Artigo

O CONCEITO EM MATEMÁTICA E SEUS CONTEXTOS

Marisa Rosâni Abreu da Silveira

Resumo: Este artigo tem o objetivo de mostrar que, no decorrer do processo de aprendizagem, o conceito matemático está sempre em estado de devir, na perspectiva do aluno, mesmo que esse conceito seja considerado imutável sob o ponto de vista da lógica e do rigor da Matemática. Ao conectar o conceito com outros conceitos, o aluno passa a reinterpretá-lo e, a partir dessa outra compreensão, ele o reconstrói. Ao atribuir sentidos em cada ato de interpretação, o conceito do objeto se modifica conforme o contexto. O conceito, antes de ser interpretado pelo aluno, obedece às exigências e à lógica da Matemática; após a interpretação, depende da própria lógica do aluno. A modificação do conceito surge no momento em que o sujeito, ao interpretar a regra matemática, estabelece novas regras, forjadas durante o processo de sua aplicação.

Palavras-chave: Ensino e Aprendizagem da Matemática, Conceito Matemático, Ressignificação do Conceito Matemático, Erro do Aluno na Matemática.

INTRODUÇÃO

As minhas inquietações e as da maioria dos professores de matemática, que permeiam a nossa prática docente, estão ligadas ao convívio com os problemas de aprendizagem do aluno. Na busca de respostas que solucionem esses problemas, procuramos ansiosos por novas idéias educacionais que nos forneçam sugestões de como abordar os conceitos matemáticos em sala de aula de forma eficiente.

Ao lermos Stella Baruk, a comentar sobre a desilusão do professor, ao aderir a uma teoria educacional, podemos nos projetar em suas constatações. Não nos sentimos apenas desiludidos, também passamos pelo constrangimento de tentar mostrar ao aluno uma Matemática aplicada ao quotidiano, que nem sempre é possível. A autora ironiza esse fato dizendo:

"*Como é que conseguiram convencê-lo* (o aluno) *de que tudo, à sua volta, é Matemática e, portanto, lhe pertence? Vejamos, o senhor da 3ª fila, coloque aqui o conteúdo do seu bolso esquerdo e que toda a gente observe: é um conjunto! Como, que diz? Não há nada neste bolso! Mas, perfeito! O conteúdo do seu bolso esquerdo, senhor, é um conjunto vazio!*" (1996, p. 349).

Sobre essa problemática, Wittgenstein (1987, p. 115) pergunta: "*Qual é o uso quotidiano da palavra infinito*?" (tradução minha).

Para ilustrar um dos motivos da desilusão do professor, ao tentar colocar algumas teorias educacionais em prática em sala de aula e não receber o êxito desejado, trago uma experiência pessoal. Certa vez, coloquei a seguinte questão em uma prova: "Qual é o volume de sorvete que cabe dentro de uma casquinha de forma cônica, cujo diâmetro é ... cm e cuja altura é ... cm?". Um aluno disse-me que eu não havia trabalhado com esse tipo de problema. Respondi a ele que em seu caderno deveria haver um problema idêntico, fornecendo a geratriz e não a altura da casquinha em forma cônica. Comentando esse episódio com o vice diretor da escola, ele disse, rindo: "*Claro, o aluno tem razão! Na aula, o sorvete é sabor de morango e, na prova, é sabor de uva!*". Confesso que me senti decepcionada, mas hoje compreendo que a mudança não foi apenas dos dados da casquinha do sorvete, e sim do contexto. Na perspectiva do aluno, não era mais um exercício no laboratório, não era um sólido planificado, não era o mesmo enunciado e, conseqüentemente, não era mais a mesma regra que deveria ser aplicada.

A leitura que os professores de Matemática fazem do construtivismo, enfatiza que o método não-abreviado deve ser construído pelo aluno, até que conclua o método abreviado. Wittgenstein se opõe a essa questão e diz que o método abreviado ensina o que há de sair do não-abreviado, e não o contrário. Sobre essa problemática, o filósofo conclui: "*parece que o perigo aqui é considerar o procedimento abreviado como uma sombra pálida do não-abreviado*" (1987, p. 129) (tradução minha). Quando ensinamos a contar 1, 2, 3, etc., mostramos uma caixinha, duas caixinhas, três caixinhas, etc. O algarismo 4, por exemplo, representa a síntese de quatro caixinhas. O método de contar introduz os signos numéricos como abreviaturas. Não é natural, em algumas circunstâncias, partirmos do método abreviado para o não-abreviado?

Dehaene (1997) comenta as falhas das idéias construtivistas aplicadas ao ensino da Matemática e diz que é necessária a linguagem para contar e que a criança tem a intuição do número. A importância da linguagem para contar é justificada pelo fato de que as diferenças lingüísticas ocasionam dificuldades na contagem. Na idade de 4 anos, os chineses contam até 40, em média, ao passo que os americanos contam até 15, com muita dificuldade.

Sem o processo reduzido, o discurso matemático é quase impossível. As fórmulas precisam ser demonstradas para que o aluno perceba o caminho de sua abreviação. O professor se esforça para fazer uma bela demonstração, e os alunos esperam a fórmula de resolução. No final da demonstração, alguns alunos dizem "Não sei pra que tudo isso!" e acrescentam: "Por que não dar direto a fórmula?".

A prova é um ritual, e o professor deve repensar a maneira de tratar essa cerimônia em sala de aula. A demonstração da fórmula de resolução é necessária para que o aluno perceba que a fórmula não surgiu por um passe de mágica, e sim como resposta para uma pergunta. Porém, o aluno reterá na memória apenas a fórmula, porque lhe é útil e econômico.

A demonstração de um cálculo é uma técnica que mostra como se procede de acordo com a regra. Existe aqui um paradoxo, o professor demonstra todos os passos para se chegar à fórmula de resolução, entretanto, num cálculo, ele reduz o seu processo. O passo a passo, que se opõe ao processo reduzido, nesse caso, parece ser esquecido. Quando o professor introduz uma regra de um determinado cálculo, tem o hábito de descrever minuciosamente todos os passos de resolução nos primeiros exemplos, mas, nos exemplos seguintes, passa a reduzi-los. Confesso que fiquei surpresa, ao acompanhar a resolução de um cálculo feito por estudantes franceses. Os procedimentos que eles fazem em cinco ou seis linhas, nossos alunos os fazem em duas ou três.

Através das leituras que abordam a Filosofia da Linguagem e do Conhecimento, podemos dar atenção ao fato de que a linguagem matemática é diferente da linguagem do mundo da vida e, por esse motivo, causa problemas na aprendizagem do aluno. Preocupada com a linguagem e o discurso, na minha dissertação de mestrado (SILVEIRA, 2000), constatei que o discurso pré-construído, que diz que "Matemática é difícil" e "é para poucos", produz medo e ojeriza no estudante. As imposições da objetividade, expressa na linguagem, e o medo da Matemática estão interligados. O aluno, porta-voz desse discurso, "sofre" ao estudar essa disciplina, e o professor se penitencia (ou goza) com esse sofrimento porque se projeta no aluno.

Os professores sabem que o aluno tem dificuldades em aprender a ciência da ordem. Por esse motivo, constantemente se reúnem para preparar aulas em conjunto e unificar provas. Os professores organizam oficinas para alunos do ensino médio e do ensino superior, como também pedem aumento de carga horária na disciplina, dão aulas de reforço, e o aluno continua com dificuldades em aprender Matemática.

O professor pode ilustrar uma aula com auxílio de material concreto, com problemas do quotidiano, com fatos históricos, mas a organização desses dados dependerá da sensibilidade e da lógica de cada aluno. O objeto da análise deste trabalho écompreender a lógica do aluno, ao se confrontar com a lógica do professor e com a lógica da Matemática. A construção do conceito pelo aluno obedece à sua lógica própria, e a análise aqui feita tem o objetivo de compreender o movimento do aluno na construção do conceito matemático, em diferentes contextos de aprendizagem.

Para dar conta do objeto analisado, busquei apoio teórico para compreender dois diferentes aspectos percebidos na relação ensino-aprendizagem. O primeiro aspecto é aquele que se constitui quando o aluno é convocado a fazer o uso da intuição e da imaginação, e o segundo se constitui quando o aluno segue regras. No contexto de sala de aula, ora o aluno fala consigo mesmo, ora participa de jogos de linguagem. Para responder à pergunta "como o sujeito produz sentidos no movimento de ação para um novo conceito matemático, através da linguagem escrita (gramática) e à sua imagem (demonstração)?", busquei subsídios teóricos na filosofia de Kant, que analisa o papel da intuição e da imaginação, na aritmética e na geometria, e na filosofia de Wittgenstein, que analisa os jogos de linguagem e explica como o sujeito segue regras. As teorias desses dois filósofos e de filósofos contemporâneos foram confrontadas com as análises dos relatos dos registros dos alunos em situação de aprendizagem.

Na apropriação teórica das leituras que fiz de Wittgenstein, foi possível compreender que a Matemática ensina a resposta para uma pergunta, como todo jogo de linguagem, com perguntas e respostas. Ela é lógica e se move nas regras da nossa linguagem. Pode-se fazer, inclusive, um estudo antropológico de uma obra matemática, pois ela nos mostra como um determinado povo opera com os signos e que parte da Matemática dominou esse povo. No meu entender, é esse estudo que faz a etnomatemática. Ela mostra como um determinado grupo cultural constrói a sua lógica.

Através das leituras que fiz da discussão acirrada sobre o platonismo por filósofos contemporâneos, compreendi que a Matemática é produto do pensamento humano e que a sua realidade procede geneticamente dos seus conceitos. Alguns filósofos, ao argumentarem em defesa do platonismo, parafraseiam Platão com a formulação: "a realidade matemática é uma realidade que apenas o pensamento pode ver". O sujeito produz a matemática, mas ela é independente, porque se autogera e tem um automovimento previsto. A reta, por exemplo, existe antes de a traçarmos, e a série dos números pares também existe antes de pensarmos nela.

O aluno, ao resolver um problema, segue regras e sabe que o resultado já está previsto. Ele decide o caminho a seguir para encontrar a solução, numa liberdade limitada, porque existe motivo na decisão. Porém, muitas vezes, o aluno não tem uma visão do conjunto de seus atos e, em sua perspectiva, isso é um mistério e uma espécie de magia. É provável que perceba a similaridade na magia das cartas de uma cartomante que prevê o futuro e nas regras matemáticas que têm um resultado previsto. "*Uma operação de cálculo não é uma espécie de cartomancia*?" (tradução minha), pergunta Wittgenstein (1987, p. 87).

A linguagem cria a objetividade, que é constituída por uma rede conceitual, e o sujeito é barrado quando não consegue interagir com o discurso das operações e dos atos. A Matemática é um jogo de signos segundo regras, e o uso dos signos dá sentido à proposição. Seguir a regra é um jogo de linguagem determinado, e joga quem compreende a descrição da regra.

A partir dos meus estudos da filosofia kantiana, compreendi que construímos o objeto matemático através das regras do entendimento. Pierobon (2003), ao comentar essa filosofia, diz que, em Matemática, é preciso ver para pensar, porém adverte que existem perigos provenientes da ilusão desse ato, em que o sujeito pode construir conceitos obedecendo à lógica das aparências. Construir o objeto na intuição é poder vê-lo mais que os olhos são capazes de perceber passivamente. O objeto intuído produz conhecimento quando passa pela imaginação, que elabora esquemas que constituem uma arquitetura de imagens e de idéias. A intuição sem conceito é cega, e construir um conceito, para Kant (1991), é representar, *a priori*, a intuição que lhe corresponde.

Os fenômenos da visão são analisados por Kant nas duas disciplinas: a geometria e a aritmética. A geometria se apresenta em conceitos-imagens, ou seja, conceitos produzidos pelas imagens; ela é essencialmente intuitiva. Na aritmética, por exemplo, podemos "ver" utilizando os dedos da mão, quando nos auxiliam nas operações, um esquema que relaciona a linguagem natural, que compreende a metáfora matemática formalizada. A geometria está associada à imagem e a aritmética, à escrita.

Na aritmética, o objeto de produção e a operação produzida coincidem (é uma construção). A escrita representa o construído e estabelece um esquema com a evidência discursiva que se dá nas fórmulas numéricas. A soma de 5 e 7, em que a unidade de síntese é 12, constitui-se na escrita do número. A produção do número faz desaparecer a enunciação no enunciado.

Na geometria, o objeto e a operação geométrica não coincidem. A figura geométrica é contingente e provisória, pois representa o objeto ideal, é apenas o fenômeno. A imagem representa o dado e estabelece um esquema com a evidência intuitiva que se dá nos axiomas. Construir a figura geométrica, para poder nela pensar, é procurar uma imagem para o conceito e também uma representação. A produção de um triângulo faz desaparecer o enunciado (o triângulo) na enunciação "é o polígono de três lados".

O professor é consciente tanto dos perigos provenientes da ilusão do ato de ver como também de que os conceitos dos objetos percebidos podem ser submetidos à lógica das aparências. Para conciliar esta pluralidade de aparências, ensina geometria plana e, em seguida, geometria espacial. O aluno deve perceber, por exemplo, a diferença entre circunferência, círculo e esfera e conciliar suas respectivas imagens, assim como deve conciliar uma fração com a sua escrita.

Não é possível um enunciado algébrico ser representado na intuição, porque é preciso traduzi-lo para a linguagem quotidiana. O quotidiano, o mundo real, não é imediatamente possível para o universal algébrico. A tradução de uma linguagem para outra apresenta problemas e interfere na aprendizagem do aluno. Esse fato explica o alto índice de reprovação na 6ª e 7ª séries do ensino fundamental, quando os alunos iniciam o estudo da álgebra.

As fórmulas são expressões algébricas que representam regras, e elas precisam ser interpretadas. Seguir uma regra é um interpretar, e a interpretação demanda a leitura e a tradução de seus signos. O "que" fazer obedece à regra; o "como" fazer constitui a demonstração. A demonstração procede segundo uma técnica e produz um novo conceito. A técnica de descrição e de representação de objetos, num jogo de linguagem, se converte em conceitos.

Os objetos são percebidos e representados na imaginação, que é a fonte de criação do sujeito, mas que está submetida à memória. O objeto percebido e imaginado pode não corresponder à realidade. A necessidade conceitual obedece às regras da Matemática, de maneira mecânica, porém repensada pelo aluno, de maneira não mecânica.

A memória do aluno é associativa. Ela auxilia a prever e a agir, em função de experiências passadas. O aluno pode se enganar, quando fornece ao objeto percebido uma imagem de outro objeto percebido no passado.

O objeto sofre as influências dos equívocos provenientes da aparência do objeto percebido com o objeto em si. A imaginação é decisiva e não se engana, todavia depende da memória, que faz analogias do objeto com outros objetos. Ela organiza esses elementos e cria o objeto e o conceito do objeto.

As analogias que o sujeito faz do objeto com outros objetos vistos no passado, podem ser sintáticas ou semânticas. O olho vê que está submetida à memória.

O objeto percebido e imaginado pode não corresponder à realidade. A necessidade conceitual obedece às regras da Matemática, de maneira mecânica, porém repensada pelo aluno, de maneira não mecânica.

A memória do aluno é associativa. Ela auxilia a prever e a agir, em função de experiências passadas. O aluno pode se enganar, quando fornece ao objeto percebido uma imagem de outro objeto percebido no passado. O objeto sofre as influências dos equívocos provenientes da aparência do objeto percebido com o objeto em si. A imaginação é decisiva e não se engana, todavia depende da memória, que faz analogias do objeto com outros objetos. Ela organiza esses elementos e cria o objeto e o conceito do objeto.

As analogias que o sujeito faz do objeto com outros objetos vistos no passado, podem ser sintáticas ou semânticas. O olho vê $\sqrt{3x}$, e a imaginação confunde com $3\sqrt{x}$ o olho lê "a altura do tetraedro", e a imaginação confunde com a altura de um triângulo de uma das faces do tetraedro. Dehaene (1997, p. 179) diz que "*em face da multiplicação 5 x 6, acontece-nos com freqüência respondermos incorretamente 36, que corresponde a 56, como se o 5 e o 6 do problema se infiltrassem na nossa resposta*" (tradução minha). Nosso cérebro, para evitar o cálculo, usa a memória e faz analogias. Para cálculos rápidos, o cérebro evita compreender o que faz.

Em meio às analogias, o aluno descobre e cria conceitos. Os processos interpretativos dependem do contexto em que está inserido o objeto matemático. A construção do conceito do objeto é temporária, pois o conceito está sempre em estado de devir, já que ele não é acabado. Para Wittgenstein (1987), proporcionar um novo conceito só pode significar, introduzir um novo uso conceitual, uma nova práxis.

O sentido projetado no objeto depende do contexto em que o objeto está inserido, e o conceito do objeto é a regra interpretada nesse contexto. A regra aplicada em diferentes modelos matemáticos e ensinada aos alunos não garante a aprendizagem da regra, pois entre a regra e a sua aplicação existe um abismo.

Uma regra aplicada num contexto não se transpõe mecanicamente para outro contexto. A regra está sempre se atualizando, no sentido de que o sujeito interpreta o objeto de acordo com o seu campo de visão. O alto índice de reprovação dos alunos na disciplina Cálculo Diferencial e Integral comprova esse fato. As regras de derivação e integração de funções, para o professor, parecem ser imediatas; para o aluno, não são imediatas, porque na aplicação de cada regra o aluno se defronta com a contingência e o imprevisto.

A decisão na escolha da regra a ser aplicada sofre perturbações das aparências sintáticas. A regra, que é mecânica e com um sentido único, sofre as interferências da subjetividade que produz outros sentidos.

É, portanto, durante a aplicação da regra que o sujeito produz sentidos e constrói conceitos. A necessidade matemática forma conceitos que são construídos, e é por esse motivo que, para Caveing (2004), o sujeito apenas experimenta o conceito, forjando uma rede conceitual.

Para Wittgenstein(1987), é uma ilusão acreditar que podemos produzir a significação no espírito de alguém por meios indiretos, ou seja, através de regras e de exemplos. Como o professor dispõe apenas das regras e dos exemplos, a solução é fazer o aluno usar a regra através de exercícios, pois é no uso que projeta sentido.

A Matemática não existe sem o matemático, assim como o conceito do objeto não existe sem a intervenção da subjetividade. O confronto entre a subjetividade do aluno e o movimento próprio da Matemática estabelece o paradoxo entre as suas lógicas. A ilação, ao passar de "se" para "então" na lógica da Matemática, é imediata; na lógica do aluno existe um abismo que deve se fechar com a compreensão.

A projeção de sentidos em cada ato do aluno, durante a aplicação da regra, estabelece uma circularidade no contexto. Com a mudança do contexto, os sentidos mudam, a regra passa a ser interpretada de forma diferente, e o conceito do objeto também muda.

A regra prevê o acordo, como também o desacordo. Wittgenstein (1987) diz que, se a regra não nos obriga, é porque não seguimos regra alguma. Existem alunos que obedecem à regra, como também existem aqueles que a transgridem. A transgressão de regra na Matemática leva o aluno ao erro e, conseqüentemente, à exclusão da escola.

A regra não é privada, mas a sua interpretação é subjetiva. Seguindo uma regra, o aluno se coloca num condicionamento lógico matemático, mas com sentidos privados. Para estar em acordo com a regra, o aluno necessita de sua clarificação. A linguagem em que se apresenta a regra precisa ser compreendida.

Pierobon (2003), ao mostrar que a filosofia de Kant se aplica à aritmética e à geometria, denuncia que a álgebra representa um obstáculo epistemológico, porque é uma escrita emancipada da intuição. Wittgenstein diz que o conceito é uma regra interpretada. As idéias: da escrita emancipada da intuição e da regra interpretada apontam para a interpretação da liguagemo dalinguagem matemática e os problemas advindos dela. O sistema de símbolos é importante, mas não cada símbolo individualmente. Ver para pensar, em Matemática, não supõe apenas ver o objeto com os olhos, porém saber também imaginá-lo. O processo de abstração que acontece, na ausência do objeto, se dá na leitura

A pesquisa de Sarrazy (1997) comprova que as regras matemáticas não se atualizam independentemente dos contextos de resolução, porque, em cada contexto, a regra é diferente, na perspectiva do aluno. Muda o contexto, muda o sentido, e muda o conceito. Uma regra aplicada num contexto não é a mesma em outro contexto. Uma regra interpretada no quotidiano não tem o mesmo sentido quando formalizada em sala de aula.

O conceito é ressignificado em cada contexto, porque é envolvido em redes conceituais diferentes. As analogias feitas num contexto não são as mesmas em outro contexto, pois a percepção e a imaginação do objeto são diferentes.

Granger (1990, p. 265) diz que, para Wittgenstein, "*eu aprendo a descrever o que vejo; e aí eu aprendo todos os jogos de linguagem possíveis*" (tradução minha). Em cada situação, o aluno vê o objeto de uma forma e, em cada uma dessas visões, o jogo de linguagem é diferente. O jogo de linguagem que envolve o cálculo de um troco no quotidiano, é diferente do jogo de linguagem que envolve um problema escrito em linguagem matemática, como também é diferente do jogo de linguagem que envolve uma operação formalizada.

O ERRO DO ALUNO COMO TRANSFORMAÇÃO DO CONCEITO MATEMÁTICO

É mais fácil analisar a construção de um conceito pelo aluno quando ele faz uma falta ou comete um erro, porque aparecem as diferentes interpretações que ele faz de um objeto e as confusões com os símbolos análogos de um texto escrito em linguagem matemática. Em um cálculo correto, é difícil observar as modificações de um conceito, porque, se o aluno aplica a regra de forma justa e segue o rigor de uma demonstração, muitas vezes ele não modifica nada que possamos perceber em seus registros.

Para Wittgenstein (1987), o sujeito não segue a regra de forma justa porque ele não tem a intuição do sentido da regra. Quando damos instruções a alguém, nós não podemos prever tudo o que pode acontecer na aplicação de uma regra. Existe uma diferença entre crer que nós estamos seguindo a regra e seguir de fato a regra.

Como a epistemologia repousa sobre a verdade, a comunidade escolar não aceita a transgressão da regra, assim a escola quer ter um controle da verdade. O erro da intuição aparece na discursividade; assim, a linguagem mostra quando não intuímos corretamente o sentido da regra. O erro também tem a ver com a memória, pois podemos esquecer o sentido de uma regra.

O sentido originário grego do ensinar e aprender já contém o termo "matemática".

> *A linguagem grega é a passagem obrigatória de todos os caminhos do saber e da cultura ocidental. Como chamavam os gregos o movimento de ensinar e aprender? Chamavam com um só radical: mantháno. Assim, máthesis é o ensino e a aprendizagem, tanto no sentido do que é aprendido e ensinado, como no sentido do processo de ensinar e aprender. Mathémata, o que pode ser ensinado e ao que pode ser aprendido; e mathesés, o aluno, aquele que ensina aprendendo; o professor, aquele que aprende ensinando (...) Para aprender, não podemos receber tudo, mas devemos, de certo modo, trazer alguma coisa conosco para o encontro. Os gregos chamavam esta dinâmica, do que pode ser aprendido e do que pode ser ensinado, de máthema, donde provêm os termos ocidentais de matemático e matemática* (LEÃO, 1977, p. 46).

Para Leão (1977), ao reconhecermos o sistema dos números naturais, "*não fazemos senão tomar conhecimento de algo que, de alguma maneira, já temos*", referindo-se à contagem. Dessa forma, "*o número é algo que pode ser ensinado e aprendido, é um máthema*". Seguindo suas reflexões, pergunta: "*Onde nos perdemos para virmos a errar pelo matemático? Nós nos perdemos na manobra do Pensamento, que por obra da mão da Linguagem nos encaminha no caminho de aprender e ensinar. Só entrando no jogo da Linguagem é que encontramos um princípio de unidade realmente integrador das dimensões e níveis de aprender e ensinar* (p. 50)".

Erramos quando não intuímos corretamente o objeto e, dessa forma, também não construímos o conceito correto desse objeto. Não intuímos o sentido correto da regra que supõe o seu conceito. Esse erro aparece na discursividade, e é nela que também podemos aprender o sentido correto da regra.

Os intuicionistas Brouwer e Leão têm uma visão diferenciada da Matemática no que se refere à dependência da linguagem para a sua atividade. Porém concordam no sentido de que a Matemática constrói conceitos a partir de algo que já tem uma representação. Dehaene (1997) também está de acordo com o fato de trazermos conosco capacidades de fazer operações elementares.

Para melhor compreender o erro em matemática, foram analisados três livros que discutem esse tema. Eles mostram diferentes tipos de erros dos alunos e dos matemáticos. O livro de Barry Cipra (1985) discute o erro do aluno no Cálculo Diferencial e Integral e trata de mostrar ao leitor como encontrá-lo antes do professor. Os erros que o autor refere parecem ser, em sua maioria, erros decorrentes da falta de atenção do aluno ou de engano.

Cipra (p. 100) escolheu seis categorias de erros comuns: 1) a ausência dos sinais menos ; 2) o desaparecimento dos parênteses ; 3) a perda dos coeficientes ; 4) acidentes que acontecem aos expositores ; 5) a inversão fracionária; 6) os cálculos descontrolados.

Como exemplo de um erro do aluno, o autor coloca: "$\frac{d}{dx}(x^4+5x^3-x+1)=4x^3+3x^2-1$". O exemplo mostra que o aluno sabe derivar, mas, ao derivar o segundo termo do polinômio, ele provavelmente se engana ou se esquece de multiplicar o expoente 3 pelo coeficiente 5. Mesmo que ele não saiba que deveria efetuar tal multiplicação, é possível que reconheça o erro ao comparar com a resposta correta.

Nesse outro exemplo "$\int \frac{1}{300} t^3 dt = \frac{1}{75} t^4 + c$", o autor faz a observação: "*isto se produz sobre tudo no momento em que você começa a aprender a integrar. Você está habituado a diferenciar - onde nós o multiplicamos- de forma que você continua sobre seu propósito*" (tradução minha). Talvez o aluno cometa esse tipo de erro por não saber fazer a distinção entre a derivação e a integração de funções, ou então por não saber operar corretamente com frações.

Para os cálculos "descontrolados" citados pelo autor, trago alguns exemplos de minha prática em sala de aula. Certa vez, disse em sala de aula aos alunos que deveriam ler com atenção os enunciados dos problemas que são solicitados nas avaliações, pois perdiam tempo respondendo a questões que não seriam avaliadas. Um aluno argumentou que isso ocorre quando ele não sabe o que responder: "faz tudo" o que sabe sobre aquele determinado conteúdo que está sendo avaliado.

Esse exemplo mostra como o aluno se perde nos campos conceituais da disciplina e explica os sentidos que não consegue perceber nos enunciados matemáticos. Como não consegue interpretar o que está sendo solicitado, "faz tudo" o que sabe. Isso lhe garante que, dentro dessa "grande" resposta, o que está sendo perguntado será respondido.

Um aluno de ensino superior tinha em seu caderno $2x^2 = 2.2.x$, mostrando que ele se perde com o simbolismo, pois derivou a função $f(x) = 2x^2$ e encontrou $f'(x) = 4x$; como ele não tem bem claro o significado desses símbolos, não os utiliza de forma devida e assim, iguala a função à sua derivada. Após ter derivado corretamente a função $f(x) = x^2 - 3x$ e encontrado $f'(x) = 2x - 3$, outro aluno conclui que 2x – 3 = 0 e que $x = \frac{3}{2}$. Nesse caso, tem em sua memória a regra de resolução de uma equação do primeiro grau. Como ele deriva a função $f(x) = x^2 - 3x$ e encontra uma função de primeiro grau, segue o propósito de resolvê-la justamente porque esse procedimento está em sua memória.

O livro que trata da inquietação de exatidão e dos escrúpulos dos matemáticos, escrito por F. Rostand (1960), mostra como o matemático, guiado pela intuição e pela memória, comete faltas e erros. Os erros cometidos por matemáticos são análogos aos erros cometidos por qualquer estudante. Nesse sentido, trata-se de um livro que pode contribuir para uma pesquisa dos erros dos alunos.

Para Rostand, o sentido que o matemático confere a uma expressão matemática pode modificar o sentido da expressão. Comenta que, de acordo com Poincaré, estamos expostos ao erro quando trocamos uma proposição por uma proposição um pouco diferente e lhe atribuímos um outro sentido. Rostand acrescenta que também estamos expostos ao erro quando "*esquecemos o sentido de uma regra*" (tradução minha) (p. 10).

"A proposição um pouco diferente", como no caso y = x + a e $y = |x + a|$, para um matemático, é diferente, mas, para o aluno, é um "pouco" diferente, e é por isso que, às vezes, o aluno constrói seu conceito de função modular com os julgamentos da função do primeiro grau, pois elas são aparentemente iguais.

O aluno também "esquece o sentido de uma regra". Ao se deparar com uma função do segundo grau, mecanicamente aplica a regra que resolve uma equação do segundo grau, mesmo que para resolver a questão não seja necessário encontrar as raízes da equação. A memória interfere diretamente na construção de conceitos, porque o aluno tem o hábito de construir seu conceito de acordo com sua memória e com os conceitos que ele aprendeu num outro tempo.

Para Rostand (1960, p.18), "*numa perspectiva da história refeita, nós definiríamos então a falta "lógica", que "poderia" chegar ao erro; falta definível enquanto relação de um texto correto e de um texto incorreto. Mas nós podemos considerar também a falta psicológica, a operação intelectual defeituosa, que encaminhou ao erro ou que teria podido encaminhar: lapsos, falta de memória, negligência...*" (tradução minha).

Os lapsos e negligências são realmente considerados como erros, mas nem sempre têm sua origem em uma má compreensão do aluno. Um erro pode ser uma negligência daquele que calcula. Quando o sujeito reconhece o erro, ele renuncia e corrige. É diferente da persistência da ilusão de ter aplicado corretamente a regra, na qual o sujeito acredita que seu raciocínio está correto e não percebe o erro. O sujeito, ao acreditar que está seguindo corretamente a regra, constrói um conceito que não segue as exigências da Matemática.

O problema que nasce com as confusões e cálculos descontrolados citados por Cipra (1985), acontece quando o aluno se perde nos cálculos, principalmente nos cálculos algébricos. O aluno faz o primeiro cálculo, deste primeiro cálculo surge outro cálculo, e assim sucessivamente. Nesse ínterim, o aluno parece esquecer a pergunta inicial e se perde no emaranhado de cálculos do seu rascunho, como nos exemplos citados anteriormente, nos quais um aluno igualou a função à sua derivada, e um outro calculou a raiz da derivada da função.

Rostand (1960, p. 35) diz que, nesse caso, o matemático "*não descreverá mais necessariamente sua intuição primeira; ele descreverá melhor estas provas sem ter atenção à primeira intuição que ele teve*" (tradução minha). Sobre os escrúpulos dos matemáticos, diz: " *M. Degen (...) escreve ele a Hermite, e embora eu veja bem que nós não podemos nada criticar em seu novo raciocínio, eu não percebi ainda em qual ponto antigo falhara (…) nos casos favoráveis, o matemático consegue provar escrúpulos novos e renovar sua maneira de ver a demonstração*" (tradução minha) (p. 150).

Os escrúpulos novos dos quais fala o autor são outras interpretações, outras maneiras de ver o antigo escrúpulo. É uma forma de melhorar a compreensão do conceito; assim, nós não podemos dizer que o matemático constrói novos conceitos com seus novos escrúpulos?

Para Rostand (1960, p. 151), "*o escrúpulo que nasce ao contato da demonstração errada reintroduzirá a subjetividade das estimativas na objetividade do erro*" (tradução minha), "*pois o escrúpulo é subjetivo; é pela subjetividade que Kant define o escrúpulo : "Uma razão oposta a uma outra, mas que tem apenas um valor puramente subjetivo, é um escrúpulo (…). No escrúpulo, nós não sabemos se o obstáculo à crença tem um fundamento objetivo ou puramente subjetivo (…)". Seria conveniente, então, procurar "a razão da dúvida", de "dissipar" o escrúpulo, seja abrindo, seja discernindo um ponto errado na demonstração*" (tradução minha) (p 111).

A subjetividade é pessoal, ela é do sujeito e é uma interpretação que o sujeito dá a um conceito. Assim, a interpretação que ele dá a um conceito pode ser chamada de seu conceito, e "*o material matemático se afina pela elaboração de conceitos novos que permitem evitar o golpe contra certas classes de erro*" (tradução minha) (p. 154). "*Sem ela, não há lei, a matemática torna-se uma tarefa 'de experiência' pessoal*" (tradução minha) (p. 196).

Se a matemática torna-se uma tarefa de experiência pessoal, nós podemos dizer que os conceitos matemáticos também têm uma interpretação subjetiva. Existe o conceito escrito com o rigor da linguagem matemática, mas o sujeito faz sua interpretação e constrói seu conceito com a sua linguagem.

Sobre a linguagem, Rostand (p. 197) diz: "*Se Houel e Darboux não se entendem, é porque eles não falam sempre a mesma linguagem (…). Conforme o tipo de espírito deles, os matemáticos são mais ou menos sensíveis a tal ou tal forma de argumentos*" (tradução minha).

Eles não falam a mesma linguagem porque têm interpretações diferentes de uma mesma proposição. Assim, a interpretação de uma proposição matemática é também individual. Uma proposição envolve conceitos que são objetivos, pois obedece às exigências lógicas e estruturais da matemática. Porém uma proposição, mesmo envolvendo conceitos objetivados pelo rigor da matemática, é suscetível de uma leitura subjetiva. Um problema de geometria espacial, para ser resolvido, pode ter diversos caminhos de resolução, e isso se deve a leituras e interpretações diferentes do mesmo enunciado.

Na obra de Samuel Johsua e Jean J. Dupin, os autores fazem uma análise da didática das ciências e matemáticas, escrevem "*os trabalhos de pesquisa em didática das ciências e das matemáticas*" e mostram que "*os alunos são de fato conduzidos a cometer erros de maneira repetida. Mas o termo erro pode ser engano (…) de fato, as concepções e modos de raciocínio aparecem, ao contrário, como relativamente organizados e dotados de uma lógica própria e aptos a ganhar ainda em coerência interna, tudo restando distante dos modelos canônicos*" (tradução minha) (1993, p. 121).

Se os erros são organizados e dotados de uma lógica própria, nós não podemos dizer que seja uma negligência do aluno, e sim que sua interpretação não coincide com o conceito apresentado por seu professor. Ele compreendeu mal porque construiu seus conceitos com uma interpretação diferente das exigências e do rigor da matemática. A coerência interna existente nos erros dos alunos apresenta uma lógica própria, contrária à lógica matemática.

Se não existe pensamento ilógico, por conseqüência não existe erro sem uma lógica. O erro aqui considerado é a demonstração de um raciocínio não aceito, ou seja, um juízo falso e que não pode ser confundido com o engano. Errando, o sujeito tem a ilusão de que está correto, mesmo após uma releitura do texto matemático no qual figura o erro; diferente do engano, que pode ser corrigido pelo sujeito. No erro, a ilusão do juízo correto persiste; no engano, a ilusão se desfaz.

Para dar exemplos de trabalhos sobre as concepções dos alunos, os autores Samuel Johsua e Jean J. Dupin mostram uma pesquisa com o tema 'diferenciais', um exemplo de cooperação entre as disciplinas Matemática e Física. O relato dos resultados aponta: "*nos problemas correntemente propostos aos estudantes, estes* (os estudantes) *não precisam de tais considerações conceituais. Eles utilizam algumas marcas lingüísticas como "elementares", "muito pequenas em comparação com as tais marcas", e as conectam com os procedimentos, então os fundamentos conceituais são perdidos de vista*" (tradução minha) (p. 136).

Se "os fundamentos conceituais são perdidos de vista", é porque os alunos constroem seus conceitos com suas palavras, por isso mesmo "utilizam algumas marcas lingüísticas". Essas marcas são "muito pequenas em comparação com" porque o aluno tem o hábito de reduzir o antigo conceito (o conceito dado pelo professor) com as palavras que estão no seu vocabulário.

De forma similar, Rostand (1960, p. 163), ao falar do hábito do matemático de economizar, diz: "*Assim, o calculador se dá sistematicamente a tarefa mais fácil, escolhendo as operações que exigiram dele o menor controle e o menor esforço de memória*" (tradução minha).

Stella Baruk (1985, p. 203), de forma similar, fala do problema dos alunos com as definições matemáticas. Ela menciona o testemunho de alguns alunos entrevistados por uma revista. Nessa entrevista, um aluno diz: "*nós não a sabemos e nós podemos muito bem saber o exercício sem saber a definição*"; ao responder à questão "*como tu os* (exercícios) *fazes*?", outro diz : "*nós nos arranjamos, nós nos lembramos como ele* (o professor) *nos explicou*"; um terceiro aluno completa, dizendo: "*se tem uma palavra que está mal colocada na definição ou que nós esquecemos, mesmo se é um x ou um N, nós temos 30 vezes que copiá-la*" (tradução minha).

"Uma palavra que está mal colocada" refere-se ao rigor de seguir uma definição matemática que não admite equívocos e que o aluno reconhece. "30 vezes que copiá-la" é o castigo pelo erro cometido.

"A definição que nós esquecemos" ou "nós nos lembramos" referem-se à necessidade e importância da memória do sujeito para fazer conexão entre os símbolos e conceitos envolvidos numa definição matemática.

"Nós nos arranjamos, nós nos lembramos como ele nos explicou" fazem referência aos procedimentos técnicos que sintetizam o algoritmo para se resolver um cálculo. O algoritmo é útil para o aluno porque se apresenta como uma redução de um conceito. O aluno, muitas vezes, não se pergunta o que se calcula e, sim, como se calcula.

Qual o significado do fato de o aluno não saber, por exemplo, a definição de uma equação do segundo grau e saber encontrar suas raízes? De forma implícita, ele sabe a definição, porém ele sabe com suas palavras. Ou seja, ele pode não saber a definição, de forma que obedeça ao rigor da linguagem matemática, mas ele sabe com outra linguagem, a sua linguagem. Saber aplicar o algoritmo que encontra as raízes de uma equação do segundo grau é saber identificar uma equação do segundo grau.

No mesmo livro, a autora descreve um erro de um aluno; ao responder ao pedido do domínio da função "$f : \Re \to \Re$ e $x \to f(x) = x - 3$"; e diz: "*Obtive um dia esta pérola :* $D(f) = \Re - \{1\}$. (...) *O 'raciocínio' é, então, o seguinte : x – 3 é como x – 3 sobre 1? Sim,* $x - 3 = \dfrac{x-3}{1}$. *Então, como não é preciso que o denominador se anule, 1 deve ser excluído do domínio da definição* (...) *1 não deve ser nulo*" (tradução minha) (p. 19).

Parece que esse exemplo trata de uma construção de um conceito pelo aluno, porque ele faz sua regra do domínio de funções reais. Ele cria uma regra para si com uma "lógica própria". Essa lógica não coincide com as exigências conceituais e, por esse motivo, Baruk salienta que o raciocínio do aluno é uma "pérola".

Deve-se estabelecer a diferença entre falta de atenção para realizar um cálculo e falta de memória para definir a regra que se deve aplicar. É preciso estar atento para o fato de que o aluno pode não saber porque não estuda; ou estuda, mas não compreende, ou, ainda, pensa que compreendeu, mas constrói o conceito de forma incorreta.

Para Rostand (1960, p. 64),

> *por conseqüência, uma impropriedade, um absurdo, uma re-negação, uma generalização abusiva, uma omissão, uma substituição de um caso por um outro caso, análogo mas não idêntico, podem ser dados a um lapso, a uma confusão, a uma negligência; uma alteração será dada a um lapso, a uma confusão, a um esquecimento, a uma negligência; uma falta de verificação, uma falta de contra-exemplo, provém de uma confusão, de uma falta de idéia, de um esquecimento, de uma negligência; ...De alhures toda "falta"*

psicológica não origina um erro (tradução minha).

Penso que o autor pretende dizer que essas 'faltas psicológicas' que um matemático comete não originam em erro, porque esses 'erros' podem ser corrigidos no momento em que o matemático corrigir a si mesmo, como se fosse um estrangeiro no seu trabalho intelectual. É bem provável que o matemático reconheça seu erro quando corrigir seu próprio trabalho, como se estivesse corrigindo o trabalho de um outro.

O erro do aluno nos possibilita perceber de forma mais clara as modificações de um conceito. Mas não é todo erro que mostra a construção de um novo conceito. Ainda que o erro analisado seja reconhecido pelo aluno, esse erro pode ser uma negligência ou um lapso. Se o aluno não reconhece o erro como erro, ele tem a ilusão de que está certo. A compreensão que o aluno faz do conceito dado pelo professor pode ser um outro conceito surgido da sua interpretação.

Ao se deparar com o objeto matemático, o conceito do objeto sofre intervenção da imaginação e da memória. Esses julgamentos virtuais do objeto têm necessidade de uma formalização. Existe uma ruptura com a intuição, o aluno abandona o conceito antigo, e sua intenção de determinar um novo conceito com suas palavras faz com que crie uma nova regra, um novo conceito.

A construção do conceito pelo aluno acontece num movimento dialético com sua intuição[1], porque a intuição pode surgir do conceito, e do conceito pode surgir a intuição. "*A intuição intelectual de um entendimento conhece o que cria e cria o que conhece*" (tradução minha) (PIEROBON,2003, p. 208).
É no movimento entre o objeto matemático e o seu conceito que surge uma rede de intenções do sujeito-aluno. A compreensão prévia do objeto permite que o sujeito o interprete, projete sentidos na interpretação e construa seu conceito na compreensão do objeto.

Existe uma circularidade entre o conceito e o ato de interpretação. Essa circularidade não é estática, porque o conceito produz um ato e esse ato retorna ao conceito. O conceito é aperfeiçoado, na perspectiva do aluno, porém esse novo conceito, que é transformado em cada ato de interpretação do aluno, pode ter um erro lógico produzido pela sensibilidade. Esse novo conceito produz outro ato, pois a circularidade se interrompe quando seu conceito é construído.

É um movimento autônomo e imprevisível. Reconstruir o conceito dado é criar através de atos limitados na liberd, ou seja, a liberdade criativa do aluno é articulada à necessidade conceitual da matemática.

Essa circularidade define a construção de uma outra linguagem que o aluno faz do conceito recebido em linguagem formalizada e da linguagem do professor. O aluno interpreta as duas linguagens e constrói seu conceito. Nesse ato de interpretação, ele projeta outros sentidos e re-interpreta através de uma sucessão de atos. O conceito vai se transformando pouco a pouco. Os atos que são limitados na liberdade conceitual também estão inseridos num domínio de conexões da memória do aluno. A experiência do sujeito com o objeto matemático é propiciada pelas sensações e articulada com a memória. Quando o aluno formaliza aquilo que conhece do objeto, ocorre a perda da intuição[2], porque a imaginação perde sua liberdade. Colocar um conteúdo na forma escrita é objetivar o subjetivo.

Através da linguagem matemática nós podemos identificar onde se opera o conhecimento matemático, então é nela que nós podemos observar a construção de um novo conceito. O ato da construção do conceito manifesta a intenção do sujeito enquanto sujeito que interpreta. A intenção nasce do domínio das conexões do conceito e daquilo que está na memória do sujeito-aluno.

O exemplo dado por Stella Baruk, do aluno que escreveu como resposta $\mathfrak{R} - \{1\}$ para o domínio da função $y = x - 3$, mostra que ele construiu uma regra incorreta. A regra que ele construiu é $\mathfrak{R}$ − {denominador} e seria melhor $\mathfrak{R}$ − {raiz do denominador}, para garantir que o denominador não seja nulo.

Uma demonstração não resulta do conceito, e sim da construção de conceitos, ou seja, da conexão que o sujeito faz do conceito com outros conceitos. O aluno do exemplo citado acima talvez tenha percebido que, para a função $y = \dfrac{x+2}{x}$, x deve ser diferente de zero; para a função $y = \dfrac{2x+5}{3x}$, 3x deve ser diferente de zero e, conseqüentemente, x deve também ser diferente de zero. Assim, para ele, na função y = x − 3, que também pode ser pensada como

[1] "*A dialética tem penetrado nosso espírito que dirige nossa imaginação intuitiva, isto é, ela influencia na maneira como nós representamos intuitivamente certos gêneros de objetos. Assim, as intenções conceituais da dialética se encontram, de alguma forma, intuitivamente realizadas pelas interpretações espontâneas. Isso torna claro igualmente o fato de que a intuição pode surgir dos conceitos*" (tradução minha) (BERNAYS, 2003, p. 107).
[2] Para Pierobon (2003, p. 206), "*a razão pura e prática não tem articulação direta com a intuição*" (tradução minha).

$y = \frac{x-3}{1}$, este um deve ser diferente de zero. Podemos perceber que, mesmo que a regra não seja correta, existe uma lógica na construção dessa regra construída pelo aluno.

Quando a aluna faz a operação $\frac{3}{5} \text{x} \frac{5}{3} - 1$ e a iguala a - 1, também mostra a sua lógica própria e o conceito que ela reconstruiu. "Nada" menos um é igual a - 1. Ela faz a tradução do que se mostra, do que aparece e do que desaparece. A tradução do que é visto se transforma no algoritmo: 3 simplifica com 3, 5 simplifica com 5 e sobra "um nada".

Ao calcular $\frac{3}{5} \text{x} \frac{5}{3} - 1$, a aluna não escreve 0 – 1 = - 1 na resposta, mas fica implícita a presença do zero. Ela transforma o conceito de multiplicação de frações por problemas relacionados com a ilusão do que foi visto. Reconhece a igualdade $\frac{3}{5} \text{x} \frac{5}{3} = \frac{3 \text{x} 5}{5 \text{x} 3}$ e é provável que ela aplique de forma isolada e correta o conceito $\frac{3}{5} \text{x} \frac{5}{3} = 1$. Porém, ao se deparar com o conceito $\frac{3}{5} \text{x} \frac{5}{3} - 1$, ela transforma o conceito $\frac{3}{5} \text{x} \frac{5}{3}$ em "um nada", já que ele se encontra em outro contexto.

O ato de resolver a multiplicação $\frac{3}{5} \text{x} \frac{5}{3}$ e diminuir de 1 segue a regra das operações com frações. Mas, durante a aplicação dessa regra, a aluna engendra outra regra (regra no contexto). Quando lhe perguntei quanto é a multiplicação de $\frac{3}{5}$ por $\frac{5}{3}$?, ela respondeu de imediato:"é verdade, $\frac{3}{5} \text{x} \frac{5}{3}$ - 1 não é - 1, é 0".

As regras estão sempre num estado de devir, pois dependem do contexto. A multiplicação de $\frac{3}{5}$ e $\frac{5}{3}$, que é igual a 1, num outro contexto, para a aluna, é igual a 0, mas, no momento em que reflete sobre a minha pergunta, se recorda de que o resultado dessa multiplicação é 1 e não 0. Na perspectiva do aluno, muda o contexto, muda o conceito.

Na álgebra, desencadeiam-se muitos problemas de aprendizagem do aluno. Existe um campo imenso para o aluno inventar regras que não estão de acordo com o campo conceitual. Para o aluno, existe uma conexão entre matemática e magia. Como mencionou Baruk, a magia de a expressão $\frac{a+c}{a+b}$ ser igualada à expressão $\frac{c}{b}$. O aluno não sabe o que é 'a', 'b' e 'c' e talvez essas incógnitas não tenham sentido. Ele simplifica o 'a' do numerador com o 'a' do denominador, o que, em outro tempo, fazia na multiplicação de frações.

Mesmo na aritmética, em que existe uma forma mais simples de intuir o objeto, nós encontramos problemas de interpretação, como, por exemplo, a fração $\frac{1}{2}$ ser igualada a dois, ou no caso de a soma $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ ser igualada a $\frac{2}{5}$. Como existem regras para encontrar as imagens das incógnitas que o aluno não compreende, ele interpreta essas regras com um significado de magia justamente porque não consegue fazer a abstração da significação dos símbolos lógicos para representar mentalmente os objetos.

O problema do sentido que o aluno atribui às letras na álgebra é bastante complexo. O sentido pode se dar num tempo posterior, mas também pode se perder. O aluno pode, com o tempo, dar sentido após estabelecer semelhanças, como também pode confundir o que aprendeu no passado e o que tenta aprender no presente.

Ao estudar as operações algébricas, o aluno pode resolver mecanicamente a expressão $(a+b)^2$ e encontrar $a^2 + 2ab + b^2$ através de uma regra, mas ele pode constatar que $(a+b)^2$ = (a + b) (a + b), podendo inclusive perceber geometricamente esse produto. Mas, em um outro tempo, a expressão $(a+b)^2$ pode ser abreviada erroneamente pela expressão $a^2 + b^2$, porque ela não faz mais sentido para ele.

Existe aluno que, mesmo depois de já ter experienciado o conceito de limite de uma função e também ter lidado com grandes cifras, ao calcular o $\lim_{x \to \infty} \frac{x-1}{x^2-1}$ e encontrar

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \to \infty} \frac{x-1}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \to \infty} (x+1) = \infty,$$

erra durante o processo de sua resolução.

É provável que esse aluno admita que $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ e que, ao estudar a simplificação de frações algébricas, também admita que $\frac{x-1}{x^2-1} = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x+1}$;

entretanto, no momento em que está lidando com o conceito de limite de uma função, esses outros conceitos parecem ser abandonados.

O $\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^2-1}$ é calculado como $\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+1}=0$. O aluno deveria lançar mão do conceito de simplificação de frações algébricas que estudou provavelmente na 7ª. série do ensino fundamental e que justifica o fato de "dever" saber que $\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{x+1}$. Na 4ª. série do ensino fundamental, é possível que tenha estudado a simplificação de frações durante seus estudos de aritmética, justificando o fato de "dever" saber que, por exemplo, $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

Esse aluno não está mais na 4ª. série, nem na 7ª. série do ensino fundamental, ele está em outro tempo, em outro lugar. Nesse novo contexto, os jogos de linguagem também não são os mesmos. A ordem não é mais "simplifique as frações abaixo" ou "simplifique as seguintes expressões algébricas", e sim "calcule os limites das seguintes funções". Novo contexto, novos jogos de linguagem e novos conceitos. A rede conceitual pode se ampliar e trazer sucesso, ou então se emaranhar de tal forma que o sujeito aprendente torna-se um fracassado.

Após derivarem uma função e, por exemplo, encontrarem f'(x) $=2x^2+2x+4$, alguns alunos dividem por dois apenas o lado direito da igualdade (f'(x) $=x^2+x+2$). O motivo dessa divisão não seria, para eles, o mesmo quando se costuma dividir $2x^2+2x+4=0$ também por dois com a intenção de simplificar a equação? O motivo que justifica que na equação é conveniente dividir por dois e na função quadrática, não, é um novo conceito.

O aluno, não raras vezes, não se dá conta de que uma proposição matemática, após uma transformação lógica, não muda de sentido. Para ele, após a transformação lógica, a proposição está em outro contexto e, conseqüentemente, será outra com outros conceitos.

A demonstração da resposta desse aluno representa uma nova imagem, já que não consegue ver similaridade entre o que antes "podia fazer" e o que agora "não sabia que não podia fazer". É no movimento entre os conceitos que o aluno perde o rumo e "não sabe mais o que fazer".

Após derivarem uma função, alguns alunos acrescentam ao resultado a constante de integração. Eles misturam derivação e integração de funções porque são conceitos que não estão claros em suas mentes. Diferentemente do aluno que alarga seu conceito de uma constante de integração, ao fazer um desenho de três ou quatro parábolas do tipo $y=ax^2+c$ num mesmo eixo, para exemplificar a constante da integral da função y = x.

Thirion (1999) diz que Georges Canguilhem salienta que o momento no qual um conceito muda de sentido é quando ganha um sentido maior. Porém, quando esse sentido não corresponde às necessidades da matemática, o conceito sofre prejuízo e o aluno, também.

O erro do aluno é ilógico para as concepções da lógica matemática, mas apresenta uma lógica própria, porque não existe pensamento ilógico, como também não existe linguagem ilógica. A regra é pública, entretanto o sentido dado a ela é privado. O aluno projeta sentido na regra, interpreta-a e a compreende de acordo com as suas sensações.

Considerando o desenvolvimento teórico utilizado para compreender o objeto de estudo, é possível indicar alguns elementos no processo de construção do conceito matemático pelo aluno e suas ressignificações. O aspecto metodológico mostrou que a regra matemática tem um sentido único e previsto, mas a linguagem natural, como fonte de produção de sentidos, é polissêmica. Nesse sentido, é possível apontar uma alternativa que auxilie o aluno a ressignificar o conceito de acordo com o contexto em que o objeto está inserido, porém que não entre em contradição com as verdades matemáticas.

O aluno constrói o conceito matemático de acordo com a sua imaginação e a sua memória, porém, com a mudança de contexto, o aluno projeta novos sentidos, e o conceito é reinterpretado. O contexto não pode ser fixado, e a regra matemática não se atualiza automaticamente. Sugiro, então, que se deva continuar pesquisando na busca de soluções para os problemas na aprendizagem do aluno. Do resultado de minhas leituras e da minha prática docente, reconheço como solução a tradução dos símbolos matemáticos pelo professor, pois, para o aluno, aqueles são frios e sem sentido. Porém, o professor não pode ser apenas um tradutor da linguagem matemática para a linguagem natural. Ele deve ensinar o aluno a ler nessa língua. Na leitura minuciosa do texto, os não-ditos podem ser revelados. Ao perceber os resíduos de um texto em linguagem matemática, o aluno compreende e projeta sentidos na leitura.

O professor não tem o controle da imaginação do aluno e de suas analogias, mas pode ter o controle do jogo de linguagem estabelecido em sala de aula.

O aluno do poema de Prévert (2003), que sonhava acordado com os passarinhos enquanto o mestre ensinava que 2 e 2 são 4, que 4 e 4 são 8, não dialogava com o mestre. Diferentemente dos alunos participativos, na obra Provas e Refutações de Lakatos (1994), que estavam imersos em um jogo de linguagem.

O diálogo pressupõe o acordo e, no acordo, compreendemos as regras do jogo. Capturar a atenção do aluno nos jogos de linguagem, em sala de aula, pressupõe a sua participação. Apostando no diálogo, o professor escuta o aluno e compreende seus erros, como também sua lógica. Com o auxílio do professor, o engano num cálculo pode ser corrigido pelo próprio aluno. Porém, caso o aluno não perceba o erro e persista na ilusão de que o seu raciocínio está correto, o professor pode, através do diálogo, levar o aluno a reconhecer que a sua lógica é refutada pela lógica da Matemática.

A regra é prevista, todavia o sentido projetado na regra é imprevisível. O sentido previsto da regra se revela na linguagem, na leitura produtiva do texto e no diálogo entre o professor e o aluno. No diálogo, o aluno aprende Matemática quando compreende a sua lógica, e o professor aprende a ensinar Matemática quando compreende a lógica do aluno. Dessa forma, o termo "matemática" vai ao encontro do sentido originário grego "mathéses": o aluno, aquele que ensina aprendendo; o professor é aquele que aprende ensinando.

Referencias Bibliográficas

BARUK, Stella. **Insucessos e Matemáticas**. Lisboa / Portugal: Relógio D' Água Editores, 1996.

___. **L'âge du capitaine :** De l'erreur en mathématiques. Paris: Editions du Seuil, 1985.

BERNAYS, Paul. **Philosophie des mathématiques**. Paris: Librairie Philosophique J. Vrin, 2003.

CAVEING, Maurice. **Le problème des objets dans la pensée mathématique**. Paris: Librairie Philosophique J. Vrin, 2004.

CIPRA, Barry, **Erreurs...et comment les trouver avant le prof...**, Paris: Inter Editions, 1985.

DEHAENE, Stanislas. **La Bosse des maths**. Paris: Odile Jacob, 1997.

DUPIN, J., SAMUEL, J. **Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques**. Paris: Presses Universitaires de France, 1993.

GRANGER, Gilles-Gaston. **Invitation à la lecture de Wittgenstein**. Aix-en-Provence: Editions Alinea, 1990.

KANT, Immanuel. **Crítica da razão pura**. São Paulo: Editora Nova Cultural, vol. 1, 1991.

LAKATOS, Imre. **Preuves et Réfutations:** Essai sur la logique de la découverte mathématique. Paris: Hermann, 1984.

LEÃO, Emmanuel Carneiro. **Aprendendo a pensar**. Rio de Janeiro: Vozes, 1977.

PIEROBON, Frank. **Kant et les Mathématiques**. Paris: Librairie Philosophique J. Vrin, 2003.

PRÉVERT, Jacques. **Paroles**. Barcelona: Novoprint, 2003.

ROSTAND, F., **Scrupules des Mathématiques**, Paris : Librairie Philosophique J. Vrin, 1960.

SARRAZY, Bernard. **Sens et situations :** Une mise en question de l'enseignement des strategies méta-cognitives en mathématiques. França: 1997. 19 páginas. Disponível em: <http://perso.wanadoo.fr/daest/Pages%20perso/Sarrazy.htm> Acesso em: 10 julho 2004.

SILVEIRA, Marisa R. Abreu da. **A interpretação da matemática na escola, no dizer dos alunos:** ressonâncias do sentido de "dificuldade". Porto Alegre: UFRGS, 2000. Dissertação (Mestrado).

THIRION, Maurice. **Les mathématiques et le réel** (IREM-Histoire des Mathématiques). Paris: Ellipses Edition Marketing, 1999.

WITTGENSTEIN, Ludwig. **Observaciones sobre los fundamentos de la matemática**. Madrid: Alianza Editorial, 1987.

Marisa Rosâni Abreu da Silveira é Professora Adjunta do Núcleo Pedagógico de Apoio ao Desenvolvimento Científico (NPADC) da Universidade Federal do Pará (UFPA).

Endereço para correspondência: Avenida Serzedelo Correa, nº. 999, Aptº. 901, Belém, Pará. - E-mail: marisabreu@ufpa.br