EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
em Revista

Sociedade Brasileira de Educação Matemática

O MÉTODO DA EXAUSTÃO E O CÁLCULO DE ÁREAS: PROPOSTA E UMA TAREFA COM AUXÍLIO DO GEOGEBRA[1]

André Luis Trevisan[2]
Higgor Henrique Dias Goes[3]

RESUMO

Este texto apresenta uma proposta de tarefa que tem como objetivo o estudo do cálculo integral, com foco na introdução ao conceito de integral definida, por meio da exploração, com auxílio do Geogebra, do método de exaustão. Uma possibilidade que surge em meio à tecnologia, e de melhor compreensão do método, é seu estudo com o auxílio de *softwares.* Inspirados nas ideias de Freudenthal, defende-se a premissa de que o ensino do Cálculo Diferencial e Integral (CDI) deveria ser precedido pela exploração qualitativa, intuitiva e informal de ideias como taxa de variação e áreas sob curvas, por meio de abordagens gráficas e numéricas, que seriam gradativamente refinadas.

Palavras-chave:

Ensino de matemática. Ensino de Cálculo Diferencial e Integral. Tarefas matemáticas. Recurso computacional.

Introdução

Nos primórdios, muitas civilizações tinham o conhecimento de como calcular a área de regiões delimitadas por segmentos de reta, porém não possuíam a habilidade em lidar com regiões planas delimitadas por contornos curvilíneos. Segundo Apostol (2009), para conseguirem lidar com os problemas do cálculo de áreas, os gregos elaboraram um método que ficou conhecido como Método de Exaustão. Essa técnica determina a área de uma região, inscrevendo nela outra região poligonal com inúmeros lados, resultando em uma melhor aproximação e de cálculo fácil. Segundo o autor, Arquimedes (287-212 a. C.) utilizou esse método para estabelecer, com precisão, áreas do círculo e de outras figuras planas. Esse método pode ser considerado um dos precursores do que hoje conhecemos como Cálculo Integral, tema com uma ampla variedade de aplicações em vários ramos da ciência.

Neste artigo, apresentamos uma proposta de tarefa[4] que toma o método da exaustão como contexto para a definição do conceito de integral definida de uma função potência. Inspirados nas ideias de Freudenthal (1973, 1991), defendemos a premissa de que o ensino dessa disciplina deveria ser precedido pela exploração

[1]Os autores agradecem à Fundação Araucária e ao CNPq (Processo 457765/2014-3) pelo auxílio à realização do projeto da qual resulta este artigo.
[2]Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Professor do Departamento de Matemática e do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da UTFPR – Londrina/PR. E-mail: andrelt@utfpr.edu.br.
[3]Graduando de Engenharia e bolsista do projeto. E-mail: higgorhenrique05@gmail.com.
[4]Por tarefa estamos entendendo “o amplo espectro composto por ‘coisas a fazer’ pelos estudantes em sala de aula, o que inclui desde a execução de exercícios algorítmicos até a realização de investigações ou construção de modelos matemáticos” (TREVISAN; BORSSOI; ELIAS, 2015).

qualitativa, intuitiva e informal de ideias como taxa de variação e áreas sob curvas, por meio de abordagens gráficas e numéricas, que seriam gradativamente refinadas.

Gafanhoto e Canavarro (2014, p. 115) lembram que a seleção de tarefas adequadas para as aulas de matemática "é um aspeto decisivo da prática do professor". As autoras lembram que atrelar a uma tarefa o uso de um *software* "desafia não só a abordagem matemática aos conhecimentos, mas também a dinâmica com que podem ser abordados, permitindo aos alunos uma grande autonomia na aprendizagem".

Nessa mesma direção, Borba, Silva e Gadanidis (2014, p. 52) realizam a proposição de uma tarefa com base na noção de "experimentação com tecnologias", o que possibilita que a elaboração do conhecimento matemático assuma uma dimensão heurística de descoberta. Os autores apontam ainda que a "descoberta de padrões ou singularidades entre representações de objetos matemáticos (ou componentes dessas representações) propulsiona a produção de sentidos matemáticos".

Acerca do ensino de Cálculo Diferencial e Integral, Silva (2012, p. 13) sustenta a tese de que esse assunto possa ser incluído novamente nos programas do ensino médio. Segundo ele, "alguns temas abordados no Ensino Médio somente por intermédio de casos particulares, fazendo com que as generalizações se tornem inacessíveis aos estudantes". Cabe aqui o problema do cálculo de áreas, restrito a regiões planas delimitadas por segmentos de reta, ou o círculo (ou partes dele). Machado (2011, p.155 apud SILVA, 2012, p. 5) defende que, por meio do recurso à língua materna, "é possível compreender-se perfeitamente o significado tanto da derivada como da integral mesmo sem a disponibilidade de múltiplas técnicas operatórias ou sem contar com um arsenal de definições precisas".

Entendemos, portanto, que por meio da organização de tarefas, como a que aqui será apresentada, é possível explorar ideias como o cálculo de áreas sob curvas ainda no ensino médio, ou mesmo no início da disciplina de CDI (sem que uma definição precisa de limite tenha sido apresentada, ou mesmo o conceito de derivada), possibilitando que os estudantes os compreendam e interpretem, oferecendo a oportunidade de reinventarem conceitos, ao invés de apenas reproduzir algoritmos.

Trata-se de um recorte de um projeto de pesquisa que procura investigar os processos envolvidos na caracterização, na implementação e na avaliação de um ambiente educacional para o CDI em condições reais de ensino. O modelo de ensino subjacente a esses *ambientes de aprendizagem orientados para a resolução de problemas* (tradução que estamos adotando para *shift problem lessons* (PALHA, 2013; PALHA; DEKKER; GRAVEMEIJER, 2015)) consiste em sequências de tarefas matemáticas, adaptadas de livros didáticos, a serem resolvidas por estudantes em grupos heterogêneos, de forma colaborativa. Ao invés de "apresentar" ao estudante um novo conteúdo, são propostas aos estudantes sequências de tarefas com elementos que estimulem sua reflexão e a elaboração de um raciocínio conceitual; o professor, ao invés de fornecer explicações, torna-se um mediador das apresentações e explicações dos alunos na resolução.

O que apresentamos aqui é um exemplo de tarefa, integrante de sequência de tarefas, inspirada nas

Sociedade Brasileira de Educação Matemática
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA em Revista

ideias da Educação Matemática Realística (RME)[5], que começa a partir de uma situação particular, remetendo ao uso de estratégias e representações informais e, progressivamente, leva à formalização e generalização de um conceito (no caso, a integral definida). Trata-se do "desenho final" de um processo de pesquisa na qual essas tarefas foram testadas em sala de aula e redesenhadas com base em análises de experiências reais de aprendizagem[6].

Compreensão histórica

A seguir, faremos uma análise do método de exaustão do modo como realizado por Arquimedes (utilizando uma simbologia atual), relatado por Apostol (2009). A Figura 1, denominada **segmento parabólico** pode ser descrita da seguinte maneira: a região do plano delimitada pelo o gráfico da função $y = x^2$, pelo eixo das abscissas e pelas retas verticais $x = 0$ e $x = b$.

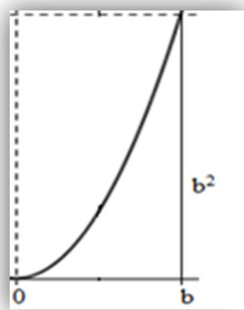

Figura 1 – Segmento parabólico
Fonte: elaborado pelos autores.

Como podemos observar na figura 1, a área do segmento parabólico é menor que a metade da área do retângulo de dimensões b e b^2 . Mais especificamente, Arquimedes fez a descoberta surpreendente de que a área do segmento é exatamente $\frac{1}{3}$ da área desse retângulo, ou seja, $A=\frac{b^3}{3}$.

O método que nos leva a essa conclusão consiste em dividir a região cuja área se quer determinar em retângulos. Isso pode ser feito de duas maneiras, uma por falta e outra por excesso, representados, para o caso da função $y = x^2$, pelas Figuras 2 e 3, respectivamente. Nesse caso, temos que a área do segmento parabólico é maior que a soma das áreas dos retângulos inferiores e menor que a soma das áreas dos retângulos superiores.

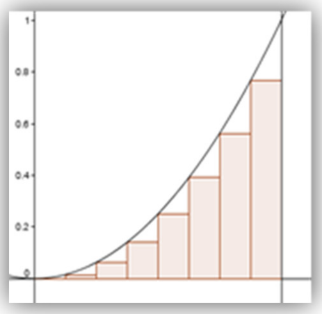

Figura 2 – Aproximação por Falta.
Fonte: autores.

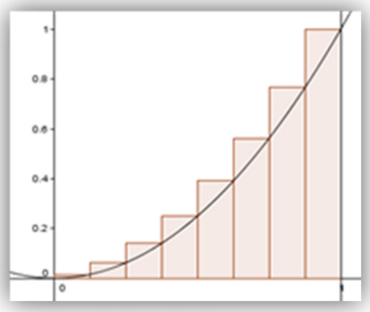

Figura 3 – Aproximação por excesso
Fonte: autores.

[5]Essa abordagem tem origem na Holanda no final da década de 1960 e é inspirado pelas ideias do matemático Hans Freudenthal. Opondo-se ao formalismo da Matemática Moderna, Freudenthal entende matemática como uma atividade natural e social cuja evolução acompanha a do indivíduo e a das necessidades de um mundo em expansão, uma atividade de organização (ou matematização). Para maiores detalhes ver Trevisan e Buriasco (2015).
[6]Para maiores detalhes, consultar Goes e Trevisan (2015) e Trevisan, Borssoi e Elias (2015).

Tarefa proposta

Apoiados nas ideias de Gafanhoto e Canavarro (2014, p. 116), organizamos uma tarefa que intenta "criar oportunidades de os alunos contatarem com diversas formas de representação das ideias matemáticas, de passarem informação de uma forma de representação para outra e de estabelecerem relações entre diferentes ideias matemáticas". Segundo essas autoras, em uma tarefa na qual se apresenta uma situação-problema, há um incentivo ao uso de múltiplas representações (verbal, numérica, gráfica e algébrica), por meio da apresentação de questões que os guiem em sua investigação. Entendemos também que o uso da tecnologia (no caso aqui, o Geogebra) pode potencializar o caráter de "experimentação" da tarefa, favorecendo a articulação entre essas múltiplas representações.

A tarefa que aqui propormos tem como propósito explorar, com auxílio do Geogebra, o método da exaustão como ferramenta para aproximar a área do segmento parabólico e, posteriormente, generalizar o resultado para o conceito de integral definida de uma função potência. É composta por três questões. A primeira e o segunda procuram resgatar o conceito de área, podendo inclusive ser propostas como tarefa extraclasse, como "preparação" para a questão 3. O mesmo vale para o item (i) da questão 3.

Tarefa proposta

Muitas civilizações primitivas conheciam fórmulas para a área de regiões delimitadas por segmentos de reta; contudo, elas deparavam com dificuldades para encontrar fórmulas para a área de regiões com contornos curvilíneos. Afinal, o que significa calcular a área de uma região? Como se define a área de uma região retangular? Que outras regiões com "lados retos" você conhece e como são calculadas suas áreas?

Construa uma fórmula que represente a área da região delimitada pela função $y = cx$ no intervalo $[a, b]$, com a e b positivos. Represente graficamente para valores de a, b e c de sua escolha.

Vamos explorar um método para aproximar a área da região delimitada pela curva $y = x^2$, pelo eixo x no intervalo $[0, b]$. O método consiste em dividir a figura em certo número de retângulos e obterem-se duas aproximações da área da região, uma por falta e outra por excesso, usando dois conjuntos de retângulos (Figuras 2 e 3)

Como "preparação", encontre uma fórmula para a soma dos quadrados dos n primeiros números inteiros positivos.

Inicialmente considere o intervalo de $x = 0$ a $x = 1$. Utilizando áreas de retângulos, obtenha uma aproximação por falta e outra por excesso dividindo esse intervalo em oito partes iguais. Trabalhe com frações e organize sua resolução de modo que a fórmula do item (i) seja utilizada.

Repita o item anterior, agora com auxílio do Geogebra, considerando o intervalo dividido em outras quantidades de partes conforme sua escolha. As sequências de estimativas por falta e por excesso parecem estar convergindo para qual valor?

Suponha agora uma divisão do intervalo genérico de $[0, b]$ em n partes. Explore essa situação com auxílio do Geogebra e procure "estimar" alguns resultados.

Encontre uma fórmula para aproximação por falta, e outra para aproximação por excesso, considerando agora um intervalo qualquer $[0, b]$ dividido em n partes.

Apresente argumentos que justifiquem a descoberta realizada por Arquimedes de que essa área é exatamente $A = b^3/3$.

Sociedade Brasileira de Educação Matemática
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA *em Revista*

Na questão 2, pode-se reconhecer a região como um trapézio, e sua área pode ser expressa por meio de fórmula específica para esse quadrilátero. É desejável, entretanto, que o professor instigue a pensar em outras representações possíveis, por exemplo, decompondo a região em um retângulo e um triângulo, ou utilizando a diferença de área de dois triângulos. Nesse último, obtemos a expressão $\frac{c(b^2-a^2)}{2}$ como resposta.

A questão 3 é mais complexa e aberta para o uso de diferentes tipos de representação. No item (ii), espera-se que os estudantes percebam que: (1) ao dividir o intervalo [0,1] em oito partes, obtemos subintervalos de tamanho $1/8$; (2) o número de retângulos é diferente para o caso de aproximação por falta e por excesso (8 e 7, respectivamente); (3) a altura do primeiro retângulo é $f(0)=0$ no primeiro caso, e $f(1/8)=(1/8)^2$ no segundo. Obtemos então as seguintes aproximações por falta e por excesso, respectivamente:

$\frac{1}{8}\cdot 0+\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^2+\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{2}{8}\right)^2+\cdots+\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{7}{8}\right)^2$ e $\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^2+\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{2}{8}\right)^2+\cdots+\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{8}{8}\right)^2$. O uso de evidência para o fator $\frac{1}{8^3}$ e o recurso à fórmula para a soma dos quadrados dos n primeiros números naturais, $S=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, solicitada no item (i), leva ao valores (com aproximações de duas casas decimais) de 0,2734 e 0,3984 como aproximações por falta e por excesso, respectivamente.

A escolha do número 8, nesse caso, foi arbitrária. Porém, a utilização de um *controle deslizante* no Geogebra, que represente o número de partes, combinado com os comandos *SomaDeRiemannSuperior* e *SomaDeRiemannInferior*[7] permitem construir uma sequência de estimativas por falta e por excesso, o que permite, ao mesmo tempo estimá-las com qualquer grau de precisão desejado, bem como observar que convergem para um mesmo valor (no caso, para $\frac{1}{3}$).

Como generalização para essa ideia, no item (iv) o intervalo *[0,b]* é dividido em n partes iguais, cada uma com comprimento $\frac{b}{n}$. Os pontos de divisão correspondem aos seguintes valores de x: 0, $\frac{b}{n}, \frac{2b}{n}, \frac{3b}{n}, \ldots, \frac{(n-1)b}{n}, \frac{nb}{n}$.

A soma das áreas de n retângulos superiores será dada por $\sum_1^n A = \frac{b^3}{n^3}(1^2+2^{2+}3^2+\ldots+n^2)$ e a soma das áreas de n - 1 retângulos inferiores por $\sum_1^n A = \frac{b^3}{n^3}[1^2+2^{2+}3^2+\ldots+(n-1)^2]$. Por meio da fórmula para a soma dos quadrados dos n primeiros números naturais, $S=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, chegamos (item (v)), no caso da soma das áreas de n retângulos superiores, que $A = \frac{b^3}{6}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{(n+1)}{n}\cdot\frac{(2n+1)}{n}$ ou ainda $A=\frac{b^3}{6}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(2+\frac{1}{n}\right)$.

De modo similar, para a soma das áreas de n retângulos inferiores chega-se a $A=\frac{b^3}{n^3}\cdot\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-n^2\right]$ ou ainda $A=\frac{b^3}{6}\cdot\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(2+\frac{1}{n}\right)-\frac{6}{n}\right]$.

Analisando o que acontece quando tomamos valor de n “muito grande” (item (vi) – o que pode ser feito de modo intuito[8], sem a necessidade de formalização do conceito de limite – ou ainda, com auxílio de controle deslizante do Geogebra que indique o número de retângulos da subdivisão), chegamos que, em ambos os casos, a área converge para $\frac{b^3}{3}$.

[7]SomaDeRiemannSuperior[<Função>, <Valor de x Inicial>,<Valor de x Final>,<Número de Retângulos>] e SomaDeRiemannInferior[<Função>, <Valor de x Inicial>,<Valor de x Final>,<Número de Retângulos>];
[8]Respaldamo-nos aqui nas ideias de Weigand (2014), que defende abordagem discreta inicial para os conceitos de derivada (por meio do estudo dos quocientes de diferenças) e integral definida, sem que o conceito de limite seja apresentado formalmente nesse momento. Pode-se aqui destacar a proposta de Spivak (1975), na qual uma “definição provisória” (no caso aqui, para o conceito de convergência) é apresentada, e em outro momento, detalhadamente discutida, criticada e substituída por uma definição matemática formal (Para maiores detalhes, ver Silva e Lima (2015)).

Com os cálculos realizados até esse momento, podemos ver algumas ideias (apresentadas em notação atual) que motivaram Arquimedes a obter a área de um segmento parabólico. Podemos extrapolar esse resultado e, dispondo de fórmulas para a soma dos cubos dos n primeiros números naturais, concluir que a área de região delimitada pela curva $y = x^3$, pelo eixo $y = x$ e pelas retas $x = 0$ e $x = b$ será $A = \frac{b^4}{4}$. Mais ainda, os resultados anteriores sugerem que, para uma curva do tipo $y = x^n$, n natural, teremos que $A = \frac{b^{n+1}}{n+1}$.

Os estudos de Arquimedes ajudaram a definir o conceito de área, e de maneira geral o de integral definida. Relacionando a ideia de soma integral com o problema do segmento parabólico, podemos concluir que "A integral de x^2 de 0 a b é $\frac{b^3}{3}$; simbolicamente, $\int_0^b x^2 dx = \frac{b^3}{3}$. O símbolo $\int (s\ alongado)$ é chamado de sinal de integral, uma extensão do sinal da somatória de grandezas infinitamente pequenas.

O cálculo de integrais definidas não se aplica apenas às áreas. Essa ferramenta, que expressa a ideia de uma soma generalizada, permite calcular também o comprimento de arco de uma curva, o trabalho realizado por uma força variável, o volume de sólidos de revolução. Segundo Freudenthal (1973), volumes e áreas podem ser calculados de forma intuitiva sem que definições mais gerais tenham sido apresentadas. O mesmo vale para densidades, velocidades e outros conceitos físicos e cinemáticos.

Considerações finais

Para Freudenthal (1973, p. 512), "repetidamente teoremas são enunciados e provas são dadas acerca de noções que são definidas para elas mesmas". A proposta de tarefa aqui apresentada procurou ilustrar uma proposta de trabalho factível tanto para o ensino médio quanto para o início da disciplina de CDI.

Entendemos a tarefa possibilita, ao mesmo tempo, o incentivo ao uso de múltiplas representações (verbal, numérica, gráfica e algébrica), como sugerem Gafanhoto e Canavarro (2014), bem como a experimentação com tecnologias. Reforça que, no primeiro contato com conceitos do CDI, o estudante deve ser estimulado a refletir e elaborar conjecturas e testá-las, criando e conectando diferentes representações de objetos matemáticos. Assim, entendemos ser "mais importante explorar geométrica e numericamente conceitos de derivada e integral, ao invés de se propor uma definição que esteja acima de qualquer suspeita" (FREUDENTHAL, 1973, p. 579).

Referências

APOSTOL, T. M. **Cálculo I**: Cálculo com funções de uma variável, com uma introdução de Álgebra Linear. São Paulo: Editorial Reverté, 2009.

BORBA, M. C.; SILVA, R. S. R.; GADANIDIS, G. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática:** Sala de aula e internet em movimento. Autência: Coleção Tendências em Educação Matemática, 2014.

FREUDENTHAL, H. **Mathematics as an educational task.** Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1973.

FREUDENTHAL, H. **Revisiting Mathematics Education.** Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1991.

GAFANHOTO, A. P.; CANAVARRO, A. P. A adaptação das tarefas matemáticas: como promover o uso de múltiplas representações. In: PONTE, J. P. (Ed.). **Práticas profissionais dos professores de Matemática.** Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2014, p. 115-137.

Referências

GOES, H. H. D.; TREVISAN, A. L. Física no ensino de Cálculo de uma variável real: introdução ao teorema do valor médio. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO EM ENGENHARIA, 43., 2015, São Paulo. **Anais...** São Paulo: Editora da UFABC, 2015. p. 1-8.

PALHA, S. A. G. **Shift-Problem Lessons**: Fostering Mathematical Reasoning in Regular Classrooms. Amsterdam: Research Institute of Child Development and Education; University of Amsterdam, 2013.

PALHA, S. A. G.; DEKKER, R.; GRAVEMEIJER, K. The effect of shift-problem lessons in the Mathematics classroom. **International Journal of Science and Mathematics Education**, v. 13, p. 1589 – 1623, 2015.

SILVA, B. A.; LIMA, G. L. Os cursos de Cálculo difundidos pela USP e as preocupações didáticas presentes em livros adotados e em práticas docentes. **Unión** (San Cristobal de La Laguna), v. 43, p. 88-111, 2015.

SILVA, M. A. Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio: um ensaio teórico. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5., 2012, Petrópolis. **Anais…** Petrópolis: SBEM, 2012. p. 1-18.

TREVISAN, A. L.; BORSSOI, A. H.; ELIAS, H. R. Delineamento de uma Sequência de Tarefas para um Ambiente Educacional de Cálculo. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6., 2015, Pirinópolis/GO. **Anais...** Brasília: SBEM, 2015. p. 1-12.

TREVISAN, A. L.; BURIASCO, R. L. C. Educação Matemática Realística: uma abordagem para o ensino e a avaliação em Matemática. **Revemat – Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 10, p. 167-184, 2015.

WEIGAND, H. A discrete approach to the concept of derivative. **ZDM Mathematics Education**, n. 46, p. 603 – 619, 2014.