p. 43) inferem que os caminhos pessoais de estudo e pesquisa “permite[m] uma análise individualizada a partir das escolhas e produções de um aluno diante de uma questão geratriz Q_0 ”, o que concede inferir uma análise meticulosa das possíveis estratégias de resolução de uma questão geratriz que rege um PEP.

No domínio do PEP, Otero *et al.* (2022) o definem como um dispositivo didático adequado para o processo de ensino de aprendizagem no âmago do paradigma de questionamento do mundo. Com base nesse contexto, sua pesquisa investigou a interação de 62 professores de Matemática com questões que abordavam conceitos matemáticos característicos do ensino médio, no decorrer de um curso universitário voltado para a Didática da Matemática.

No decorrer do PEP, as tarefas tinham como foco a construção de uma caixa retangular que deveria ser realizada de acordo com as orientações apresentadas em um vídeo. A partir dessa construção, foram propostas as seguintes questões: “Quais são a altura, largura e comprimento das caixas que são obtidas se alguma folha for considerada? Por exemplo: como o Volume, a área de base S_b , o perímetro total etc. seriam calculados? Como podemos fazer caixas alinhadas com folhas A0, A1, A2 etc.?” (Otero *et al.*, 2024, p. 479, tradução nossa).

Diante disso, previamente foram pensadas possíveis estratégias que poderiam emergir dos participantes, como funções polinomiais e sequências geométricas, isso porque esses conceitos matemáticos se aproximam do currículo real do ensino médio. Porém, houve apenas alguns professores que utilizaram as sequências geométricas como estratégia. Para Otero *et al.* (2024, p. 483, tradução nossa), esse fato justifica-se em razão de “o currículo oficial conter as sequências e séries de organização matemática, que envolvem sucessões aritméticas e geométricas, mas estas não costumam ser ensinadas”. Esse aspecto não elimina o uso da Geometria nesse contexto, pois ela se manifestou durante a construção das caixas bem como nos cálculos de volume e perímetro.

Por fim, para os autores, os professores tendem a simplificar os conceitos matemáticos ao ensiná-los, contudo o ato de questionar é posteriormente retomado, isso porque essa prática é inerente à sua atuação profissional. Assim, o PEP proposto influenciou os professores a repensar essa prática.

Ao ponderarem sobre o ato de questionar, Aparecido e Coimbra (2022) enfatizam que na TAD – sob a perspectiva do paradigma de questionamento do mundo – a transmissão unilateral de conhecimentos por parte dos docentes é vista como limitada e insatisfatória. Partindo-se disso, torna-se necessário que os conhecimentos sejam construídos ativamente por meio de interações que levem a questionamentos (Aparecido; Coimbra, 2022). Diante dessa perspectiva, os autores desenvolvem um PEP para uma turma de 1º ano de ensino médio que busca ensinar o movimento circular, com base em uma investigação de ciclovias como opção de meio de transporte urbano.

Em um primeiro momento, no decorrer do desenvolvimento do PEP, foram exploradas tecnologias digitais que auxiliaram no estudo preliminar de grandezas físicas lineares e angulares, identificadas em contextos históricos e artísticos como na exposição virtual das obras de Leonardo da Vinci. Ao longo do PEP, surgiu a necessidade de se estudar objetos usuais como as bicicletas e porta-retratos. Esse cenário incentivou o pensamento crítico e a curiosidade dos estudantes “diante de soluções para determinado tipo de problema emergente da realidade cotidiana” (Aparecido; Coimbra, 2022, p. 321, tradução nossa).

O estudo relacionado às bicicletas e ao movimento circular auxiliou em um segundo momento na solução do problema proposto por meio da seguinte questão geratriz: “Para se chegar a esta escola, a bicicleta é uma boa opção de transporte?”. Nesse caso, a Geometria emergiu como ferramenta para se compreender o estudo físico dos movimentos circular e angular da bicicleta e das outras situações que foram propostas.

Sob outra ótica, Molina e Gonzales (2022) apresentam um PEP na perspectiva da Matemática ensinada nos cursos de Engenharia e um modelo epistemológico com base em praxeologias que contribuem na construção de projetos em aulas de Matemática dos cursos de Engenharias. “No âmbito da Teoria Antropológica da Didática (TAD), os PEP estão focados nos processos de modelagem e investigação e permitem que as atividades de modelagem sejam integradas ao ensino (Sala de Estudos)” (Molina; Gonzales, 2022, p. 174, tradução nossa). A integração entre a modelagem e a investigação contribuiu para se superar algumas dificuldades dos professores de Matemática ao abordarem aplicações da engenharia.

Uma estratégia para capacitar professores de Matemática na elaboração de um PEP fundamentado em uma questão geratriz vinculada à engenharia consiste na disponibilização de um modelo que integre praxeologias mistas, das duas áreas (Molina; Gonzales, 2022). Essas praxeologias, inerentes às instituições de Engenharia, viabilizam a realização de transposições didáticas no contexto educacional. Diante disso, ao observarem as aulas da disciplina ‘Processamento Digital de Imagens’, identificaram a presença de elementos matemáticos no componente teórico sob uma abordagem discursiva tais como o plano da imagem, o espaço de parâmetros, os pixels e a função da imagem.

Para Molina e Gonzales (2022), esse fenômeno evidencia que cada instituição conduz suas próprias práticas, mesmo ao incorporarem praxeologias oriundas de outras instituições. Também identificaram que, ao longo da disciplina mencionada, o componente tecnológico da engenharia foi abordado sob uma perspectiva eletrônica, enquanto o componente da Matemática foi exposto de maneira discursiva, com ênfase na Geometria Analítica.

Portanto, nesse contexto, a Geometria Analítica se destaca como ferramenta que integra a Álgebra e a Geometria, permitindo a determinação de pontos e coordenadas das imagens analisadas e contribuindo para o desenvolvimento da disciplina e a resolução de seus problemas.

6 Considerações Finais

Como já evidenciado ao longo deste estudo, pesquisas de revisão bibliográfica auxiliam no acompanhamento do desenvolvimento do tema em questão, de modo a analisar, validar e sintetizar contribuições teóricas que já foram publicadas e apontar possíveis rumos do desenvolvimento do tema. Considerando-se o espaço que o PEP vem conquistando no âmbito das pesquisas desenvolvidas na TAD, propõe-se elaborar, a partir desta revisão bibliográfica, um panorama de pesquisas desenvolvidas na Europa e na América Latina que atrelam o PEP à Geometria, por meio da análise de artigos selecionados do documento intitulado *Extended Abstracts 2022: Proceedings of the 7th International Conference on the Anthropological Theory of the Didactic (CITAD7)* – anais de um importante evento internacional da área.

O estudo revela que as investigações conduzidas na Europa que exploram o PEP e o PEP-FP articuladas com a Geometria evidenciam a aplicabilidade desses dispositivos em diferentes contextos interdisciplinares. Observa-se, de forma majoritária, nos trabalhos selecionados, a presença de uma questão geratriz ancorada em situações do cotidiano, as quais envolvem a Modelagem Matemática e, conseqüentemente, mobilizam diferentes campos do

saber, como apresentado nas pesquisas desenvolvidas por Topphol (2022), Jessen (2022) e Lackova (2022). Esse contexto indica que, na Europa, as pesquisas dessa natureza têm como foco um ensino personalizado, que possibilita, ao aluno, o acesso a diferentes saberes articulados com suas necessidades e interesses contemporâneos.

Outro aspecto importante revelado é que a Geometria emergiu de forma espontânea como ferramenta interdisciplinar e contribuiu para a compreensão e a solução dos problemas que surgiram no decorrer do percurso, o que leva a se inferir que os alunos possuem um repertório abrangente dos conceitos geométricos, que lhes permite modelar situações. Por fim, os referenciais utilizados para definir e explicar o delineamento do PEP e do PEP-FP são os pioneiros da teoria, como Yves Chevallard, Marianna Bosch, entre outros, trazendo uma base sólida para as novas ideias apresentadas.

Nos estudos selecionados da América Latina, observam-se preocupação recorrente e dificuldades na articulação entre ensino e pesquisa. Nesse contexto, o PEP emerge como uma estratégia para fortalecer essa integração, criando oportunidades de investigação científica e promovendo o desenvolvimento de práticas e competências acadêmicas. Essa perspectiva é evidenciada nas pesquisas de Goulart *et al.* (2022) e Otero *et al.* (2022).

A interdisciplinariedade também se destaca como aspecto relevante nas pesquisas latino-americanas, uma vez que permite o rompimento de abordagens compartimentalizadas no ensino e na pesquisa, possibilitando a articulação entre diferentes campos de conhecimento e a integração entre a teoria e a prática. Exemplos dessa abordagem podem ser observados no estudo de Aparecido e Coimbra (2022), que explorou conceitos das áreas de Física e Matemática, e na pesquisa de Molina e Gonzales (2022), que analisou a aplicação do PEP no contexto da Engenharia.

No que tange à Geometria, observa-se que ela foi empregada tanto como técnica de resolução quanto, de maneira mais implícita, como ferramenta de apoio à resolução de problemas. Sua aplicação se deu em distintos contextos, abrangendo áreas como a Engenharia, a Física, a própria Matemática e a Tecnologia. Tal diversidade de usos contribui para a valorização da Geometria no cenário educacional latino-americano, destacando a relevância daquela e potencial de articulação interdisciplinar.

No entanto, observa-se que os dispositivos analisados neste estudo estiveram vinculados, predominantemente, à Geometria Euclidiana. Diante disso, uma possível ampliação desta investigação consiste na identificação e análise de trabalhos que estabeleçam relações entre o PEP e o PEP-FP com a Geometria Não Euclidiana – como a pesquisa de doutorado em

andamento – de modo a explorar outras possibilidades epistemológicas e metodológicas no contexto da formação acadêmica e das práticas educativas.

Por fim, espera-se que esta revisão bibliográfica contribua com a pesquisa de doutorado em desenvolvimento ao ampliar as perspectivas para possíveis práticas no âmbito do PEP e do PEP-FP em diferentes contextos. A sistematização dos estudos analisados também busca fornecer subsídios teóricos e metodológicos que favoreçam experiências formativas mais contextualizadas, de modo a valorizar as especificidades sociais, culturais e econômicas de cada realidade em relação à aplicabilidade desses dispositivos em sala de aula.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Referências

ALMOULOU, Saddo Ag. *et al.* Percurso de estudo e pesquisa como metodologia de pesquisa e de formação. **Revista de Educação da Universidade Federal do Vale do São Francisco**, v. 11, n. 24, p. 426-466, 2021.

APARECIDO, Alexandre Jurandir; COIMBRA, Débora. Teaching circular motion according to the anthropological theory of the didactic. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON THE ANTHROPOLOGICAL THEORY OF THE DIDACTIC (CITAD7), 7., 2022. **Extended abstracts 2022: proceedings of the 7th International Conference on the Anthropological Theory of the Didactic**, 2022. p. 320–325.

CHEVALLARD, Yves. El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. **Recherches en didactique des mathématiques**, v. 19, n. 2, p. 221–266, 1999.

CHEVALLARD, Yves. La notion de PER: problèmes et avancées. Toulouse: UMR ADEF, 2009.

CHEVALLARD, Yves. Enseñar matemática en la sociedad del mañana: alegato a favor de un contraparádigma emergente. **REDIMAT – Journal of Research in Mathematics Education**, v. 2, n. 2, p. 161–182, 2013.

CHEVALLARD, Yves; STROMSKAG, Hanne. Condições de uma transição para o paradigma do questionamento do mundo. In: ALMOULOU, Saddo Ag; GUERRA, Renata; FARIAS, Luiz Márcio Santos; HENRIQUES, Afonso; NUNES, João Pedro (org.). **Percursos de estudo e pesquisa à luz da teoria antropológica do didático**. Curitiba: CRV, 2022. p. 27–58.

FREITAS, Rita Lobo. **Dispositivo de pesquisa e formação profissional PEP-FP/TAD: constituição do conhecimento docente para o ensino de geometria analítica plana do ponto e da reta**. 2019. 408 f. (Tese de Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2019.

GIL, Antônio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

GOULART, Jany; CHAACHOUA, Hamid; FARIAS, Luiz Márcio; ROMO-VÁZQUEZ, Avenilde. About the mapping of personal practice paths in the ATD. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON THE ANTHROPOLOGICAL THEORY OF THE DIDACTIC (CITAD7), 7., 2022. **Extended abstracts 2022: proceedings of the 7th International Conference on the Anthropological Theory of the Didactic**, 2022. p. 41–52.

JESSEN, Britta Eyrich. Média and milieu dialectics and new resources available for students. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON THE ANTHROPOLOGICAL THEORY OF THE DIDACTIC (CITAD7), 7., 2022. **Extended abstracts 2022: proceedings of the 7th International Conference on the Anthropological Theory of the Didactic**, 2022. p. 232–239.

LACKOVA, Jana. Modelling inquiry in ATD: a framework to capture and analyze the chronogenesis and mesogenesis of an inquiry process. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON THE ANTHROPOLOGICAL THEORY OF THE DIDACTIC (CITAD7), 7., 2022. **Extended abstracts 2022: proceedings of the 7th International Conference on the Anthropological Theory of the Didactic**, 2022. p. 240–253.

LERMA, Ana Maria; BARQUERO, Berta; GARCÍA, Francisco Javier; HIDALGO-HERRERO, Mercedes; RUIZ-OLARRÍA, Alicia; SIERRA, Tomas Angiel. Análisis de un REI-FP sobre los conocimientos lógicos en la formación matemático-didáctica inicial de maestros. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON THE ANTHROPOLOGICAL THEORY OF THE DIDACTIC (CITAD7), 7., 2022. **Extended abstracts 2022: proceedings of the 7th International Conference on the Anthropological Theory of the Didactic**, 2022. p. 373–382.

MOLINA, César; GONZALES, Cintya. A praxeology of the Hough transforms the mathematical education of engineers. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON THE ANTHROPOLOGICAL THEORY OF THE DIDACTIC (CITAD7), 7., 2022. **Extended abstracts 2022: proceedings of the 7th International Conference on the Anthropological Theory of the Didactic**, 2022. p. 174–184.

OTERO, María Rita; GAZZOLA, María Paz; LLANOS, Viviana Carolina. Teaching from questions: the influence of the institutional position. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON THE ANTHROPOLOGICAL THEORY OF THE DIDACTIC (CITAD7), 7., 2022. **Extended abstracts 2022: proceedings of the 7th International Conference on the Anthropological Theory of the Didactic**, 2022. p. 477–488.

RUIZ-OLARRÍA, Alicia. **La formación matemático-didáctica del profesorado de secundaria: de las matemáticas por enseñar a las matemáticas para la enseñanza**. 2015. Tese (Doutorado) – Universidad Autónoma de Madrid, Madrid, 2015.

INTERNATIONAL CONFERENCE ON THE ANTHROPOLOGICAL THEORY OF THE DIDACTIC (CITAD7), 7., 2022, Barcelona, Espanha. **Extended abstracts 2022: proceedings of the 7th International Conference on the Anthropological Theory of the Didactic (CITAD7)**. Curitiba: CRV, 2022. v. 1.

TEIXEIRA, Bruno Freitas; NOGUEIRA, Cláudia Maria Ignácio; ANTUNES, Fernanda Cristina Alves. A mobilização das dialéticas na promoção da aprendizagem por meio do percurso de estudo e pesquisa (PEP). In: ALMOULOU, Saddo Ag; GUERRA, Rosa; FARIAS, Luiz Márcio; HENRIQUES, Afonso; NUNES, João (org.). **Percurso de estudo e pesquisa à luz da teoria antropológica do didático: fundamentos teórico-metodológicos para a formação**. Curitiba: CRV, 2022. v. 1, p. 115–132.

TOPPHOL, Vegard. A study and research path on hyperthermia in children left in parked cars. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON THE ANTHROPOLOGICAL THEORY OF THE DIDACTIC (CITAD7), 7., 2022, Barcelona, Espanha. **Extended abstracts 2022: proceedings of the**

7th International Conference on the Anthropological Theory of the Didactic (CITAD7), 2022. p. 185–195.