



AS DUAS RÉGUAS PARA CÁLCULO DE WILLIAM OUGHTRED (1574 – 1660) EM UMA PRÁTICA NO LABORATÓRIO DE ENSINO DE ARITMÉTICA¹

THE TWO RULES FOR CALCULATION BY WILLIAM OUGHTRED (1574-1660) IN A PRACTICE IN THE ARITHMETIC TEACHING LABORATORY

Amanda Cardoso Benicio de Lima²; Kawoana da Costa Soares³

RESUMO

A formação do futuro professor de Matemática começa na Universidade, onde diversos conhecimentos curriculares, disciplinares e experienciais se interligam entre os profissionais. Neste artigo, temos como objetivo discutir as reflexões de discentes da disciplina de Laboratório de Ensino de Aritmética (LEA), do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Ceará (UECE), acerca da operação de multiplicação envolvendo o instrumento matemático histórico, denominado de Duas Régua para Cálculo, que está contido no documento histórico *The declaration of the two Rvlers for Calculation*, publicado em 1633, por William Oughtred (1574 – 1660). Para isso, utilizamos uma metodologia de cunho qualitativo e caráter descritivo, tendo como dados coletados os registros escritos e fotográficos dos discentes durante a realização da prática laboratorial, na disciplina de LEA. Dessa forma, neste artigo, são apresentadas as concepções gerais sobre a disciplina de LEA, uma breve descrição do instrumento matemático em questão, seu manuseio e, por fim, o experimento e as percepções dos discentes sobre ele. Diante disso, os resultados desse estudo sinalizam que, à medida em que os conhecimentos relacionados à operação aritmética de multiplicação foram aplicados, outros conceitos, como o de sistema de numeração decimal, de ordem decimal e de proporcionalidade, emergiram do manuseio do instrumento matemático, gerando uma possível contribuição para a significação da operação de multiplicação. Assim, também pudemos perceber que as Duas Régua para Cálculo possibilitaram aos discentes o contato com a matemática prática, refletindo que o possível potencial didático do instrumento não reside diretamente nele, ou em sua forma física, mas nas ações que podem ser realizadas com ele.

Palavras-chave: Multiplicação; Laboratório de Ensino de Matemática; Duas Régua para Cálculo; Formação de Professores de Matemática.

¹ Trabalho orientado pela Profa. Dra. Ana Carolina Costa Pereira.

² Graduanda de Licenciatura Plena em Matemática na Universidade Estadual do Ceará (UECE). Bolsista de Iniciação Científica da Universidade Estadual do Ceará (UECE), Fortaleza, Ceará, Brasil. Endereço para correspondência: Av. Silas Munguba, 1700, Itaperi, Fortaleza, Ceará, Brasil, CEP: 60.740-903. E-mail: cardoso.lima@aluno.uece.br.

ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-3738-4445>.

³ Graduanda de Licenciatura Plena em Matemática na Universidade Estadual do Ceará (UECE). Bolsista de Iniciação Científica da Universidade Estadual do Ceará (UECE), Fortaleza, Ceará, Brasil. Endereço para correspondência: Av. Silas Munguba, 1700, Itaperi, Fortaleza, Ceará, Brasil, CEP: 60.740-903. E-mail: kawoana.costa@aluno.uece.br.

ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-3024-6146>.

ABSTRACT

The training of future mathematics teachers begins at university, where a range of curricular, disciplinary and experiential knowledge is interwoven between professionals. The aim of this article is to discuss the reflections of students from the Arithmetic Teaching Laboratory (LEA) subject on the Mathematics degree course at the State University of Ceará (UECE) on the multiplication operation involving the historical mathematical instrument called the Two Rulers for Calculation, which is contained in the historical document The declaration of the two Rulers for Calculation, published in 1633 by William Oughtred (1574 – 1660). To do this, we used a qualitative and descriptive methodology, with data collected from students' written and photographic records during laboratory practice in the subject of LEA. Thus, this article presents the general conceptions about the subject of EFL, a brief description of the mathematical instrument in question, its handling and, finally, the experiment and the students' perceptions of it. Therefore, the results of this study indicate that, as the knowledge related to the arithmetic operation of multiplication was applied, other concepts, such as the decimal numbering system, decimal order and proportionality, emerged from the handling of the mathematical instrument, generating a possible contribution to the meaning of the multiplication operation. We were also able to see that the Two Rulers for Calculation gave students contact with practical mathematics, reflecting that the possible didactic potential of the instrument does not lie directly in it, or in its physical form, but in the actions that can be carried out with it.

Keywords: Multiplication; Mathematics Teaching Laboratory; Two Calculation Rules; Mathematics Teacher Training.

Introdução

De acordo com Pereira, Santos e Pinheiro (2022), a ideia de um Laboratório de Matemática, desenvolvida ao longo de mais de vinte anos na Universidade, durante as duas primeiras décadas do século XXI, é tratada como um espaço prático composto por ferramentas que estruturam o ambiente, os temas e as pessoas envolvidas na realização de atividades investigativas com a Matemática. Já a utilização desse laboratório pode ser percebida como um ambiente que gera conhecimento, tanto individual quanto coletivo (Lorenzato, 2012).

Para contribuir com a construção desse conhecimento, Lorenzato (2012) destaca que as instituições que formam professores devem empregar materiais didáticos manipuláveis no ensino de conceitos matemáticos. No entanto, para que essa utilização seja mais eficiente, é fundamental que os futuros professores aprendam a usar esses materiais corretamente, considerando que saber utilizá-los é mais importante do que simplesmente ter acesso a eles.

Referindo-se a esses materiais didáticos manipuláveis, Lorenzato (2012, p. 18) os define como “qualquer instrumento útil ao processo de ensino-aprendizagem”. Dessa maneira, podemos considerar que entram nessa definição os instrumentos matemáticos⁴

⁴ Para uma leitura mais aprofundada sobre instrumentos matemáticos, vide Saito (2011) e Warner (1990).

desenvolvidos entre os séculos XVI e XVII, que, segundo Ribeiro e Pereira (2023, p. 2-3), são considerados como

[...] ferramentas utilizadas para o desenvolvimento de práticas laboratoriais, para fazer observações e/ou realizar experimentos; ou como um aparato para realizar cálculos aritméticos, medição de comprimento, altura, profundidade, peso, entre outros; para o cálculo de distâncias lineares e angulares; ou ainda para compreender fenômenos naturais, tais como pressão, temperatura, volume, força etc.

Nesse sentido, dentre muitos estudiosos das matemáticas que desenvolveram instrumentos matemáticos entre os séculos XVI e XVII, encontramos o praticante das matemáticas William Oughtred (1574 – 1660), que disseminou a Aritmética, por meio de sua escrita e de suas aulas sobre vários temas voltados a este assunto. Dentre seus tratados, destacamos *The Circles of Proportion and the Horizontal Instruvment*, publicado em 1639, e *The declaration of the two Rvlers for Calculation*, publicado em 1633, que englobam dois instrumentos: Círculos de Proporção e as Duas Régua para Cálculo, respectivamente.

As Duas Régua para Cálculo podem ser consideradas um material com potencial didático, pois a inserção do instrumento na formação de professores pode apontar a existência da necessidade dos discentes em compreender conceitos aritméticos que estão agregados na manipulação do instrumento, podendo favorecer o processo de ensino-aprendizagem.

Em vista disso, este estudo tem o intuito de apresentar uma prática laboratorial com discentes da Licenciatura em Matemática sobre a mobilização dos conceitos da operação aritmética de multiplicação a partir da manipulação do instrumento Duas Régua Para Cálculo, dando destaque ao seu potencial didático. A ação teve como ambiente o Laboratório de Matemática e Ensino Professor Bernardo Rodrigues Torres (LabMatEN) da Universidade Estadual do Ceará (UECE), em uma prática laboratorial na disciplina de Laboratório de Ensino de Aritmética (LEA).

Este estudo, metodologicamente, fundamenta-se em uma abordagem qualitativa, de natureza descritiva, uma vez que, segundo Bogdan e Biklen (1994), a pesquisa qualitativa se caracteriza por utilizar o ambiente natural como fonte direta de dados e o pesquisador como instrumento principal, e é uma pesquisa descritiva pela ênfase que é dada ao processo.

Desse modo, este trabalho está organizado em cinco partes. Inicialmente, apresentamos o Laboratório de Ensino de Aritmética (LEA) e a possibilidade de abordar a História da Matemática nele. Em seguida, destacamos William Oughtred (1574 – 1660) e o tratado *The declaration of the two Rvlers for Calculation*, em que estão contidos a descrição e o uso das Duas Régua para Cálculo. Adiante, descrevemos a operação de multiplicação de acordo com William Oughtred, e após isso, detalhamos o experimento realizado na disciplina de LEA. Por fim, elencamos os resultados e levantamos as discussões obtidas a partir do experimento.

Laboratório de Ensino de Aritmética (LEA) e a história da matemática

O presente estudo ocorreu na disciplina de LEA, que é ofertada para o 7º semestre do Curso de Licenciatura em Matemática da UECE, *campus* Itaperi, no semestre letivo de 2024.1. Foram ofertadas 20 vagas para o período diurno, tendo 4 alunos matriculados.

A disciplina de LEA tem como pré-requisito a disciplina de Introdução à Teoria dos Números, e sua ementa está pautada em estudar, conforme Ceará (2018, p. 83, adaptação nossa):

O papel do Laboratório de Ensino de Aritmética no ensino e na aprendizagem de conceitos aritmética; Fundamentação teórica, metodologia e epistemológica do ensino de Aritmética; Confecção de materiais didáticos manipuláveis e desenvolvimento de propostas de atividades para o ensino básico; Planejamento e realização de uma experiência prática com o uso de materiais concretos no ensino básico.

Assim, a partir da ementa, objetivamos, em LEA, o desenvolvimento de uma visão crítica do discente na escolha e na utilização de recursos adequados ao processo de ensino e aprendizagem de conteúdos aritméticos, a elaboração de atividades aliadas ao uso de material manipulativo para o ensino da Aritmética e a compreensão do uso do material concreto como uma alternativa para se construir conceitos matemáticos em sala de aula.

A partir desses objetivos, temos a possibilidade da utilização da História da Matemática voltada ao uso de instrumentos matemáticos históricos no ensino de Aritmética, tanto direcionado à construção quando ao manuseio destes, articulando História e Ensino (Saito, 2016). Nesse sentido, as seções seguintes deste artigo tratam sobre a inserção de uma possibilidade de o discente visitar o passado com os

conhecimentos deste mesmo passado, movimentando o pensamento sem a atuação do anacronismo histórico⁵.

William Oughtred e suas Duas Réguas para Cálculo

William Oughtred foi um praticante das matemáticas inglês que viveu entre os séculos XVI e XVII, dedicando-se ao estudo das matemáticas e à carreira religiosa, exercendo o cargo de reitor de uma paróquia, na cidade Albury, por mais de 50 anos de sua vida. Em seus estudos pelas matemáticas, William Oughtred desenvolveu obras ligadas à matemática teórica e prática do período, como *Clavis Mathematicae* (1631)⁶, que aborda conhecimentos ligados à Álgebra, e *The Circles of Proportion and the Horizontal Instruement* (1632, 1633b, 1639, 1660) que indica a descrição, manuseio e uso do instrumento matemático denominado por Círculos de Proporção.

A respeito da última obra citada, *The Circles of Proportion and the Horizontal Instruement*, sua terceira edição, publicada no ano de 1639, apresenta uma adição, intitulada por *An addition vnto the vse of the instvment called the Circles of Propotion, for the working of Nauticall Questions*⁷, que retrata o uso dos Círculos de Proporção para questões náuticas. Nessa adição, encontramos a declaração *The declaration of the two Rvlers for Calculation*, um documento que retrata a descrição, manuseio e uso de duas régulas denominadas por *Staffe* e *Transversarie* (Figura 1), idealizadas⁸ também por William Oughtred e utilizada para cálculos ligados às questões aritméticas, trigonométricas e astronômicas.

As régulas *Staffe* e *Transversarie* apresentam tamanhos diferentes, sendo a *Staffe* maior que a *Transversarie*, com um comprimento de quase 3 para 2. Na régua *Transversarie*, são escritas as escalas dos Senos, Tangentes, Números e Partes Iguais; já na régua *Staffe*, são escritas as escalas dos Senos, Tangentes, Números, Partes Iguais e de Latitudes.

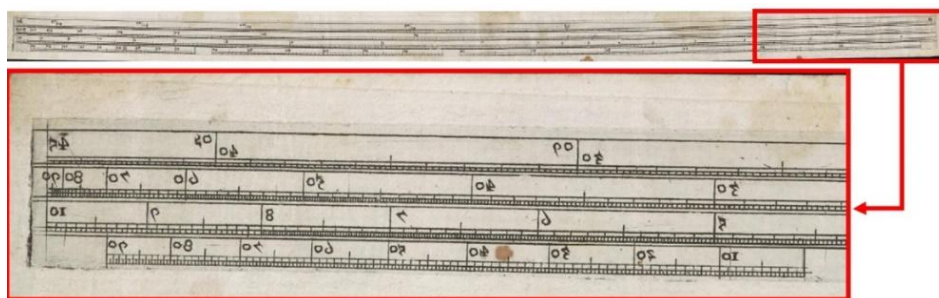
⁵ Para compreender sobre o conceito de anacronismo, vide Saito (2015).

⁶ Para essa obra, temos acesso à sua tradução para o inglês, intitulada por *Key of Mathematicks* (1694).

⁷ Essa adição data de 1633, inferindo que sua publicação veio antes da terceira edição do tratado *The Circles of Proportion ... Instruement* e que, no documento ao qual temos acesso, o comprador quis possuir tanto a edição de 1639 dos Círculos de Proporção, quanto essa adição. Portanto, neste artigo, trataremos o tratado *The Circles of Proportion ... Instruement*, datando de 1639, e *The declaration ... Calculation*, de 1633.

⁸ A autoria do instrumento é dada inteiramente a William Oughtred, porém algumas das escalas contidas nele apresentam relações com os estudos de Edmund Gunter (1581-1626), outro praticante das matemáticas do período. Essas relações foram discutidas por Lima, Soares e Pereira (2022).

Figura 1 – Impressão reversa da régua *Transversarie*⁹



Fonte: Adaptado de Jardine (2016).

Para este artigo, nos concentraremos apenas na utilização da escala dos Números, que se caracteriza como uma linha de números “em ordem decrescente 1, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 9, 8, 7, etc” (Oughtred, 1633a, p. 64, tradução nossa)¹⁰. Dessa forma, por meio dessa escala, podem ser realizadas as operações de multiplicação e divisão, além do cálculo para se encontrar o quarto termo proporcional¹¹. Na seção a seguir, discutiremos acerca da operação de multiplicação por meio do uso dessa escala.

A operação de multiplicação por meio das Duas Régua para Cálculo

Na declaração das Duas Régua para Cálculo, William Oughtred menciona a utilização das régua para o cálculo de uma multiplicação, dizendo:

Como se você fosse multiplicar 35 por 40¹²; Diga:

$$1 \cdot 35 :: 40 \cdot 1.400$$

Pois se, na linha de números no *Staffe* você conta 35, e aplicar o mesmo a 1 na linha de números no *Transversarie*; então 40 no *Transversarie*, mostrando 1400 no *Staffe* (Oughtred, 1633a, p. 65, tradução nossa)¹³.

Para compreender essa resolução, é importante observar as indicações dadas no tratado *The Circles of Proportion and the Horizontal Instruvment*, na qual se utiliza de uma notação “::” para especificar uma relação de proporcionalidade, dizendo que “portanto, tenha esta regra cuidadosamente em mente: na Multiplicação, o primeiro termo

⁹ Explicações a respeito do que é essa impressão reversa podem ser encontradas em Jardine (2016).

¹⁰ Em inglês, lê-se: “in descent 1, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 9, 8, 7, &c”.

¹¹ Apesar das régua possuírem tamanhos distintos, a escala Números está disposta de maneira igual no instrumento, possuindo a mesma extensão e sendo construída da mesma forma nas régua *Staffe* e *Transversarie*.

¹² Exemplo adaptado do tratado para melhor entendimento do leitor, mas no original tem-se: “Como se fosse multiplicar 355 por 48”.

¹³ Em inglês, lê-se: “As if you would multiply 355 by 48; Say: 1 . 35 :: 48 . 1400.

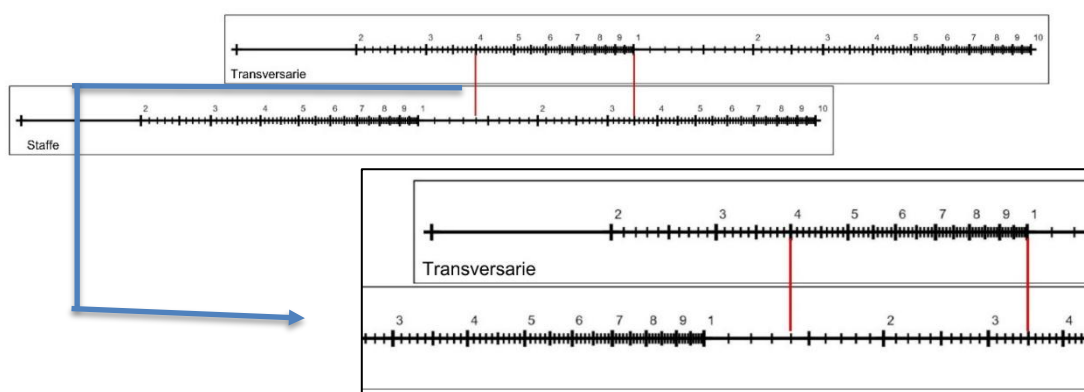
For if in the line of Numbers on the *Staffe* you reckon 355, and apply the same to 1 in the line of Numbers on the *Transversarie*; then shall 48 on the *Transversarie*; shew 17040 on the *Staffe*”.

da proporção implícita é sempre 1” (Oughtred, 1639, p. 7, tradução nossa)¹⁴. Além disso, também indica que

na multiplicação, como uma unidade é para um dos fatores (de números a serem multiplicados), assim é o outro dos fatores, para o produto. E o produto de dois números terá tantos lugares como os dois fatores, se o menor deles exceder tantos dos primeiros números do produto; mas, se não exceder, terá um a menos (Oughtred, 1639, p. 6-7, tradução nossa)¹⁵.

Dessa forma, tem-se estabelecida uma relação de proporcionalidade, na qual o número 1 é primeiro termo da proporção que está para o número 35, segundo termo proporcional, assim como o número 40, terceiro termo, está para 1.400, o resultado da multiplicação e quarto termo proporcional. Utilizando as régua, o primeiro termo (número 1) é encontrado na régua *Transversarie*, o segundo termo (número 35) é encontrado na régua *Staffe* e o terceiro termo (número 40) encontrado na *Transversarie*. Assim, ao emparelhar as duas régua, o número 1 estará alinhado ao número 35 e o número 40 estará alinhado com o produto (Figura 1).

Figura 2 – Manuseio das régua para o cálculo da multiplicação¹⁶.



Fonte: Elaborada pelas autoras (2024).

Já que a marcação do produto está localizada antes da marcação do segundo termo (número 35), a fim de reconhecer, de maneira correta, o número equivalente ao produto, utiliza-se a informação já citada acima, que “o produto de dois números terá tantos lugares

¹⁴ Em inglês, lê-se: “Wherefore let this rule bee still carefully kept in minde: that In Multiplication the first terme of the implicite proportion is evermore 1”.

¹⁵ Em inglês, lê-se: “In Multiplication, as an unite is to one of the factores (or numbers to be multiplied:) so is the other of the factores, to the product. And the product of two numbers shall have so many places as there be in both the factores, if the lesser of them excede so many of the first figures of the product: But if it doe not excede, it will have one lesse”.

¹⁶ Reconstrução da escala dos Números contidas nas régua feita no GeoGebra.

como os dois fatores, se o menor deles exceder tantos dos primeiros números do produto; mas, se não exceder, terá um a menos” (Oughtred, 1639, p. 6-7, tradução nossa).

Nesse trecho, a palavra “lugares” se refere à quantidade de algarismos que o produto contém, portanto, como o menor dos dois fatores da multiplicação é o número 35 e esse número excede 14 ($35 > 14$), que são os primeiros números do produto, temos que o produto terá a quantidade de algarismos referente aos dois fatores que estão sendo multiplicados, ou seja, quatro algarismos, sendo o produto igual a 1.400.

O experimento “Aritmetizando com as Réguas para Cálculo de Oughtred”

O experimento foi realizado no dia 17 de maio de 2024, em uma aula da disciplina de Laboratório de Ensino de Aritmética (LEA), do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Ceará (UECE). Em vista da quantidade pequena de alunos matriculados para essa disciplina, preferiu-se realizar essa prática laboratorial por meio de duas duplas, cada uma recebendo dois materiais norteadores, denominados como Folha do Aluno e Guia do Professor, além de um par de réguas¹⁷.

A Folha do Aluno caracteriza-se como um documento que contém todas as indicações necessárias para que o aluno realize a prática laboratorial, como os comentários iniciais, sendo uma breve introdução a respeito da prática que será realizada, e o procedimento do experimento, detalhando os problemas e as perguntas a serem respondidas. Já o Guia do Professor é um documento que contém os subsídios necessários para que o professor aplique o experimento, tendo a resolução dos problemas e das perguntas realizadas na Folha do Aluno.

Na Folha do Aluno elaborada para o experimento, os comentários iniciais retratavam o uso das operações básicas no cotidiano, expressando, ao final, o objetivo geral do experimento, que é refletir acerca da operação de multiplicação envolvendo um instrumento matemático histórico e como ela é abordada em um problema proposto, da utilização de estratégias seguindo as orientações dadas pelo professor e pela própria folha. Após isso, a folha apresentava o que eram as Réguas para Cálculo e descrevia as etapas para o procedimento.

Para a Etapa 1, foi solicitado aos alunos que fizessem a leitura de um problema adaptado¹⁸ do tratado *The Circles of Proportions and the Horizontall Instrvment* e após

¹⁷ Os discentes também receberam o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, que autoriza as autoras a mencionarem, neste artigo, seus relatos escritos e registros fotográficos.

¹⁸ No tratado, o problema é escrito como: Quantos centavos existem em 47 libras + 9 xelins?

isso refletissem e anotassem as estratégias que poderiam ser utilizadas para sua resolução.

Quadro 1 – Problema da Etapa 1.

Problema	Nos séculos XVI e XVII, Londres se destacava por ser um grande centro comercial, isso devido às suas expansões marítimas, que possibilitaram a migração de vários comerciantes para a cidade. Nesses tempos, viveu ali um famoso comerciante, que tinha seu negócio às margens do rio Tâmesa e, um dia, precisou converter algumas moedas que tinha recebido ao longo do dia em centavos para assim poder realizar o pagamento de um de seus fornecedores. Como o comerciante precisava converter em centavos a soma de 50 libras e 5 xelins, quantos centavos o comerciante pagará ao fornecedor?
	Na Folha do Aluno, havia uma observação como nota de rodapé dizendo: Utilize a informação de que 1 xelim vale 12 centavos e que 1 libra vale 20 xelins.

Fonte: Elaborado pelas autoras (2024).

Ao o término dessa etapa, os alunos, sob condução do professor, deveriam socializar as estratégias pensadas para a resolução do problema com os demais grupos e observarem as semelhanças ou diferenças do que foi pensado. Em seguida, na última etapa, os alunos deveriam seguir as instruções do quadro a seguir para responder as perguntas mencionadas.

Quadro 2 – Como realizar uma multiplicação de dois fatores.

Para multiplicar dois fatores, faça:
Na linha de números da régua <i>Staffe</i>, encontre o primeiro fator a ser multiplicado. Em seguida, aplique esse mesmo fator ao número 1 na linha de números da régua <i>Transversarie</i>. Após isso, encontre o segundo fator na régua <i>Transversarie</i>, que mostrará o resultado na régua <i>Staffe</i>.

Fonte: Elaborado pelas autoras (2024).

Ao total, foram propostas quatro perguntas aos alunos, para que respondessem utilizando o manuseio das régua e a Matemática de hoje. As perguntas eram: “Quantos centavos correspondem a 5 xelins?”, “Quantos centavos correspondem a uma libra?”, “Quantos centavos correspondem a 50 libras?¹⁹” e “Qual o valor, em centavos, que o comerciante pagará ao fornecedor?”. Como produto, foi solicitado que os alunos

¹⁹ Para essa pergunta, a Folha do Aluno também trazia uma indicação dizendo: Se for preciso, utilize: “E o produto de dois números terá tantos lugares como os dois fatores, se o menor deles exceder tantos dos primeiros números do produto. Mas, se não exceder, terá um a menos” (Oughtred, 1633b, p. 6, tradução nossa).

socializassem as estratégias pensadas para a resolução do problema com os demais colegas de turma²⁰.

Distinguindo-se da Folha do Aluno, o Guia do Professor apresenta três tópicos principais para o desenvolvimento da prática. O primeiro tópico contém informações ligadas ao conteúdo matemático que será abordado na prática laboratorial e como esse conteúdo é apresentado na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), sendo indicados a unidade temática, os objetos de conhecimento, as habilidades relacionadas a esse objeto e o ano para a aplicação do experimento (anos finais do Ensino Fundamental ou Ensino Médio).

Quadro 3 – Informações do primeiro tópico do Guia do Professor.

Unidades Temáticas	Números
Objetos de Conhecimento	Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números naturais.
Habilidades	(EF06MA03) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora (Brasil, 2018, p. 300).
Ano	6º ano do Ensino Fundamental (Anos Finais).

Fonte: Elaborado pelas autoras (2024).

Em seguida, em seu segundo tópico, são apresentados aspectos gerais do experimento, sendo eles a sinopse, os objetivos do experimento, tanto para o docente quanto para o aluno, os conhecimentos prévios necessários para que o aluno consiga acompanhar a prática e a duração do experimento.

Quadro 4 – Informações do segundo tópico do Guia do Professor.

Sinopse	A operação aritmética de multiplicação é considerada uma dentre as quatro operações básicas da Matemática, a qual é, muitas vezes, apresentada como a soma de parcelas iguais. Porém, embora seja amplamente utilizada na vida escolar, acabou sendo reduzida à aplicação de um algoritmo. Sendo assim, os alunos mecanizam procedimentos para a realização de cálculos sem entenderem o processo envolvido. Dessa forma, nesse experimento, será apresentada aos alunos a multiplicação por meio da manipulação de um instrumento histórico matemático, intitulado Duas Régua para Cálculo, desenvolvido durante os séculos XVI e XVII, como forma de fazê-los refletir acerca do
----------------	--

²⁰ Essas perguntas não estavam no tratado matemático, porém, foram utilizadas com o intuito de nortear os discentes em cada etapa de resolução do problema.

		processo multiplicativo realizado. Além disso, contará com a manipulação de um protótipo desse instrumento, caracterizado como um material manipulável que associará a História da Matemática com o Laboratório de Matemática, permitindo a construção do conhecimento por parte do aluno.
Objetivos do experimento	Docente	Constatar a compreensão de conceitos sobre a operação aritmética de multiplicação, que foram explicados em aulas anteriores e que servirão como base para o entendimento das etapas do experimento;
		Apresentar as Duas Régua para Cálculo de William Oughtred;
		Mediar a execução do experimento, desenvolvendo perguntas que evidenciem as estratégias formuladas pelos alunos para a resolução do problema proposto.
	Aluno	Desenvolver estratégias para a resolução do problema adaptado;
		Compreender como se realiza multiplicações por meio das Duas Régua para Cálculo;
		Relacionar o algoritmo tradicional de multiplicação com o método empregado por William Oughtred, utilizado no problema;
Conhecimentos prévios		Noção das operações fundamentais da adição, subtração e de multiplicação;
		Sistema de numeração decimal: leitura, escrita, comparação e ordenação de números naturais;
		Composição e decomposição de um número natural;
		Concepção do significado de dobro, metade, triplo.
Duração do experimento		2h/a

Fonte: Elaborado pelas autoras (2024).

Após isso, o Guia do Professor menciona, como terceiro tópico, uma introdução apresentando as Duas Régua para Cálculo e inicia as descrições das etapas do experimento, tendo informações acerca do material necessário para sua aplicação e a resolução do problema e das perguntas propostas na Folha do Aluno, além do fechamento da prática e as possíveis variações desse instrumento. Na seção a seguir, apresentaremos as reflexões dos discentes e as estratégias traçadas para a resolução do problema proposto.

Resultados e discussões

Para a resolução da Etapa 1, foi solicitado às duplas que lessem e refletissem sobre o problema proposto e, a partir disso, anotassem as estratégias de resolução para o problema. Diante disso, no Quadro 5 a seguir, encontram-se as estratégias pensadas por cada dupla.

Quadro 5 – Percepções das duplas sobre a primeira pergunta da Etapa 2.

Dupla	Estratégia registrada
Dupla 1	1 xelim — 12 centavos; 1 libra — 20 xelins. Processo: 1) Converter as 50 libras em xelins; 2) Converter os xelins obtidos + os 5 xelins do problema em centavos.
Dupla 2	1) Primeiramente será convertido 50 libras para xelim. Como 1 libra equivale a 20 xelins, então 50 libras irá equivaler à $50 \times 20 = 1000$, ou seja, 1000 xelins; 2) Somaremos 1000 xelins à 5 xelins, ou seja, 1005 xelins; 3) O terceiro passo é converter xelins para centavos. Logo, como 1 xelim vale 12 centavos, então 1005 xelins equivalem à 1005×12 centavos, ou seja, 12.060 centavos.

Fonte: Elaborado pelos autores (2024).

Notou-se que as estratégias utilizadas pelas duplas foram as mesmas, porém a Dupla 2 as descreveu de maneira mais detalhada. Como o objetivo do experimento era refletir sobre a operação de multiplicação, a partir do instrumento matemático histórico, escolheu-se estabelecer os mesmos passos de resolução do problema para cada equipe, sendo descritos como perguntas na Etapa 2. Sendo assim, para cada pergunta, as duplas tinham que realizar a operação de multiplicação por meio do manuseio das réguas e com a matemática moderna.

Quadro 6 – Pergunta 1 da Etapa 2.

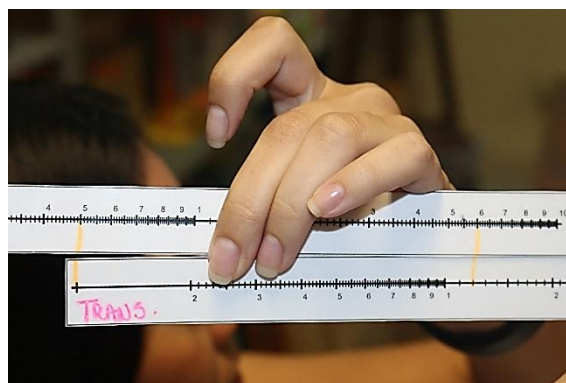
Pergunta 1: Quantos centavos correspondem a 5 xelins?		
Multiplicação por meio do manuseio das réguas de William Oughtred	Dupla 1	Após nomearmos a réguas como <i>Staffe</i> e <i>Transversarie</i> : 1) identificamos os fatores 5 na <i>Staffe</i> e 1 na <i>Transversarie</i> ; 2) aplicamos o primeiro fator na <i>Staffe</i> ao número 1 na <i>Transversarie</i> ; 3) identificamos o segundo fator (12) na <i>Transversarie</i> , observando que ela é uma escala decimal.
	Dupla 2	Multiplicação por meio do manuseio das réguas de William Oughtred: 1) marcou-se o primeiro fator, o número 5, na <i>Staffe</i> , alinhando ao número 1 na <i>Transversarie</i> ; 2) na <i>Transversarie</i> , foi marcado o segundo fator, o número 12. O número 12 foi encontrado na segunda parte da graduação (da esquerda para a direita), identificado entre os números 1 e 2; 3) o resultado é encontrado na <i>Staffe</i> , na segunda metade da graduação (que está alinhado ao número 12) e corresponde a 6 dezenas, ou seja, 60 centavos.

Multiplicação com a matemática de hoje:	Dupla 1	$5.12 = 60 \text{ centavos.}$
	Dupla 2	$\frac{5}{1} = \frac{x}{12} \Rightarrow x = 5 \times 12 \Rightarrow x = 60.$

Fonte: Elaborado pelas autoras (2024).

Para essa primeira pergunta, a Dupla 2 destaca que as réguas possuem duas metades, podendo encontrar o número 12 (segundo fator da multiplicação) na segunda metade delas, enquanto o número 5 é encontrado na primeira metade. Ainda indica que o resultado da multiplicação é encontrado também na segunda metade e que corresponde ao total de 6 dezenas.

Figura 3 – Manuseio da Dupla 2 para resolver a primeira pergunta.



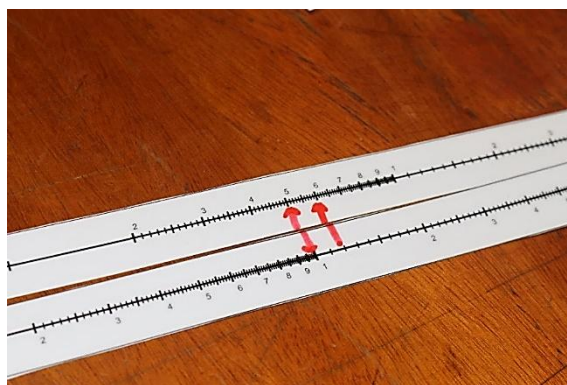
Fonte: Acervo das autoras (2024).

Ao referirem-se às “metades” das réguas, a Dupla 2 sugere a primeira delas partindo de uma marcação sem numeração até o primeiro número 9 (observando da esquerda para a direita), e a segunda metade partindo do número 1 até o número 10. Com os registros mencionados pela Dupla 2, pôde-se perceber que, para a resolução dessa pergunta, os números que representam a ordem das dezenas foram encontrados na segunda metade das réguas, enquanto o número que representa a ordem das unidades foi encontrado na primeira metade da régua.

Já a Dupla 1 observou que os números que estão em evidência nas réguas (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 2, ...etc) podem representar outros, como o número 6, que é o representante de 60 (resultado da multiplicação). Essa observação relatada pela equipe acontece devido à menção de Oughtred (1633b, p.6, tradução nossa) dizendo que “[..] o produto de dois números terá tantos lugares como os dois fatores, se o menor deles exceder tantos dos primeiros números do produto. Mas, se não exceder, terá um a menos”.

Desse modo, a respeito da quantidade de algarismos que o produto poderia ter, a equipe observou que, se o menor fator que está sendo multiplicado é o número 5 e, por meio do manuseio das réguas, o primeiro algarismo do produto é o número 6, esse produto poderá ter a quantidade de algarismos presentes nos dois fatores (ou seja, 3 algarismos, já que os números que estão sendo multiplicados são o 5 e o 12) ou um algarismo a menos. Como 5 não excede 6, pois $5 < 6$, o produto terá um algarismo a menos (dois algarismos no total), que é o número 60.

Figura 4 – Manuseio da Dupla 1 para resolver a primeira pergunta.



Fonte: Acervo das autoras (2024).

Assim, para a pergunta 2, a Folha do Aluno solicitava que as duplas respondessem por meio do manuseio das réguas e também com a matemática de hoje. No Quadro 7 a seguir, estão disponibilizados os registros escritos por cada dupla.

Quadro 7 – Pergunta 2 da Etapa 2.

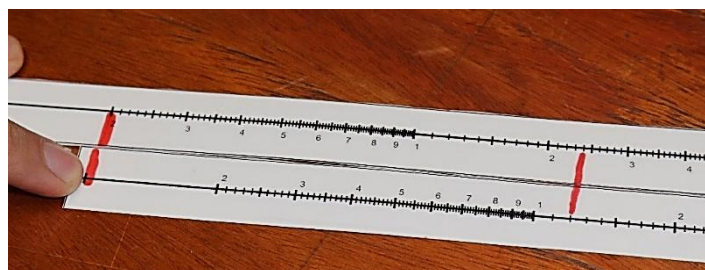
Pergunta 2: Quantos centavos correspondem a uma libra?		
Multiplicação por meio do manuseio das réguas de William Oughtred	Dupla 1	Alinhando o 2 da <i>Staffe</i> (20 → primeiro fator) com o 1 da <i>Transversarie</i> e depois observando a correspondência do 12 (segundo fator) com o 24 da <i>Staffe</i> , que representa 24 dezenas. $20 \times 12 = \underline{240}$ $12 < 24$ -1 algarismo
	Dupla 2	1º) como 1 libra vale 20 xelins e 1 xelim vale 12 centavos, então alinhamos o 20 (da <i>Staffe</i>) ao 1 (na <i>Transversarie</i>). A primeira parte da graduação adotamos como dezena; 2º) buscamos o número 12 na segunda parte da <i>Transversarie</i> (representando a dezena), localizado entre as graduações de 1 e 2; 3º) o número alinhado ao segundo fator, na <i>Staffe</i> , é o resultado da operação. Ele está localizado na quarta

		marcação, entre o 2 e o 3 na segunda parte da <i>Staffe</i> . Como adotamos a primeira parte como dezena, então a segunda será a centena. Logo, são 2 centenas e 4 dezenas, ou seja, 240 centavos.
Multiplicação com a matemática de hoje:	Dupla 1	$20 \times 12 = 240$
	Dupla 2	$\frac{20}{1} = \frac{x}{12} \Rightarrow x = 20 \times 12 = 240 \Rightarrow x = 240.$

Fonte: Elaborado pelas autoras (2024).

Para a multiplicação, com o manuseio das réguas, a Dupla 1 realizou o mesmo procedimento da pergunta anterior e aplicou as indicações de William Oughtred para descobrir a quantidade de algarismos do produto. Diante disso, esse produto poderia ter quatro ou três algarismos e, como o menor fator é o número 12 e $12 < 24$ (que são os primeiros números do produto), então o produto terá três algarismos, que é o número 240.

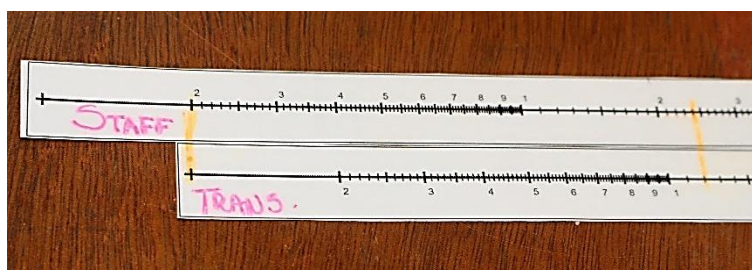
Figura 5 – Manuseio da Dupla 1 para resolver a segunda pergunta.



Fonte: Acervo das autoras (2024).

Diferente da Dupla 1, a Dupla 2, ao mencionar sua resposta, não sinaliza a utilização da indicação de William Oughtred, porém, denota que a primeira parte da graduação (primeira metade) da régua *Staffe* corresponde às dezenas e a primeira metade da régua *Transversarie* corresponde às unidades. Em seguida, adotam a segunda metade da régua *Transversarie* como sendo a de dezenas e a segunda metade da régua *Staffe* como sendo as de centenas, encontrando o número 240 correspondendo ao produto.

Figura 6 – Manuseio da Dupla 2 para resolver a segunda pergunta.



Fonte: Acervo das autoras (2024).

Adiante, no Quadro 8, estão os registros escritos por cada dupla referentes à terceira pergunta.

Quadro 8 – Pergunta 3 da Etapa 2.

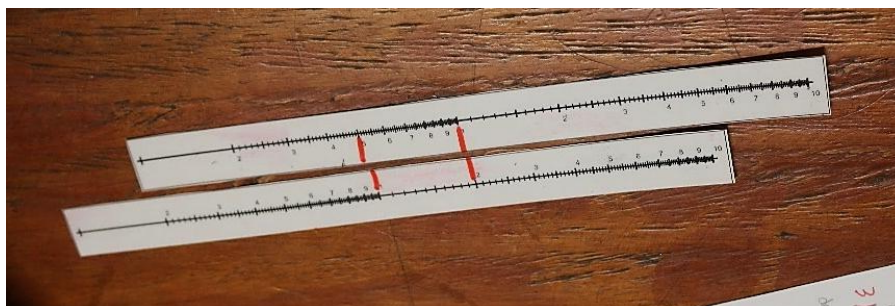
Pergunta 3: Quantos centavos correspondem a 50 libras?		
Multiplicação por meio do manuseio das réguas de William Oughtred	Dupla 1	1º) alinhando o 2 da <i>Staffe</i> com o 1 da <i>Transversarie</i> e depois observando a correspondência do 50 (segundo fator) com o 10 da <i>Staffe</i> , que agora representa 10 centenas, que é 1000 xelins; 2º) agora, alinhamos as 10 centenas com o 1 da <i>Transversarie</i> , de forma que o segundo fator (que é 12, representando os centavos) está alinhado com 12 unidade de milhar na <i>Staffe</i> , representando 12.000 centavos. $20 > 10$ $20 \times 50 = \underline{1000}$
	Dupla 2	1º) utilizaremos os valores encontrados na questão anterior, que 1 libra equivale a 240 centavos. Primeiramente, encontramos o 50 na <i>Staffe</i> (na primeira parte da graduação), alinhado ao número 1 na <i>Transversarie</i> ; 2º) adotamos a primeira parte da <i>Transversarie</i> como unidade e centena (para que consigamos encontrar o resultado na <i>Staffe</i>); 3º) marcamos o 240 na primeira parte da <i>Transversarie</i> , encontrando 12.000 na <i>Staffe</i> ; 4º) 50 libras equivalem a 12.000 centavos.
Multiplicação com a matemática de hoje:	Dupla 1	$20 \times 50 = 1000$ $1000 \times 12 = 12.000$
	Dupla 2	$\frac{50}{1} = \frac{x}{240} \Rightarrow x = 50 \times 240 \Rightarrow x = 12.000.$

Fonte: Elaborado pelas autoras (2024).

Para a resolução dessa pergunta, as duas duplas registraram estratégias diferentes, chegando à mesma resposta final. A Dupla 1 alinha o número 2 da régua *Staffe*, que representa o número 20, com o número 1 na régua *Transversarie*, e, em seguida, observa a correspondência do 50 com o número 10, que corresponde a 10 centenas. Assim como nas perguntas anteriores, a dupla observa que o produto de 20 por 50 pode ter quatro ou três algarismos, porém, como $20 > 10$, ou seja, temos que 20 excede 10, então o produto $20 \times 50 = 1000$. Em seu segundo passo, a dupla alinha as 10 centenas encontradas na

Staffe ao número 1 na régua *Transversarie*, de modo que o número 12 na *Transversarie* esteja alinhado a 12.000 no *Staffe*.

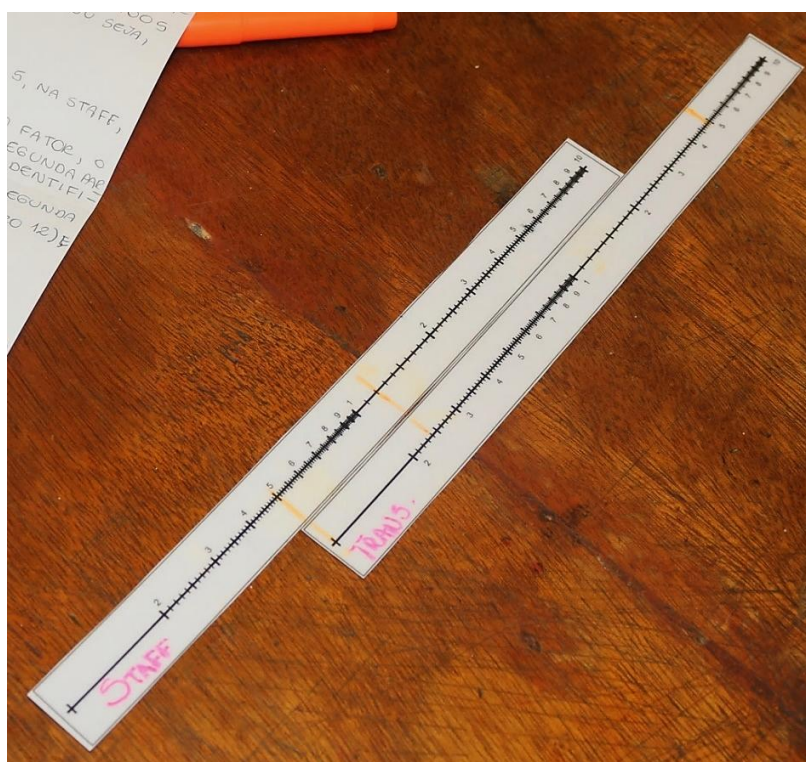
Figura 7 – Manuseio da Dupla 1 para resolver a terceira pergunta.



Fonte: Acervo das autoras (2024).

Já a Dupla 2 utiliza o resultado encontrado na questão anterior para solucionar a terceira pergunta e reitera dizendo que, para a régua *Transversarie*, a primeira metade se refere às ordens das unidades e das centenas. Desse modo, primeiro o número 50 é encontrado na primeira parte da graduação da régua *Staffe* (primeira metade) e alinhado ao número 1 na régua *Transversarie*. Em seguida, o número 240 é encontrado na primeira metade da *Transversarie*, estando alinhado ao 12.000 na régua *Staffe*.

Figura 8 – Manuseio da Dupla 2 para resolver a terceira pergunta.



Fonte: Acervo das autoras (2024).

Como a última pergunta solicitava que as duplas registrassem o valor, em centavos, que o comerciante deveria pagar ao seu fornecedor, o procedimento para a obtenção da resposta final foi o mesmo, a soma de 12.000 (valor obtido na terceira pergunta) com 60 (valor obtido na primeira pergunta), resultando em 12.060 centavos. Diante disso, não houve a criação de um novo quadro para registro das respostas.

Além disso, é interessante observar também que, para realizar a multiplicação com a matemática de hoje, as duplas realizaram diferentes formas de cálculo para responder às três perguntas. Enquanto a Dupla 1 realizava a operação de multiplicação entre dois fatores, a Dupla 2 utilizava o conceito de proporcionalidade, igualando duas razões, chegando, assim, ao produto esperado.

Dessa forma, a prática laboratorial proporcionou aos discentes a mobilização não apenas da operação de multiplicação, mas também dos conceitos relacionados a ela, como o de sistema de numeração decimal, por meio da utilização das ordens das unidades, dezenas, centenas e milhar, a multiplicação por potências de 10 e proporcionalidade.

Considerações Finais

Este estudo teve como objetivo discutir as reflexões dos discentes da disciplina de LEA do curso de Licenciatura em Matemática da UECE, a respeito da operação de multiplicação, utilizando a escala dos Números do instrumento matemático Duas Régua para Cálculo em uma prática laboratorial no semestre 2024.1.

Diante disso, o fato dos discentes terem a chance de manipular uma reconstrução da escala dos Números das Duas Régua para Cálculo, para a compreensão dos conceitos da operação aritmética de multiplicação, transformou a prática laboratorial em uma experiência dinâmica, em que o material didático manipulável atuou como recurso da interação entre aluno, ministrantes e conhecimento, permitindo a integração de diversos conteúdos matemáticos que, muitas vezes, são estudados isoladamente, sem um significado real para os discentes.

Ao longo do estudo, pôde-se observar que, à medida em que alguns conhecimentos relacionados à operação aritmética de multiplicação, aos conceitos de sistema de numeração decimal, ao uso das ordens e à proporcionalidade, foram aplicados de forma prática, percebeu-se uma possível contribuição para a significação da operação de multiplicação. O mesmo pode ser dito sobre a capacidade de perceber como esses diferentes conceitos se interconectam. Assim, nota-se que o potencial didático do

instrumento não reside diretamente nele, ou em sua forma física, mas nas ações que podem ser realizadas com ele.

Nesses termos, entende-se que o instrumento Duas Régua para Cálculo pode ser integrado ao Laboratório de Ensino de Aritmética (LEA) como um recurso adicional à disposição do professor para auxiliar no desenvolvimento de práticas que visem refletir, criar ou construir o conhecimento matemático relacionado à operação aritmética de multiplicação.

Para futuras pesquisas, é importante destacar que ainda há muito a ser investigado sobre o potencial do instrumento Duas Régua para Cálculo. Neste estudo, por exemplo, foi enfatizada apenas a operação aritmética de multiplicação, porém ainda são necessárias iniciativas para examinar outras questões matemáticas e epistemológicas, que permeiam a mesma escala, por exemplo, para os conceitos relacionados à proporcionalidade e sua aplicação em situações práticas.

Referências

BOGDAN, R. C., & BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Portugal: Porto Editora.

CEARÁ. **Projeto Pedagógico do Curso de Licenciatura em Matemática — UECE**. Fortaleza, 2018.

JARDINE, B. Reverse-Printed Paper Instruments (With a Note on the First Slide Rule). **Bulletin Of The Scientific Instrument Society**, [S.I], v. 128, p. 36-42, 2016.

LIMA, A. C. B. de; SOARES, K. da C.; PEREIRA, A. C. C. Aspectos históricos e matemáticos incorporados na construção da escala dos Números de William Oughtred (1574-1660). In: COSTA, Elizangela André da Silva; FREITAS, Bruno Miranda; DANTAS, Jeane Pereira (org.). **Diálogos entre escola e universidade na formação continuada**. Fortaleza: Impreco, 2022. p. 94-109.

LORENZATO, S. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: S. Lorenzato (Org.), **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores** (pp. 3-37). Campinas, SP: Autores Associados 2012.

OUGHTRED, W. **An addition vnto the vse of the instrvment called the Circles of Proportion, for the working of Nauticall Questions**. London: Augustine Mathewes, 1633a.

OUGHTRED, W. **Key of Mathematicks**. London: John Salusburn, 1694.

OUGHTRED, W. **The Circles of Proportion and the Horizontal Instrvment**. London: Elias Allen, 1632.

OUGHTRED, W. **The Circles of Proportion and the Horizontal Instrvment.**
London: Augustine Mathewes, 1633b.

OUGHTRED, W. **The Circles of Proportion and the Horizontal Instrvment.**
London: W. Hall, 1660.

OUGHTRED, W. **The Circles of Proportion and the Horizontall Instrvment.**
London: Elias Allen, 1639.

PEREIRA, A. C. C.; SAITO, F. Os instrumentos matemáticos na interface entre história e ensino de matemática: compreendendo o cenário nacional nos últimos 10 anos.

Boletim Cearense de Educação e História da Matemática, v. 5, n. 14, p. 109-122, 2018. Disponível em:

<<https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/225/174>>. Acesso em: 11 ago. 2020.

PEREIRA, A. C. C.; SANTOS, J. N. dos; PINHEIRO, A. C. M. Prática de Laboratório de Matemática: concepções de licenciandos na construção de saberes docentes. **Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, v. 12, n. 4, p. 1-17, 1 set. 2022.

RIBEIRO, P. H. S.; PEREIRA, A.C.C. Proposta de atividade envolvendo multiplicação a partir da manipulação do Promptuario para a formação de professores. *Revista de Instrumentos, Mmodelos e Políticas em Avaliação Educacional*, [S.l.], V. 4, O. E02321, 2023.

SAITO, F. Algumas considerações historiográficas. IN: SAITO, Fumikazu. **História da Matemática e suas (re)construções contextuais**. São Paulo: Livraria da Física, 2015, p. 19-36.

SAITO, F. CONSTRUINDO INTERFACES ENTRE HISTÓRIA E ENSINO DA MATEMÁTICA. **Ensino da Matemática em Debate**, [S. l.], v. 3, n. 1, 2016.

SAITO, F. **O telescópio na magia natural de Giambattista della Porta**. São Paulo: EDUC/Ed. Livraria da Física/FAPESP, 2011.

WARNER, D. J. What is a scientific instrument, when did it become one, and why? **British Journal for the History of Science**, v. 23, pp. 83-93, 1990.

Recebido em: 30 / 06 / 2024

Aprovado em: 06 / 09 / 2024