Revista Cearense de Educação Matemática
ISSN: 2764 - 8311

e-ISSN: 2764-8311 **DOI**: 10.56938/rceem.v1i1.3160

APRENDIZAGEM BASEADA EM PROBLEMAS E CÁLCULO NUMÉRICO: UM RELATO DE EXPERIÊNCIA NA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

PROBLEM-BASED LEARNING AND NUMERICAL CALCULUS: LIVED EXPERIENCE IN A MATH COURSE

Guttenberg Sergistótanes Santos Ferreira[1]; Junio Moreira de Alencar[2]; Maria Jaqueline Sousa de Moura[3]

RESUMO

A presente pesquisa objetivou investigar potencialidades da metodologia Aprendizagem Baseada em Problemas (PBL) no ensino de Cálculo Numérico (CN). Para tanto, realizou-se uma intervenção pedagógica no primeiro semestre de 2021, em uma turma de dez alunos do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE) – *campus* Juazeiro do Norte, que estavam cursando a disciplina CN. A intervenção ocorreu em três encontros semanais de duas horas cada em caráter remoto, devido a pandemia do COVID-19, por meio da plataforma *Google Meet*. Os alunos envolvidos na pesquisa foram instigados a vivenciarem os ciclos da metodologia PBL através de situações problemas que poderiam ser modeladas através de ferramentas do CN, a saber, o Método de Gauss-Seidel e o Método de Newton. A partir das observações dos pesquisadores e questionários aplicados ao longo da intervenção, observou-se que apesar dos alunos não perceberem com clareza cada ciclo da metodologia PBL ao resolverem os problemas propostos na pesquisa, houve a compreensão da importância dessa metodologia no aprendizado e o principal benefício foi a produção interativa do conhecimento, mesmo havendo as limitações do ensino remoto emergencial. Além disso, houve por parte dos alunos uma evolução no entendimento do que é resolução de problemas. Ademais, constatou-se que a maior dificuldade dos alunos frente a resolução de problemas era a interpretação e não a manipulação matemática. A partir dos achados desse trabalho, percebeu-se

[1] Doutorando em Ensino de Ciências Exatas pela Universidade do Vale do Taquari (UNIVATES), Lajeado–RS. Mestre em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Federal do Ceará (UFC), Fortaleza–CE. Professor de Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE) – *campus* Juazeiro do Norte. Endereço para correspondência: Rua Padre Pedro Ribeiro, 409, Centro, Juazeiro do Norte, CE, Brasil, CEP: 63010-235. E-mail: guttenberg@ifce.edu.br.

ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-3978-8942

[2] Doutor em Engenharia Agrícola pela Universidade Federal do Ceará (UFC). Mestre em Matemática pela Universidade Federal do Ceará (UFC). Professor de Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE) – *campus* Juazeiro do Norte. Endereço para correspondência: Rua Vicência Maria de Oliveira, 919, São José, Juazeiro do Norte, CE, Brasil, CEP: 63024-670. E-mail: juniomoreira@ifce.edu.br .

ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-7903-207X

[3] Graduada em licenciatura em Matemática pelo Instituto Federal do Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE). Endereço para correspondência: Rua Padre Pedro Ribeiro, 124, Centro, Juazeiro do Norte, CE, Brasil, CEP: 63050-017. E-mail: maria.jaqueline.sousa97@gmail.com.

ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-1947-3882

que o contato com a metodologia PBL agregou para aos alunos não apenas no aprendizado dos conteúdos do CN, mas também para a formação deles enquanto professores em formação inicial, reflexivos dos impactos da sua práxis docente futura.
Palavras-chave: Ensino de Cálculo Numérico. Método de Newton. Método de Gauss-Seidel. Resolução de Problemas. Formação de Professores.

ABSTRACT

This study aimed to investigate the potential of Problem Based Learning (PBL) methodology in teaching Numerical Calculus (NC). To this end, a pedagogical intervention was carried out in the first semester of the academic year 2021. The participants were ten students from class of NC of the degree in Math at the Federal Institute of Education, Science and Technology of Ceará (IFCE) – *campus* Juazeiro do Norte. Due to the COVID-19 pandemic, the intervention was carried out in three weekly meeting of two hour each, using *Google Meet* platform. The students involved in the research were encouraged to experience the cycles of the PBL methodology through problems that can be solved through NC tools, namely, the Gauss Method and the Newton Method. The observations of the researcher and questionaries reveled that the importance of the methodology in student's learning and the main benefit was the interactive production of knowledge, even with the limitations of teaching emergency remote. In addition, there was an evolution on the part of the students in the understanding of what is problem solving. Furthermore, it was found that the students' greatest difficulty in solving problems was interpretation and not mathematical manipulation. From the findings of this work, it was noticed that the contact with the PBL methodology added to the students not only in learning the contents of the NC, but also for their training as teachers in initial training and insights reflective of the impacts of their future teaching praxis.
Keywords: Teaching Numerical Calculus. Newton's method. Gauss-Seidel method. Problem solving. Teacher training.

Introdução

Este trabalho trata de um relato de experiência, fruto de uma intervenção pedagógica, que ocorreu num curso de Licenciatura em Matemática envolvendo a metodologia de Aprendizagem Baseada em Problemas, mais conhecida por sua sigla em inglês (doravante, PBL, de *Problem Based Learning*), em aulas da disciplina de Cálculo Numérico. Destarte, é valido afirmar que a práxis docente em matemática exige do professor a sensibilidade de saber equilibrar teoria e prática no ensino dos mais diversos temas. Se por um lado existe a teoria matemática, permeada por todos os seus teoremas e demonstrações, por outro lado há a necessidade de evidenciar na prática (no cotidiano) o uso daquele conteúdo, bem como sua aplicabilidade.

Justifica-se este trabalho destacando a possibilidade concreta de discutir o ensino e a aprendizagem de métodos numéricos para resolução de sistemas lineares e também de equações algébricas e/ou transcendentes, numa perspectiva iterativa, através de problemas contextualizados que podem retratar a realidade cotidiana. Para tanto, as atividades foram norteadas pela problemática “Que repercussões a metodologia PBL pode trazer ao ensino de métodos iterativos para resolução de sistemas lineares e de equações algébricas e/ou transcendentes no Cálculo Numérico?"

Nisso, objetivou-se investigar potencialidades da metodologia PBL no ensino de temas de Cálculo Numérico. De modo periférico, objetivou-se ainda: apresentar, discutir e aplicar a metodologia PBL; contextualizar problemas e discutir resoluções sobre sistemas lineares de equações e equações algébricas e/ou transcendentes.

Todas as atividades da intervenção pedagógica ocorreram numa turma de 6º semestre do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal do Ceará (IFCE) – *campus* Juazeiro do Norte, com estudantes da disciplina de Cálculo Numérico. Oportunamente, destaque-se que essa turma tinha suas atividades letivas no turno matutino de forma remota (síncrona e assíncrona) no primeiro semestre letivo de 2021 devido à pandemia do COVID-19.

Referencial Teórico

A Resolução de Problemas, um campo de pesquisa qualitativa da EM, Onuchic e Allevato (2011) afirmam que começou a ser visto como uma forma de ensinar matemática a partir do ano 1944, quando o matemático George Pólya percebeu a necessidade de ensinar estratégias que auxiliassem os estudantes a resolver problemas. As autoras afirmam ainda, a partir de um levantamento histórico, que essa metodologia de ensino se apoia em pressupostos construtivistas e socioculturais.

Nesse contexto, Ribeiro (2010) destaca que a metodologia de resolução de problemas pode ser vista como uma oportunidade de construção do conhecimento matemático, que quando corretamente aplicada ao ensino pode mostrar aos estudantes que a matemática possui sentido e propósito, não se resumindo a apenas um conjunto de fórmulas, teoremas e exercícios. Nesse sentido, Schroeder e Lester (*apud* RIBEIRO, 2010; ONUCHIC; ALLEVATO, 2011; MELO; JUSTULIN, 2019) apresentam diferentes abordagens sobre essa metodologia no contexto do ensino de matemática, são elas: (a) ensinar sobre resolução de problemas; (b) ensinar para resolução de problemas; (c) ensinar através da resolução de problemas.

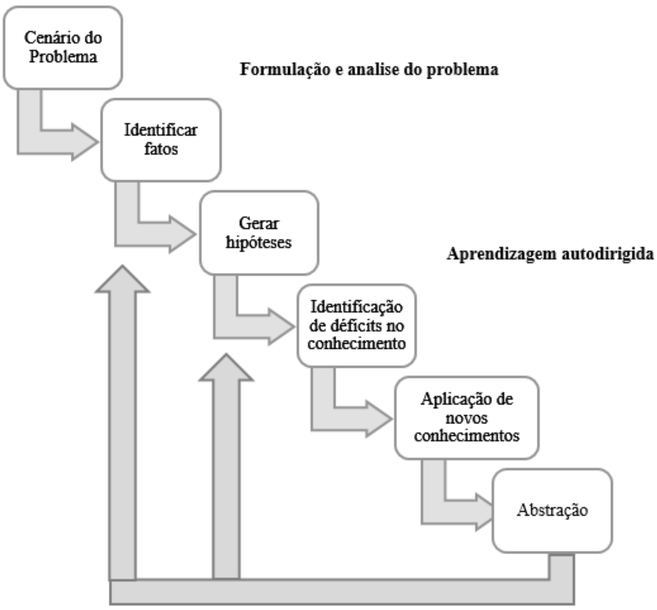
Para efeito deste trabalho, as atividades realizadas foram pautadas segundo os pressupostos do ensino "através" da resolução de problemas, em que se explicita que a proposição de problemas deve servir e ser utilizada como estímulo inicial ao ensino de conteúdos matemáticos. Sendo assim, as ações foram construídas para desenvolver o conhecimento matemático, colocando os licenciandos no centro do processo de aprendizagem sem, no entanto, prescindir do papel salutar do professor enquanto mediador dessa aprendizagem.

Sobre a metodologia PBL, tem-se que seu intuito é favorecer a construção de novos conhecimentos a partir de conhecimentos prévios, sendo vista como uma metodologia ativa e que possibilita abordagens transdisciplinares no ensino (BLASS; IRALA, 2020). Sobre isso, Souza e Dourado (2015) corroboram ao afirmar que a PBL está centrada no estudante a fim de promover a aquisição de conhecimentos e ainda a ressignificação e integração de conhecimentos anteriormente adquiridos.

Por se tratar de uma metodologia ativa, a PBL possibilita o uso de diferentes abordagens no ensino de matemática, tais como resolução de problemas e modelagem matemática. Através de atividades com essas abordagens é esperado que se instigue nos estudantes características investigadoras, autônomas e participativas (SOUZA; DOURADO, 2015).

Metodologicamente, segundo Blass e Irala (2020), na PBL ocorrem fases ou ciclos de aprendizagem conforme Figura 1. Os autores explicitam que nessa proposta de ensino são necessárias mudanças de atitude: nos discentes, que devem sair de uma postura educacional passiva e passar a desenvolver habilidades de trabalho em grupo; e também nos docentes, que devem permitir que os discentes conjecturem e testem suas hipóteses e soluções, fugindo assim de um ensino expositivo tradicional.

Figura 1 – Ciclos de Aprendizagem da metodologia PBL



Fonte: Adaptado de Blass e Irala (2020, p. 7).

A partir dos ciclos de aprendizagem propostos na Figura 1, ocorre a construção do percurso metodológico próprio da PBL. Sua estrutura básica para implementação da metodologia pressupõe: elaboração do cenário ou contexto problemático; elaboração de questões problema; resolução de problemas através de investigação em grupos; apresentação do resultado final e autoavaliação do processo de aprendizagem (SOUZA; DOURADO, 2015).

Ademais, Souza e Fonseca (2017, p.203) ainda afirmam que "o PBL tem como intenção propiciar uma aprendizagem além da resolução de problemas e almeja transpor práticas de aplicações de exemplos feitas somente após a apresentação de certos conceitos". O percurso proposto pelo PBL é certamente investigativo, em que o professor tem a função de mediar a aprendizagem, agindo como um tutor, em que delega aos estudantes a autonomia e a responsabilidade por sua aprendizagem.

Procedimentos Metodológicos

A intervenção pedagógica que resultou no desenvolvimento deste trabalho foi realizada no IFCE – *campus* Juazeiro do Norte, junto a uma turma de 6º semestre do curso de Licenciatura em Matemática, especificamente na disciplina de Cálculo Numérico. Devido à pandemia do COVID-19, o *campus* Juazeiro do Norte seguiu o formato remoto para todas as atividades acadêmicas, sendo assim, as atividades deste estudo ocorreram integralmente de modo remoto de forma síncrona e assíncrona.

A turma investigada era composta por 26 licenciandos. Segundo o professor da disciplina de Cálculo Numérico, cerca de 16 licenciandos frequentavam as aulas e devolviam atividades com certa regularidade. Para efeito deste trabalho é oportuno informar que apenas 10 licenciandos participaram dos 3 encontros; que cada encontro contava com 2 h/a de 60 min cada; e que as atividades ocorreram em salasvirtuais por meio da plataforma *Google Meet*. Em tempo vale destacar que o professor responsável pela disciplina foi convidado e concordou em participar de todas as atividades desenvolvidas. O Quadro 1 traz uma síntese das atividades que foram desenvolvidas em cada encontro. Reitera-se que as atividades realizadas foram pautadas segundo os pressupostos do ensino "através" da resolução de problemas

Quadro 1 – Síntese das Atividades da Intervenção Pedagógica

ENCONTROS	ATIVIDADES
1º	• Apresentação e contextualização da proposta; • Aplicação do Questionário Inicial (QI);

	• Discussão sobre PBL e seus pressupostos; • Problematização sobre Resolução Iterativa de Sistemas Lineares (método de Gauss-Seidel);
2º	• Discussão sobre aula anterior (momento para feedback e resolução do problema 1 proposto); • Problematização sobre Resolução Iterativa de Equações Algébricas e Transcendentes (método de Newton);
3º	• Discussão sobre aula anterior (momento para feedback e resolução dos problemas 2 e 3 propostos); • Aplicação do Questionário Final (QF); • Momento destinado a dúvidas, críticas e sugestões.

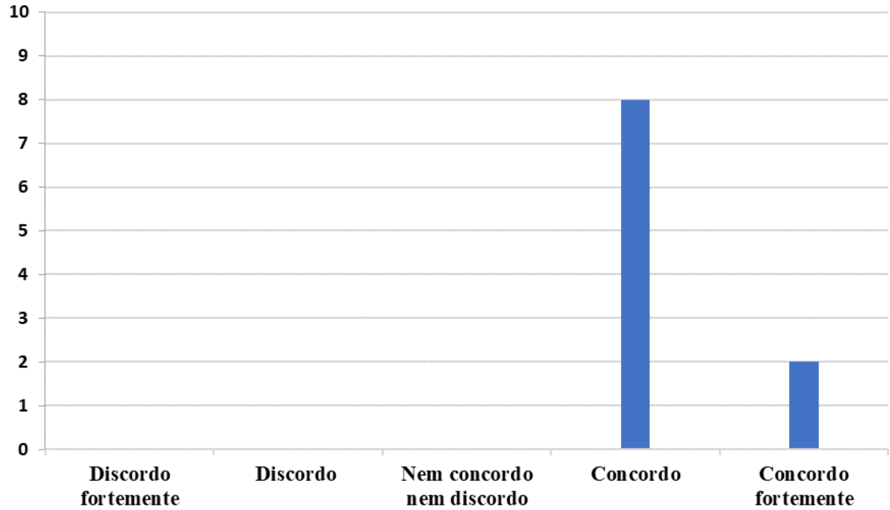
Fonte: Dos autores (2022).

Relato e Discussão de Resultados

Atividades no 1º Encontro

Neste encontro foi solicitado aos licenciandos que respondessem ao Questionário Inicial (QI), composto por afirmativas em escala Likert e também com um questionamento aberto, no sentido de caracterizar como se desenvolvem as atividades na disciplina de Cálculo Numérico e sobre a compreensão dos estudantes sobre metodologias ativas. Ressalte-se que 12 licenciandos participaram deste primeiro encontro, mas apenas 10 deles se dispuseram a responder o QI. Quando questionados sobre a importância do Cálculo Numérico para sua atuação docente futura, a ampla maioria dos licenciandos entende que a disciplina é relevante, conforme Figura 2.

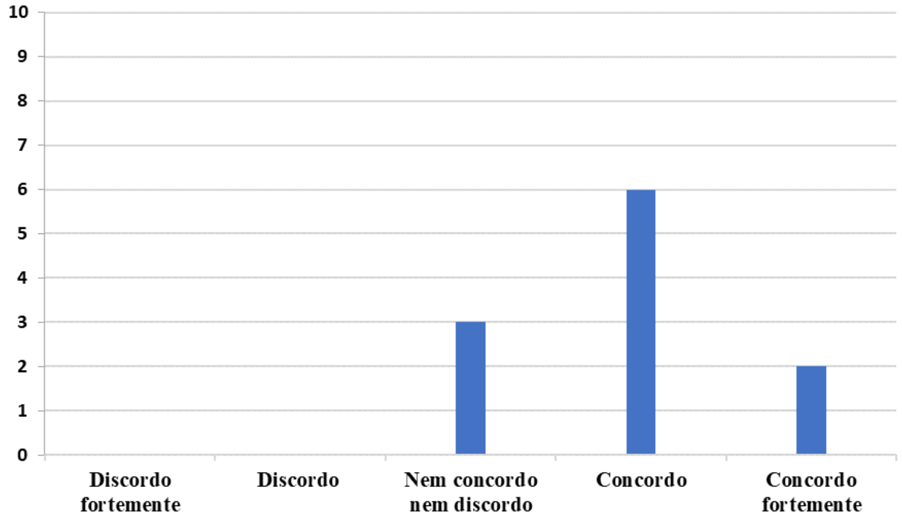
Figura 2 – Cálculo Numérico é importante para sua atuação docente futura?



Fonte: Dos autores (2022).

Na Afirmativa 2 quando indagados sobre o uso da Matemática presente no Cálculo Numérico em outros níveis de ensino, 3 licenciandos tiveram dúvidas se isso é ou não possível, conforme a Figura 3 abaixo, fazendo um contraponto ao que foi respondido na Afirmativa 1 (Figura 2).

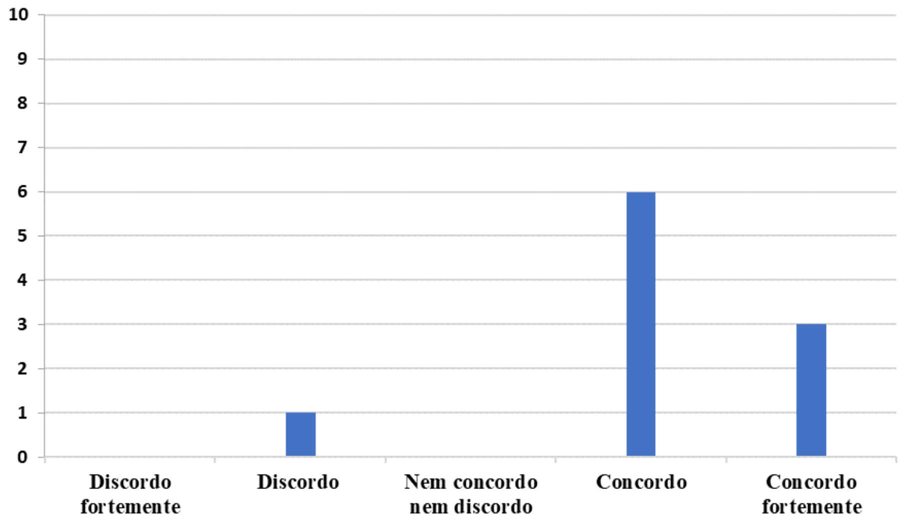
Figura 3 – A matemática desenvolvida na disciplina pode ser reproduzida em outros níveis de ensino?



Fonte: Dos autores (2022).

Um aspecto importante quando se discute a resolução de problemas é a diversidade de formas para se resolver um mesmo problema. Na Afirmativa 4 isso foi questionado e apenas 1 licenciando discorda que haja essa discussão dentro da disciplina, conforme Figura 4.

Figura 4 – Existe discussão sob diferentes formas de resolver problemas em uma mesma atividade durante essa disciplina?



Fonte: Dos autores (2022).

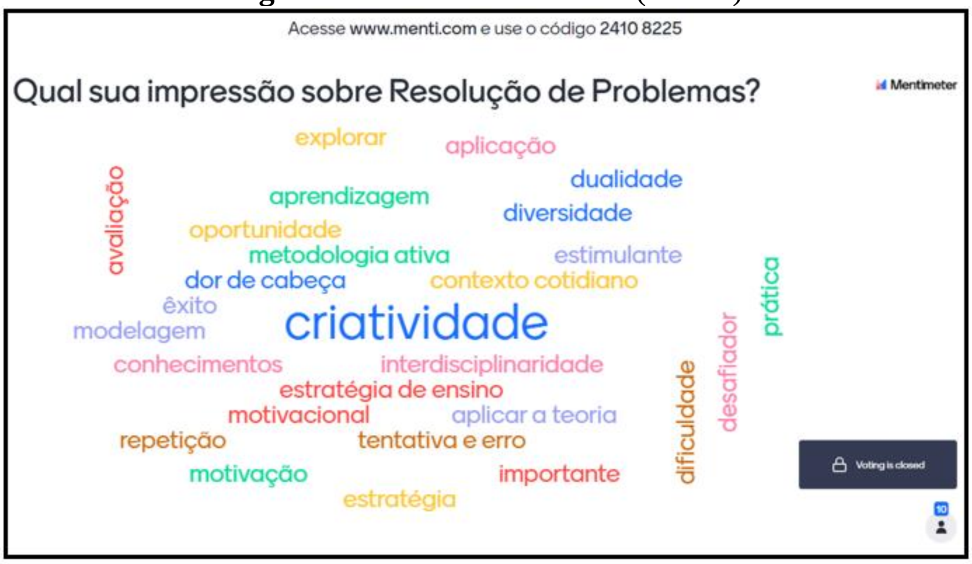
Essa resposta positiva da maioria dos pesquisados é corroborada por Onuchic e Allevato (2011, p.82) quando afirmam, ainda que em outra vertente, que a metodologia de "resolução de problemas desenvolve poder matemático nos alunos, ou seja, capacidade de pensar matematicamente, utilizar diferentes e convenientes estratégias em diferentes problemas, permitindo aumentar a compreensão dos conteúdos e conceitos matemáticos".

Houve ainda um questionamento aberto para que os licenciandos pudessem se expressar sobre metodologias ativas. Esse questionamento é importante dada a possibilidade para se expressarem livremente, explicitando sua percepção sobre o tema. Abaixo estão transcritas algumas das respostas obtidas.

> **Questão 7:** Qual sua percepção sobre metodologias ativas?
> **Licenciando1:** São metodologias, onde o professor coloca o aluno para desenvolver o conteúdo de formas diferentes dos habituais. Seja através de jogos, ou até mesmo com o estudo do conteúdo antes da aula.
> **Licenciando8:** Tive um contato recente sobre metodologias ativas e gostei bastante. Não tive a oportunidade no momento de aprofundar mais, mas são técnicas muito interessantes; muitas dessas técnicas pautam discussões, debates e interações que julgo fundamentais para a construção do aprendizado.

Conforme se percebe nos transcritos há um consenso sobre a importância das metodologias ativas para que haja melhor ensino e aprendizagem, proporcionando maior interação entre os participantes dessa prática. Considerando que a temática da intervenção pedagógica é sobre aprendizagem/resolução de problemas, foi proposta uma construção de uma nuvem de palavras, centrada no seguinte questionamento: "Qual sua impressão sobre Resolução de Problemas?" A Figura 5 ilustra as respostas obtidas.

Figura 5 – Nuvem de Palavras (Aula 1)



Fonte: Dos autores (2022).

Ao responderem à pergunta acima, a palavra que mais se destacou foi "criatividade", seguida de "estratégia de ensino", "tentativa e erro", "interdisciplinaridade". Pode-se perceber que os licenciandos vêem a resoluçaõ de problemas como uma metdologia que agrega valor em diferentes áreas da EM. Em um momento de descontração, um dos licenciandos colocou a expressão "dor de cabeça", denotando sua clara percepção ao lidar com a temática de Resolução de Problemas.

Para iniciar a problematização sobre Resolução Iterativa de Sistemas Lineares (método de Gauss-Seidel), considerando que o foco em metodologia ativa e se utilizando do PBL, houve uma divisão da sala virtual central em 3 equipes, com 4 licenciandos cada, para que resolvessem o Problema 1 abaixo. Cada equipe foi orientada a ir a uma sala virtual auxiliar no *Google Meet* para resolver o problema proposto e, em tempo, eleger um licenciando-relator para que o mesmo pudesse socializar todas as discussões realizadas em sua equipe quando do retorno à sala virtual central. O tempo destinado à discussão/resolução foi de 20 min.

Problema 1: Uma fábrica de jeans, situada na cidade de Barbalha (CE), produz calças femininas segundo 3 modelos padrões. Uma vez que sejam definidas as dimensões de cada modelo, a quantia de insumos necessários para fabricação e também a mão de obra empregada, o gerente de produção consegue controlar os estoques para determinar a quantidade de peças produzidas de cada modelo. Sabe-se que para fabricação de calças do Modelo 1 são necessários 1 hora para mão de obra, com uso de 1 m² de tecido e 2 botões; para o Modelo 2 são necessários 0,2 hora para mão de obra, 3 m² de tecido e 2 botões; para o Modelo 3 se utilizam 0,4 hora para mão de obra, 1 m² de tecido e 4 botões. Para fabricação dos 3 modelos num dado período, o gerente de produção conta com disponibilidade total de 176 horas para mão de obra, 500 m^2 de tecido e de 1000 botões. A partir desses dados determine a produção de cada modelo.

O Problema 1 foi deixado de livre resolução aos licenciandos, ou seja, eles podiam escolher qualquer forma de resolução que desejassem. Entretanto, foram orientados a preferencialmente resolver utilizando o método iterativo de Gauss-Seidel para resolução de sistemas lineares. As 3 equipes não conseguiram resolver o problema com uso do Cálculo Numérico. Apenas 2 equipes chegaram à solução correta, utilizando de conhecimentos de sistemas lineares conforme visto ainda no ensino médio.

Dentre as maiores dificuldades apresentadas por eles ficou explícita a compreensão/interpretação do problema. Os relatores de todos as equipes não conseguiram efetivamente destacar cada fase do PBL que ocorreu quando da discussão em sua equipe, mas conseguiram mostrar que os avanços da discussão colaborativa foi um diferencial daquele estudo, inclusive relatando que aquela aula parecia presencial, pois houve interação entre todos os presentes e troca de aprendizado. Esse fato já tinha sido mencionado por Blass e Irala (2020, p.1) quando afirmaram que “os trabalhos em grupo têm o efeito de aumentar autonomia dos alunos e proporcionar uma relação mais próximo com o professor, caracterizada pela própria dinâmica da proposta”.

Ao fim deste momento de socialização e discussão dos resultados do Problema 1, o professor interventor mostrou diferentes propostas de resolução, utilizando da regra de Cramer, da técnica de escalonamento e, por fim, do método iterativo de Gauss-Seidel. A partir dos dados dos problema se chegou ao sistema linear (S). Considerando que o método de Gauss-Seidel indica uma resolução iterativa de sistemas lineares segundo as etapas $(k), (k+1), (k+2) \cdots$ de iteração, segue que o sistema linear (S) pode ser reescrito como sendo o sistema linear (S'),

$$S = \begin{cases} M_1 + 0{,}2M_2 + 0{,}4M_3 = 176 \\ M_1 + 3M_2 + M_3 = 500 \\ 2M_1 + 2M_2 + 4M_3 = 1000 \end{cases} \Rightarrow \ S' = \begin{cases} M_1^{(k+1)} = -0{,}2M_2^{(k)} - 0{,}4M_3^{(k)} + 176 \\ M_2^{(k+1)} = -0{,}333M_1^{(k+1)} - 0{,}333M_3^{(k)} + 166{,}666 \\ M_3^{(k+1)} = -0{,}5M_1^{(k+1)} - 0{,}5M_2^{(k+1)} + 250 \end{cases}$$

As etapas iterativas, utilizando o método de Gauss-Seidel estão ilustradas na Tabela 1.

Tabela 1 – Método Gauss-Seidel (Problema 1)

k	S^k			S^{k+1}			Erro Relativo
	M_1^k	M_2^k	M_3^k	M_1^{k+1}	M_2^{k+1}	M_3^{k+1}	
0	0,00000	0,00000	0,00000	176,00000	108,00059	107,99971	1,00000
1	176,00000	108,00059	107,99971	111,20000	93,60083	147,59959	0,43903
2	111,20000	93,60083	147,59959	98,24000	84,72096	158,51952	0,08176
3	98,24000	84,72096	158,51952	95,64800	81,94501	161,20350	0,01608
4	95,64800	81,94501	161,20350	95,12960	81,22316	161,82362	0,00320
5	95,12960	81,22316	161,82362	95,02592	81,05101	161,96154	0,00064
6	95,02592	81,05101	161,96154	95,00518	81,01195	161,99143	0,00013
7	95,00518	81,01195	161,99143	95,00104	81,00337	161,99780	0,00003
8	95,00104	81,00337	161,99780	**95,00021**	**81,00152**	**161,99914**	**0,00001**

Fonte: Dos autores (2022).

Houve então a formalização da resolução segundo o método iterativo de Gauss-Seidel com resultado $(M_1; M_2; M_3) = (95{,}00021;\ 81{,}00152; 161{,}99914)$ com erro relativo $\epsilon = 0{,}00001$. Com isso, houve o encerramento do 1º Encontro da intervenção pedagógica.

Atividades no 2º Encontro

Este encontro foi iniciado a partir da discussão sobre resolução de sistemas lineares de equações e também de equações algébricas, optou-se por utilizar o método de Newton para realizar as iterações numéricas. Para tanto, foi realizada uma breve recapitulação desse método iterativo, destacando que o mesmo consiste em determinar uma função $\Phi(x)$ tal que $\Phi'(x) = 0$, tendo como condição suficiente, que garante a convergência do método, o fato de que $\Phi'(x)$ e $\Phi''(x)$ sejam funções não nulas com preservação de sinal dentro do intervalo escolhido e que haja um x_0 tal que $\Phi(x_0) \cdot \Phi''(x_0) > 0$ (BARROSO *et al.*, 1987). Sendo assim o processo iterativo é dada por $\Phi(x_i) = x_i - \frac{\mathrm{f}(x_i)}{f'(x_i)}$, de modo que $\mathrm{x}_{\mathrm{i}+1} = x_i - \frac{\mathrm{f}(x_i)}{f'(x_i)}$. A escolha desse método numérico se justifica devido a sua alta velocidade de convergência quando o problema possui solução.

Neste 2º Encontro apenas 8 licenciandos participaram das atividades. Seguindo a metodologia de discussão do 1º Encontro, foram formadas 2 equipes, com 4 licenciandos cada, a fim de discutirem os Problemas 2 e 3. As equipes foram orientadas a irem às salas virtuais auxiliares a fim de proceder à discussão/resolução por um tempo máximo de 45 min. Importante destacar que foi solicitado que as equipes utilizassem do método de Newton durante a resolução, pois a intervenção pedagógica se dava numa aula de Cálculo Numérico e tinha o intuito maior de investigar potencialidades da metodologia PBL nesse contexto.

Problema 2: Certa loja de carros usados em Juazeiro do Norte (CE) oferece 2 planos de financiamento pra um veículo cujo preço à vista é de R$ 16.200,00. No Plano A, o cliente pagará uma entrada de R$ 2.200,00 e mais 9 prestações mensais de R$ 2.652,52. Já no Plano B, o cliente pagará uma entrada de R$ 2.200,00 e mais 12 prestações mensais de R$ 2.152,27. Com isso, determine qual dos dois planos é mais vantajoso para o consumidor.
Sugestão: A equação que relaciona os juros (J) e o prazo (P) com o valor financiado (VF = "preço à vista" – "valor de entrada") e a prestação (PM) é:

$$\frac{1 - (1 + \mathrm{J})^{-\mathrm{P}}}{\mathrm{J}} = \frac{\mathrm{VF}}{\mathrm{PM}}.$$

Problema 3: Em determinada localidade há um vulcão que pode entrar em erupção. Os especialistas conseguiram modelar uma função matemática que relaciona a distância y km percorrida pela lava e o tempo t em horas. Essa função é dada por $y = 7(2 - 0{,}9^t)$. Sabe-se que existe uma vila na base da montanha desse vulcão que dista 10 km do ponto inicial de erupção. Com a iminente erupção, os moradores foram orientados a sair da vila pois a lava chegaria em suas casas em menos de 6 horas. Determine o tempo que a lava do vulcão leva para chegar à vila com precisão de 4 casas decimais.

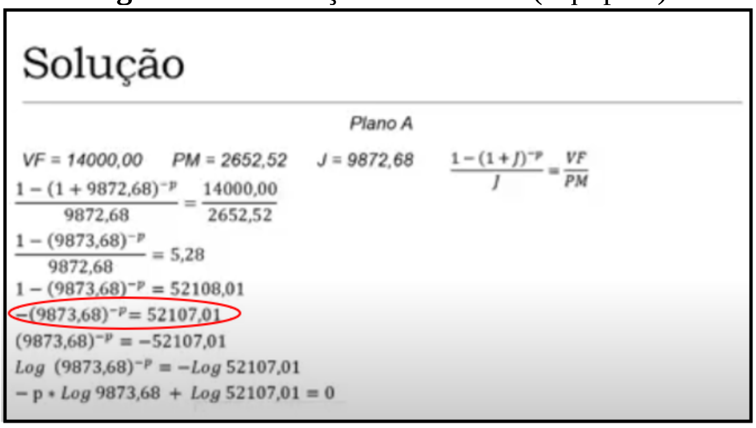
Quando do retorno das equipes à sala virtual central, foi evidenciado pelos relatores de cada equipe que perceberam as fases da PBL acontecendo durante a resolução. Entretanto, ambas as equipes não conseguiram efetivamente resolver os problemas através do método de Newton. Afirmaram ainda, que o tempo destinado aos dois problemas não foi suficiente para concluir suas resoluções e que o sistema remoto possui limitações pois atrapalha no desenvolvimento de resoluções em equipe, uma vez que facilita a dispersão da atenção com bastante facilidade. Com isso, ficou acordado que as equipes deveriam tentar resolver aqueles problemas e fazer uma apresentação para o próximo encontro.

Atividades no 3º Encontro

As atividades deste encontro se iniciaram diretamente com a discussão da resolução dos Problemas 2 e 3 passados no encontro anterior. Uma vez que apenas 10 licenciandos participaram deste encontro, e que 2 dos licenciandos ainda não tinham efetivamente participado de qualquer dos encontros anteriores, foram mantidas apenas 2 equipes para discussão. Definiu-se que a Equipe 1 iria realizar a explicação para resolução do Problema 2, e a Equipe 2 trataria da discussão do Problema 3.

A Equipe 1 optou por trabalhar apenas com substituição direta das incógnitas na equação sugerida no enunciado do problema. Ao tentar fazer isso, houve certa confusão com o real significado da incógnita J, pois a equipe entendeu que se tratava dos "juros reais pagos" e não da "taxa de juros". Seguindo esse raciocínio procedeu com sua resolução, mas não percebeu uma inconsistência em seus cálculos, pois havia uma igualdade entre um número negativo e um positivo, conforme Figura 6.

Figura 6 – Resolução Problema 2 (Equipe 1)



Fonte: Dos autores (2022).

A resolução acima se deu para o Plano A e de forma análoga foi feito para o Plano B. Uma afirmativa levantada para não se perceber esse erro, foi que a Equipe 1 já tinha fixado a ideia de que se pagasse um valor de montante final menor e com menos prestações mensais, então certamente essa seria a melhor opção. Uma vez que o Plano A já tinha inicialmente satisfeito essas duas condições, então a Equipe 1 não teve um olhar crítico à solução encontrada.

Quando da formalização dos conceitos abordados nesse problema, foi determinada uma equação polinomial que atendesse à fórmula sugerida no problema. Com isso, dada a equação $\frac{1-(1+J)^{-P}}{J} = \frac{VF}{PM}$, fazendo $x = 1 + J$ e $k = \frac{VF}{PM}$, conclui-se que $f(x) = kx^{P+1} - (k+1)x^{P} + 1$. Com isso $f_A(x) = 5{,}278x^{10} - 6{,}278x^{9} + 1$ e $f_B(x) = 6{,}50476x^{13} - 7{,}50476x^{12} + 1$. O Método de Newton aplicado nesses dois planos segue ilustrado na Tabela 2.

Tabela 2 – Método de Newton (Problema 2)

Newton Plano A

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	$\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$	x_{k+1}
0	1,257500000	3,823379177	61,706440890	0,061960779	1,195539221
1	1,195539221	1,159949859	27,539737610	0,042119133	1,153420088
2	1,153420088	0,312600095	13,706576358	0,022806577	1,130613511
3	1,130613511	0,062309324	8,468696563	0,007357605	1,123255906
4	1,123255906	0,005281799	7,053628675	0,000748806	1,122507100
5	1,122507100	0,000051427	6,916477439	0,000007435	1,122499664
6	1,122499664	0,000000005	6,915121770	0,000000001	**1,122499663**

Newton Plano B

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	$\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$	x_{k+1}
0	1,1337500	0,4137106	23,1330772	0,0178839	1,1158661
1	1,1158661	0,0819995	14,3702689	0,0057062	1,1101599
2	1,1101599	0,0066963	12,0590695	0,0005553	1,1096046
3	1,1096046	0,0000594	11,8454700	0,0000050	**1,1095996**

Fonte: Dos autores (2022).

Com isso, chega-se à conclusão que a taxa de juros do Plano A é de 12,25% ao mês e que a taxa do Plano B é de 10,96% ao mês. Apesar de o Plano A aparentar ser melhor, uma vez que o consumidor paga um valor total menor, o melhor financiamento é o plano B por ter uma taxa de juros menor.

Conseguinte, o Problema 3 foi resolvido corretamente por ambas as equipes. Segundo os relatores isso também se deu pelo fato de que no próprio enunciado do problema já existia uma função modelada àquela situação, e como se sabia que o método de Newton implica no uso de função derivada, o raciocínio empregado foi mais simples. Considerando que $f(t) = 7(2 - 0{,}9^t)$ com $f'(t) = -7 \cdot 0{,}9^t \cdot \ln 0{,}9$ e lembrando ainda que o tempo máximo é de 6 horas, ou seja, $t_{Max} = 6$, pode-se construir a Tabela 3 a fim de estimar precisamente em quanto tempo a lava chegaria à vila. É oportuno ressaltar que esse foi o problema em que concordaram integralmente quanto ao resultado e também à forma de como proceder para se chegar à resposta, ou seja, com $t = 5{,}31144\ h$.

Tabela 3 – Método de Newton (Problema 3)

Estimativa de Tempo					
k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	$\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$	x_{k+1}
0	6,00000	0,27991	0,39195	0,71415	5,28585
1	5,28585	-0,01080	0,42258	-0,02556	5,31140
2	5,31140	-0,00001	0,42144	-0,00003	5,31144
3	5,31144	0,00000	0,42144	0,00000	**5,31144**

Fonte: Dos autores (2022).

Apesar de não ter sido possível discutir novos problemas neste 3º Encontro, o mesmo se tornou muito proveitoso, pois os licenciandos relataram sobre a experiência de lidar com resolução de problemas numa perspectiva de aprendizagem colaborativa. Em seguida, houve a construção de uma nuvem de palavras a fim de perceber como eles se sentiam após toda a discussão que foi proposta ao longo dos encontros. Optou-se por usar exatamente a mesma pergunta, pois já havia se passado 15 dias desde o início das atividades. A Figura 7 traz um comparativo das respostas, à esquerda estão as respostas do 1º Encontro e à direita as do 3º Encontro.

Figura 7 – Comparativo de Nuvens de Palavras

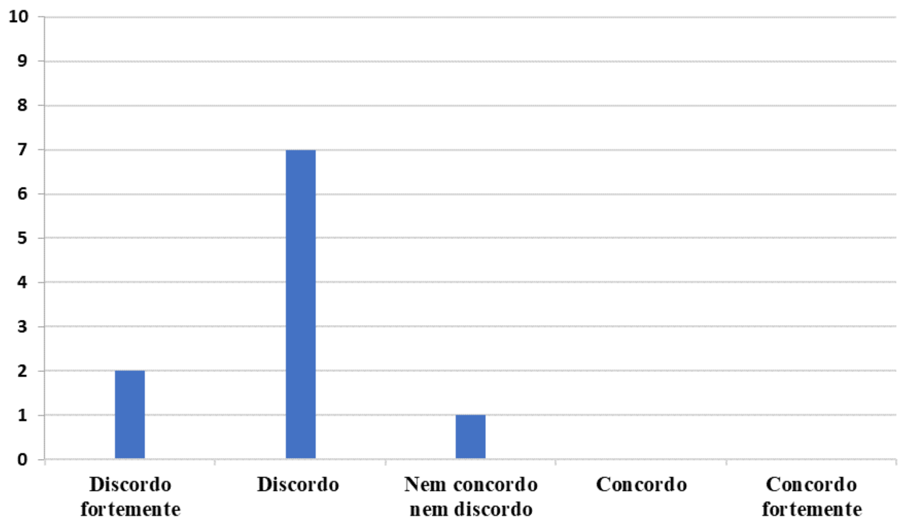
Fonte: Dos autores (2022).

Percebe-se uma evolução conceitual nos licenciandos quanto à Resolução de Problemas, pois palavras como “contextualização”, “desenvolvimento”, “autonomia” ganharam destaque, visto que estão melhor ligadas a essa temática. Mas ainda existem barreiras a serem vencidas, pois alguém ainda colocou a expressão “não consigo”, e isso serve de alerta, pois apesar de outros esforços ao longo da licenciatura, a resolução de um problema ainda se mostra um empecilho.

Ao final das atividades, foi solicitado que os licenciandos respondessem ao Questionário Final (QF), composto por afirmativas em escala Likert e questionamentos abertos, no sentido de auxiliar a perceber como eles compreenderam o uso da metodologia PBL. Apenas 10 licenciandos se dispuseram a responder o QF.

A Afirmativa 2 versava sobre a percepção que os licenciandos tinham de que existe apenas uma forma/estratégia para se chegar a um determinado resultado. De forma satisfatória, 9 dos licenciandos discorda dessa afirmação. Implicitamente essa afirmativa fazia menção direta ao Cálculo Numérico, em que é comum se apresentar apenas uma forma de resolução. As respostas estão na Figura 8.

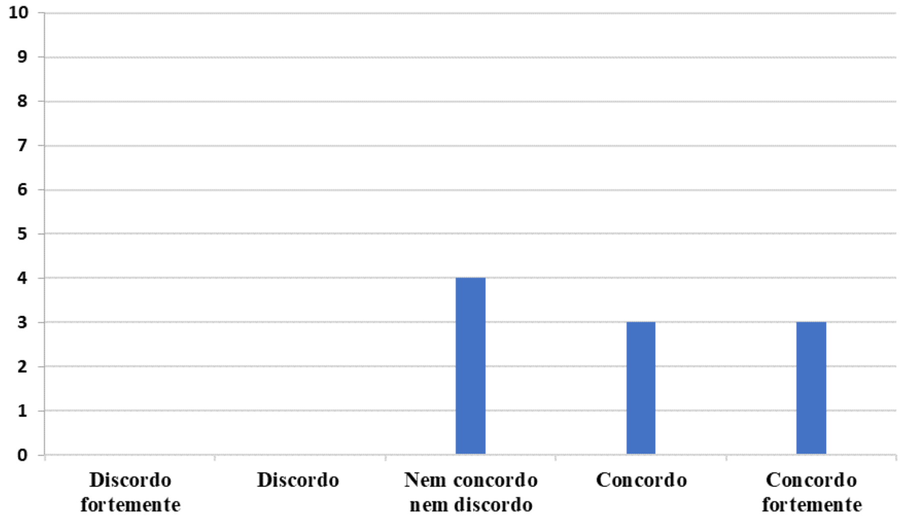
Figura 8 – No desenvolvimento da PBL existe apenas uma estratégia válida para chegar ao resultado?



Fonte: Dos autores (2022).

A Afirmativa 6 trouxe uma resposta inesperada. Essa afirmativa discutia sobre o PBL e a essencialidade do trabalho em grupo. Foi evidenciada a limitação do ensino remoto que, por sua vez, dificulta o trabalho em grupos, pois facilita a dispersão dos estudantes. Apesar de 6 licenciandos concordarem quanto a isso, 4 deles não conseguiram se decidir quanto à validade da estratégia do trabalho em grupo, conforme Figura 9.

Figura 9 – O trabalho em grupo é essencial para o desenvolvimento de atividades com PBL?



Fonte: Dos autores (2022).

Sobre a necessidade de se trabalhar em grupo, Blass e Irala (2020, p.6) já a defendiam quando afirmavam que "a procura pela solução de problemas exige pensar, modelar e expressar o conhecimento já adquirido, fazendo com que ocorra nos grupos discussões de ideias".

Quanto aos questionamentos abertos, considerando que as atividades foram realizadas no âmbito do Cálculo Numérico com uma metodologia que protagoniza o licenciando frente ao aprendizado, foi indagado quanto à possibilidade de se usar o PBL quando da prática profissional futura. Esse tipo de questionamento se justifica com a afirmação de que é necessária constante preparação para se utilizar de metodologias diferenciadas, conforme inclusive foi suscitado na nuvem de palavras (Figura 7). Abaixo estão transcritas algumas das respostas obtidas.

> **Questão 9:** Você pretende desenvolver atividades com PBL em sua prática profissional futura? Por que?
> **Licenciando4:** Sim. Para que os alunos possam discutir ideias e soluções para a resolução de problemas, e compreender como a matemática está ligada a diversas áreas, e perceberem que não se trata apenas de fórmulas, mas que também é necessário pensar e analisar algumas questões.
> **Licenciando8:** Sim sem dúvida, como falei já vinha tentando fazer isso, só que após essa aula abriu mais o meu leque de opções para aplicar futuramente com meus alunos, se possível num futuro próximo já que estou atualmente no PRP (Programa de Residência Pedagógica).

Percebe-se que os licenciandos estão no caminho de descobrimentos que a EM propicia na construção de um profissional de ensino de Matemática melhor capacitado. Apesar de as respostas ainda serem vagas ou generalistas, certamente isso também ocorre por ainda estarem no processo de formação inicial docente, mas já com perspectivas bem interessantes do que fazer quando estiverem à frente de uma sala de aula enquanto docente regente de turma.

Considerações Finais

O trabalhou reportou um relato de experiência de uma intervenção pedagógica no primeiro semestre de 2021, em uma turma de dez alunos do curso de Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE) – *campus* Juazeiro do Norte que estavam cursando a disciplina Cálculo Numérico, apontado as potencialidades da metodologia PBL nos processos de ensino e de aprendizagem.

Os três encontros desenvolvidos na intervenção possibilitaram aos estudantes o contato com a metodologia PBL, trazendo para estes benefícios não apenas no aprendizado dos conteúdos de Cálculo Numérico, mas também para a formação docente. Além disso, percebeu-se a partir dos gráficos de nuvens de palavras e questionários uma evolução por parte dos alunos quanto ao entendimento de resolução de problemas.

Um dos grandes benefícios que os alunos apontaram para o uso da metodologia PBL está na possibilidade de construir o conhecimento em grupo, dinamicamente, e em compreender a importância de não limitar o aprendizado de matemática apenas para resolução de problemas matemáticos desconexos que não agregam para a formação dos alunos.

No tocante ao questionamento: "Que repercussões a metodologia PBL pode trazer ao ensino de métodos iterativos para resolução de sistemas lineares e de equações algébricas e/ou transcendentes no Cálculo Numérico?", Souza e Fonseca (2017) afirmam que desenvolver atividades com PBL e Cálculo alia conhecimentos teóricos e práticos, visando o desenvolvimento de competências conceituais, atitudinais e procedimentais. Foram essas as repercussões percebidas ao longo das atividades, pois os licenciandos sentiram necessidade de rever conceitos já cristalizados, inclusive no âmbito da EM, tomando pra si a responsabilidade por sua aprendizagem.

De acordo com o que foi apresentado, entende-se que o objetivo central foi alcançado, pois foi possível perceber potencialidades para se utilizar da metodologia PBL no Cálculo Numérico junto a licenciandos em Matemática. A metodologia PBL, ainda que brevemente, foi discutida e aplicada durante as atividades, através de todos os problemas contextualizados propostos e resolvidos por grupos colaborativos, auxiliando na sistematização de ideias.

Por fim, importante ressaltar o intuito de contribuir significativamente na formação educacional de todos os envolvidos, professores e licenciandos. Neste sentido houve desenvolvimento tanto em aspectos da Matemática Pura, através das discussões sobre o Cálculo Numérico, quanto em aspectos da Educação Matemática, através da metodologia PBL, de tal forma que os licenciandos se sentiram instigados a utilizar diferentes contextos para chegar à solução dos problemas propostos.

Referências

ARENALES, Selma; DAREZZO, Artur. **Cálculo Numérico: aprendizagem com apoio de software**. 2ª Edição revisada e ampliada. São Paulo: Cengage Learning, 2017.

BARROSO, Leônidas Conceição; BARROSO, Magali Maria de Araújo; CAMPOS FILHO, Frederico Ferreira; CARVALHO, Márcio Luiz Bunte de; MAIA, Miriam Lourenço. **Cálculo Numérico (com aplicações)**. 2ª Edição. São Paulo: Ed Harbra, 1987.

BLASS, Leandro; IRALA, Valesca Brasil. O uso da Aprendizagem Baseada em Problemas (PBL) como metodologia de ensino em aulas de Cálculo Numérico. **Revista de Educação Matemática**, São Paulo, SP, v. 17, p. 1-25, 2020.

MAFRA, José Ricardo e Souza; SÁ, Pedro Franco de. Abordagens na Pesquisa em Educação Matemática: algumas reflexões e perspectivas epistemológicas. **Revista Tempos e Espaços em Educação**, São Cristóvão, SE, v. 13, n. 32, p. 1-21, 2020.

MELO, Marcela Camila Picin de; JUSTULIN, Andresa Maria. Resolução de Problemas: um caminho para o ensino da Matemática. **Ensino e Tecnologia em Revista – ETR**, Londrina, PR, v. 3, n. 1, p. 122-128, 2019.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema**, Rio Claro, SP, v. 25, n. 41, p. 73-98, 2011.

RIBEIRO, Marcos Vinícius. **O ensino do conceito de integral, em sala de aula, com recursos da história da matemática e da resolução de problemas.** 2010. 324 f. Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Pauli14sta, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, SP.

SOUZA, Samir Cristino de; DOURADO, Luis. Aprendizagem Baseada em Problemas (ABP): um método de aprendizagem inovador para o ensino educativo. **Holos**, Natal, RN, v.5, ano 31, p.182-200, 2015.

SOUZA, Débora Vieira; FONSECA, Rogério Ferreira da. Reflexões acerca da aprendizagem
baseada em problemas na abordagem de noções de cálculo diferencial e integral. **Educação Matemática em Pesquisa – EMP**, São Paulo, SP, v. 19, n. 1, p. 197-221, 2017.

Recebido em: 24 / 06 / 2022
Aprovado em: 27 / 06 / 2022