



BATALHA DE PERMUTAÇÕES: UM JOGO PARA ABORDAR COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO

BATTLE OF PERMUTATIONS: A GAME TO APPROACH COMBINATORICS IN HIGH SCHOOL

Malcolm Vinícius de Andrade Sedícias¹; Cristiane de Arimatéa Rocha²

RESUMO

A matemática ensinada na etapa final da Educação Básica pode valorizar o ingresso no Ensino Superior em detrimento ao desenvolvimento do ser social, o que pode favorecer a ênfase nos resultados ao invés de oferecer experiências de ensino que oportunizem aos estudantes estarem no centro do processo de ensino e aprendizagem. Tendo em vista que a abordagem da combinatória no Ensino Médio, pode ser centrada em apresentação de definições e fórmulas, esse artigo tem como objetivo analisar a abordagem do jogo 'Batalha de Permutações' e suas contribuições e limitações para a aprendizagem de combinatória em uma experiência no Ensino Médio. A aplicação do jogo ocorreu em uma turma do 2º ano do Ensino Médio, e priorizou a interação entre os estudantes e o contato direto com o objeto de conhecimento e o recurso didático utilizado, tornando-os protagonistas na construção do próprio conhecimento. O jogo mostrou-se uma alternativa a esse paradigma educacional, por exigir que os estudantes do Ensino Médio formassem grupos e interagissem entre si, promovendo o desenvolvimento do "ser social", ao mesmo tempo que, por se tratar de um jogo, permitiu que os estudantes usassem a sua criatividade e desenvolvessem suas habilidades individuais para solucionar problemas de permutação e de permutação com elementos idênticos. Constatou-se que as estratégias adotadas no jogo possibilitaram o uso de representações como o Princípio Fundamental da Contagem, fórmulas e listagens e permitiu a comparação entre algumas delas com o uso de autoavaliação com uso do recurso didático. Como resultado, verificou-se certas características do jogo que podem ser melhoradas e algumas práticas educacionais relacionadas ao assunto trabalhado que devem ser modificadas. Apesar disso, o jogo mostrou-se uma experiência construtiva e que permitiu o desenvolvimento e aprendizado dos estudantes.

Palavras-chave: Ensino Médio; Análise Combinatória; Ensino; Aprendizagem; Ludicidade; Jogo.

ABSTRACT

Mathematics taught in the final stage of Basic Education can value entry into Higher Education to the detriment of the development of the social being, which can favor the emphasis on results instead of offering teaching experiences that give students the opportunity to be at the center of the teaching

¹ Graduando em licenciatura em matemática (UFPE). Estudante (UFPE), Caruaru, Pernambuco, Brasil. Rua Juliana Cayllane Alves Gouveia, 9, Santo Antônio, Surubim, Pernambuco, Brasil, CEP: 55750-000. Email: malcolm.asedicias@ufpe.br.

ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0005-9795-3020>

² Doutora em Educação Matemática e Tecnológica pela Universidade Federal de Pernambuco (UFPE). Professora do Núcleo de Formação Docente da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Caruaru, Pernambuco, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Cala dos Pântanos 704, Jardim Atlântico, Olinda, Pernambuco, Brasil, CEP: 53060-110. E-mail: cristiane.arocha@ufpe.br.

ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-4598-2074>

process and learning. Bearing in mind that the approach to combinatorics in High School can be centered on the presentation of definitions and formulas, this article aims to analyze the approach of the game 'Battle of Permutations' and its contributions and limitations to learning combinatorics in a High School experience. The game was used in a 2nd year High School class and prioritized interaction between students and direct contact with the object of knowledge and the didactic resource used, making them protagonists in the construction of their own knowledge. The game proved to be an alternative to this educational paradigm, as it required high school students to form groups and interact with each other, promoting the development of the "social being", while at the same time, as it was a game, it allowed students to use their creativity and develop their individual skills to solve permutation and permutation problems with identical elements. It was found that the strategies adopted in the game made it possible to use representations such as the Fundamental Counting Principle, formulas and lists and allowed some of them to be compared with the use of self-assessment using the didactic resource. As a result, there were certain features of the game that could be improved and some educational practices related to the subject matter that should be modified. Despite this, the game proved to be a constructive experience that allowed students to develop and learn.

Keywords: High school; Combinatorics; Teaching; Learning; Lucidity; Game.

Introdução

O propósito da Educação foi tema de reflexões e análises ao longo da história em diferentes sociedades. Para Émile Durkheim, “[a Educação] tem como objetivo suscitar e desenvolver na criança um certo número de estados físicos, intelectuais e morais exigidos tanto pelo conjunto da sociedade política quanto pelo meio específico ao qual ela está destinada em particular” (Soares e Weiss, 2021, p. 22). Dessa forma, torna-se evidente que, na visão de Durkheim, o processo educativo tem como objetivo desenvolver social e humanamente os estudantes, ou seja, criar a parte de nossa personalidade que é capaz de conviver e identificar-se com a cultura e a sociedade em que está inserido e desenvolver os estados físicos e mentais que estão relacionados ao próprio estudante.

Em contrapartida a essa ideia, o construtivismo surge como uma nova opção. Numa tentativa de valorizar o aluno, essa teoria acredita que o conhecimento não é adquirido ou absorvido, mas sim construído (Rosa, 1996). O estudante é compreendido como:

um sujeito que procura ativamente compreender o mundo que o rodeia e trata de resolver as interrogações que este mundo provoca. Não é um sujeito que espera que alguém que possui um conhecimento o transmita a ele, por um ato de benevolência. É um sujeito que aprende basicamente através de suas próprias ações sobre os objetos do mundo, que constrói suas próprias categorias de pensamento ao mesmo tempo que organiza seu mundo (Rosa, 1996, p. 34).

Dessa forma, o ensino não se restringe à aula expositiva e, nessa concepção de ensino, o papel do professor é auxiliar ou mediar os estudantes no processo dessa construção. Portanto, com base no que foi exposto, torna-se perceptível que, para o construtivismo, o processo de aprendizagem é uma construção realizada a partir da realidade subjetiva de cada estudante.

No entanto, Sparta e Gomes (2005) chamam atenção para:

a pressão que a preparação para o ingresso na Educação Superior exerce sobre o Ensino Médio. Tal pressão faz com que o Ensino Médio deixe de lado seu papel de formação integral para centrar-se na preparação bem ou mal sucedida para o concurso vestibular das principais universidades, principalmente as públicas. (Sparta e Gomes, 2005, p. 51).

Como consequência, os estudantes não desenvolvem seus interesses na escola e diminuem o desejo pelo estudo. Soma-se a essa ênfase nos resultados, a necessidade de cumprir o currículo da Base Nacional Curricular Comum (BNCC, Brasil, 2018) que pode ser um incentivo para professores acelerarem as discussões sobre temas, apresentando fórmulas matemáticas antes mesmo de oportunizar os estudantes na criação de estratégias próprias de resolução de problemas.

Outra consequência da relação entre Ensino Médio e o ingresso no Ensino Superior foi a perpetuação do que Skovsmose (2000) chamou de paradigma do exercício. Segundo esse autor, o paradigma do exercício é centrado em aulas expositivas sobre o conteúdo, nas quais o papel do aluno é dirimido pelas ações de ouvir e observar o professor, com base na apresentação de questões com resposta única e suas resoluções em sala de aula, não oportunizando, com isso, momentos de reflexões, discussões e investigação do que foi apresentado.

Durante as aulas em que o paradigma do exercício é utilizado, ao assumir a posição de ouvintes, os estudantes não expressam pensamentos críticos e não podem ser realizadas afirmações sobre o que conseguiram internalizar, que significado atribuíram ao que aprenderam, ou que conexão dos conhecimentos apresentados conseguiram fazer com outros já existentes.

Algumas relações do paradigma do exercício e suas repercussões podem ser observadas em aulas de combinatória. Lima (2016) realizou observações em aulas de Combinatória do Ensino Médio e constatou que a sequência adotada por dois professores (definição-resolução de problemas combinatórios pelo professor – resolução de problemas pelos estudantes - correção) não favoreceu a construção de conhecimentos combinatórios pelos estudantes.

Godino e Batanero (2016), pesquisadores da Espanha, afirmam que o ensino de combinatória está centralizado

[...] na aprendizagem de fórmulas combinatórias, na realização de exercícios de cálculo de expressões combinatórias, ou na identificação da operação combinatória contida em um enunciado verbal. Possivelmente devido a essa abordagem, o tema

tem sido considerado como um dos mais difíceis pelos professores, que com frequência, tem preferido omitir seu ensino. (Godino e Batanero, 2016, p. 8).

Na mesma direção, Handaya (2017, p. 13-14) detalhou as dificuldades que os alunos apresentam com o conteúdo de análise combinatória. A primeira é relacionada a interpretar o enunciado, devido a não apresentarem ordens diretas e sucintas. Os enunciados de problemas combinatórios costumam abordar situações fictícias, as quais cabe ao estudante interpretar e ainda complementar as informações, dependendo do contexto escolhido, para depois escolher a melhor maneira de resolvê-lo, ou o modo que a contagem deve ser realizada, para assim evitar esquecer alguma possibilidade ou contar mais de uma vez a mesma. Além disso, vale salientar que um enunciado mal formulado levaria o aluno ao erro, independentemente do domínio que ele possui sobre o assunto.

A segunda dificuldade diz respeito à diferenciação dos tipos de problema combinatórios (Handaya, 2017). Saber diferenciar arranjo, permutação, combinação e seus subtipos é uma atividade complexa para os estudantes. Segundo Vasconcelos e Rocha, “Enquanto no arranjo nós temos uma escolha seguida de uma ordenação, na combinação temos apenas a escolha, ou seja, a ordem na qual os objetos são escolhidos não interessa” (2019, p. 54). Ou seja, a diferença entre arranjo e combinação é dada pela ordem dos elementos do agrupamento escolhido. Se a mudança da ordem dos elementos no agrupamento gerar outra possibilidade, será um problema de arranjo e, em caso contrário, de combinação. Logo, compreender casos nos quais a ordem dos elementos cria uma sequência diferente de elementos, como a verificação de senhas de um cadeado ou a escolha de pessoas de uma turma para serem representante e vice-representante, torna-se uma dificuldade, porque é uma observação que pode vir logo depois da interpretação e que vem a favorecer a escolha de estratégias para contagem.

Nessa perspectiva, deve-se atentar no ensino de combinatória à ênfase no uso de fórmulas presentes nas abordagens desse conteúdo. Apesar de existir fórmulas para os problemas de arranjo, combinação e permutação, bem como para alguns problemas, tais como arranjo com repetição, permutação circular, permutação com elementos idênticos e combinação com repetição, o número de problemas que existem que não são resolvidos com aplicação direta de fórmula é bem amplo. Além disso, saber e memorizar as diferentes fórmulas não auxilia em nenhuma das diferentes dificuldades apresentadas por Handaya (2017).

A partir disso, Rocha (2011), em sua pesquisa com professores de diferentes níveis de escolarização, constatou que àqueles com formação em licenciatura em matemática, apesar de

apresentarem em seu discurso variados conceitos combinatórios (ordenação, repetição, possibilidade e princípio multiplicativo) utilizam em suas abordagens atividades menos variadas (pouca variação de contextos, resolução de questões clássicas, raro recurso aos jogos, uso de regras para facilitar a compreensão dos problemas).

Dessa forma, é perceptível que a prática docente de combinatória pode estar ocorrendo de maneira mecânica, haja vista as pesquisas de Lima (2016), Godino e Batanero (2016) e Rocha (2011). Essa escolha restrita de abordagem pode tornar o conteúdo desinteressante aos alunos.

Com base no exposto, é possível perceber a necessidade de abordagens alternativas para o ensino de combinatória, para que os professores não cedam às pressões do currículo ou dos resultados (ingresso no Ensino Superior) e busque promover a função de desenvolvimento do ser social nessa etapa de escolarização. Dessa forma, o presente artigo se propõe a analisar a abordagem do jogo ‘Batalha de Permutações’ e suas contribuições e limitações para a aprendizagem de combinatória em uma experiência no Ensino Médio.

Para tanto, este artigo está organizado em quatro seções. Na seção seguinte, será apresentado um panorama de investigações sobre recursos didáticos para abordagem de problemas combinatórios. Em seguida, na Metodologia foram descritos os procedimentos utilizados na pesquisa, incluindo a seleção de participantes e a coleta de dados. Em Análise e Discussão dos Resultados, apresenta-se os resultados da pesquisa e algumas discussões sobre a literatura existente. Por fim, em considerações finais, serão resumidos os principais pontos discutidos no artigo, como também sugestões para futuras pesquisas e práticas educacionais.

Recursos Didáticos no Ensino de Combinatória

No ensino de combinatória, ou de outro conteúdo matemático, a variedade de recursos didáticos pode desempenhar um papel de motivação para uma aprendizagem com significados. Os recursos utilizados podem ser materiais tradicionais (quadros e livros didáticos), ou recursos mais inovadores (jogos educativos, aplicativos digitais).

Rocha (2019), em sua pesquisa, examinou os movimentos intencionais priorizados pelo professor em aulas de combinatória no Ensino Médio e constatou que, ao selecionar os recursos didáticos para essas aulas, o professor preferiu usar quadro, livro didático e fichas de exercícios, não incluindo jogos ou recursos tecnológicos digitais.

Rocha (2019) considera que esses recursos foram adequados e proporcionaram boa interação nas aulas. No entanto, entende-se que a utilização e/ou criação de outros recursos/materiais didáticos podem fortalecer o desenvolvimento do raciocínio combinatório

no Ensino Médio, possibilitando a implementação de práticas diferenciadas na formação inicial ou continuada de professores.

Adler (2000) destaca a importância de conceituar recursos na formação de professores de matemática. Dessa forma, faz-se necessário ampliar o entendimento do que se considera recurso no processo educacional de matemática. O recurso abrange aspectos além do manuseio, envolvendo a linguagem e explorando as potencialidades do real e do virtual. Campos e Iglioni (2021, p. 14) consideram relevantes as investigações que discutam “a relação entre os professores e os recursos didáticos de um modo geral” e enfatizam a necessidade de pesquisas sobre recursos no ensino de combinatória, tanto em aspectos metodológicos quanto teóricos.

A preocupação com abrangência e ampliação de recursos didáticos de combinatória é um aspecto de destaque em pesquisas e com frequência são escolhidas como categorias em investigações de levantamento bibliográfico.

Borba *et al.* (2009) realizaram um estudo da arte em anais de eventos no período de 2000 a 2007 sobre o desenvolvimento do raciocínio combinatório. Dentre as categorias elegidas para os trabalhos encontrados, uma delas abordou a análise de recursos didáticos. Como resultado, nessa categoria, as autoras encontraram apenas dois trabalhos, o primeiro que analisou exercícios sobre análise combinatória em coleções de livros didáticos dos anos iniciais; o segundo o uso de um software de construção de uma árvore de possibilidades em turmas de 5º e 6º ano do México. Com esse estudo, as autoras constataram a necessidade de orientações para o trabalho com combinatória nos manuais de livros didáticos, bem como a exploração de recursos tecnológicos para tal fim. No mais, apesar de encontrarem discussões sobre recursos didáticos para combinatória, as pesquisas relatadas não abordam especificamente o Ensino Médio.

Silva e Pessoa (2015) produziram um mapeamento com relação às pesquisas de combinatória entre os anos de 2009 e 2013, escolhendo como uma das categorias os estudos com a utilização de recursos. Os recursos observados nessa pesquisa também focalizaram apenas livros didáticos e o uso de softwares para o ensino de combinatória, reforçando a necessidade de investigar outros recursos para esse fim.

Campos e Iglioni (2021) também realizaram um levantamento bibliográfico em trabalhos acadêmicos que discutem sobre combinatória no período de 2015 a 2019. Os autores selecionaram nesse período 22 trabalhos (20 dissertações e 2 teses) e verificaram que apenas três utilizaram recursos didáticos sobre esse conteúdo. O primeiro utilizou uma sequência didática com base em jogos, o segundo um aplicativo para smartphones e o terceiro oficinas

com software R que relacionam conteúdos de combinatória e probabilidade com o pensamento computacional. Esses recursos foram elaborados para o Ensino Médio.

As pesquisas de Chilela (2013) e Ambrozi (2017) utilizaram jogos para o ensino de combinatória no Ensino Médio. Chilela (2013) utilizou o jogo de pôquer, a fim de prever as possibilidades de agrupamentos nas diversas mãos do pôquer e observou que, ao diminuir o número de cartas na mão, tal ação possibilitou o uso de diferentes estratégias para prever o jogo, permitindo processos enumerativos como a árvore de possibilidades. Já Ambrozi (2017) utilizou, dentre outros, o jogo Senha que auxiliou a compreensão dos alunos em problemas de arranjo e permutação.

Esse fator demonstra que o uso de diferentes tipos de recursos possibilita a exploração de múltiplas abordagens pedagógicas, enriquecendo o processo de ensino e facilitando a compreensão dos conceitos combinatórios. Portanto, é essencial que os educadores estejam seguros para utilizar uma variedade de recursos didáticos no ensino de combinatória, a fim de potencializar o desenvolvimento das habilidades matemáticas dos estudantes.

Metodologia

Para alcançar o objetivo ao qual este artigo se destina, uma série de planejamentos foram realizados, a fim de se identificar a melhor forma de pesquisar as informações necessárias. Segundo Tozoni-Reis (2009, p.7) a pesquisa é compreendida “como uma ação de conhecimento da realidade, um processo de investigação minucioso e sistemático, seja ela natural ou social”.

A presente pesquisa ocorreu em uma turma de segundo ano do Ensino Médio com 40 estudantes da Escola Técnica Estadual Antônio Arruda de Farias, situada no município de Surubim em Pernambuco. Utilizamos como abordagem metodológica a pesquisa de campo, o que segundo Tozoni-Reis (2009, p. 28) se caracteriza “pela ida do pesquisador ao campo, aos espaços educativos para coleta de dados, com o objetivo de compreender os fenômenos que nele ocorrem.”

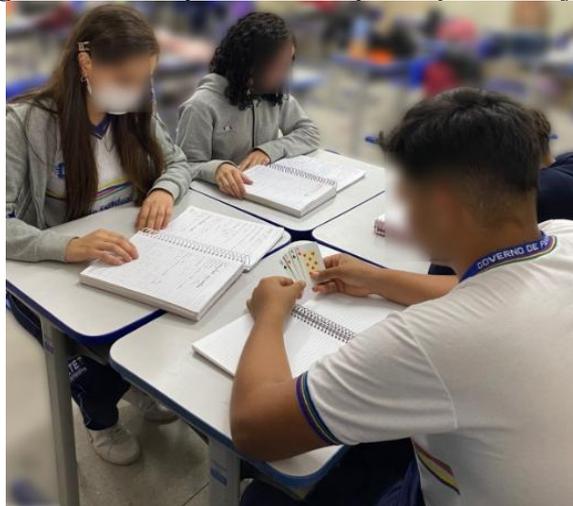
Nessa perspectiva, foi elaborado um recurso didático denominado Batalha das Permutações que foi aplicado nas duas últimas aulas do turno vespertino (15h10min às 16h50min.), em um cenário com condições ambientais adversas, como o desligamento dos ares-condicionados, o que contribuiu para a agitação dos alunos. No entanto, apesar das dificuldades, os estudantes demonstraram interesse na atividade. O professor de matemática da turma já havia trabalhado os problemas de permutação e arranjo com os estudantes.

Como o objeto de pesquisa é algo de natureza subjetiva e, em simultâneo, é fruto de uma experiência social, foi conveniente utilizar como instrumentos de coleta a observação participante e o questionário para obter informações sobre a experiência vivenciada.

A observação participante permite uma aproximação do pesquisador ao fenômeno observado e “conta com a participação do próprio pesquisador” (Tozoni-Reis, 2009, p. 28). Por sua vez, a escolha do questionário se deve tanto ao seu valor enquanto ferramenta de coleta de dados, quanto por ser uma parte do método de pesquisa utilizado. Essa afirmação é validada por Fontelles et al. (2009, p. 7) quando afirmam “uma pesquisa de campo procura coletar dados que lhe permitam responder aos problemas relacionados a grupos, comunidades ou instituições [...] mediante técnicas observacionais e com a utilização de questionários para a coleta de dados”.

A aplicação do jogo Batalha das Permutações foi realizada em grupos de, em média, cinco pessoas para permitir que os estudantes compartilhem ideias e expliquem elas uns aos outros. Na Figura 1, observa-se a participação de um dos grupos.

Figura 1 — Grupo de alunos participando do jogo



Fonte: Acervo da pesquisa (2024)

A metodologia adotada pretendia possibilitar a interação entre os alunos, a fim de possibilitar discussões e trocas de saberes, para incluir os alunos que possuem dificuldades no assunto, garantindo a oportunidade de contribuir para a elaboração de ideias para a resolução dos problemas combinatórios apresentados e permitir que outros alunos também possam contribuir para aprendizagem de combinatória.

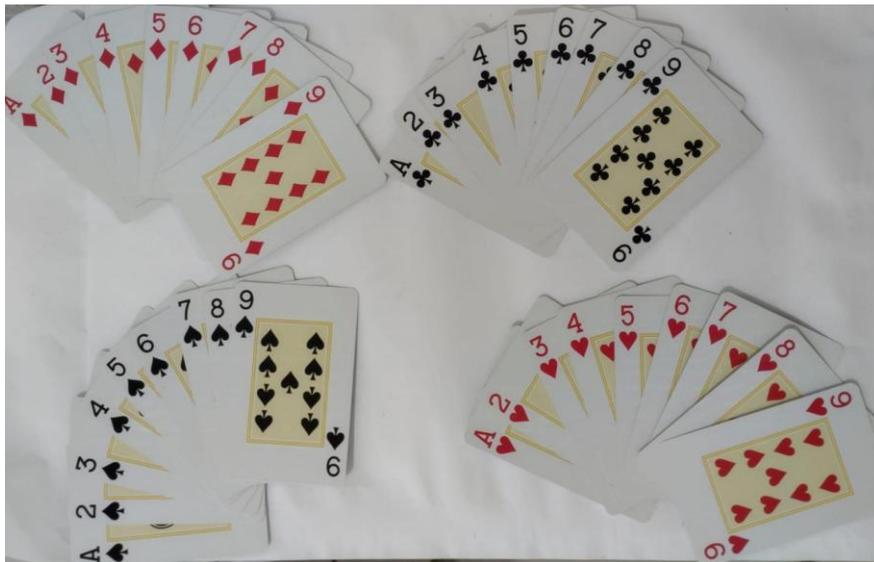
Após a aplicação do jogo, os estudantes receberam um link para responder um questionário constituído de dez perguntas, que versavam sobre: a atividade, a avaliação sobre

o recurso utilizado e as relações de permutações com atividades do dia a dia apresentadas pelos estudantes. Apesar de haver 40 estudantes na turma, apenas 17 responderam o questionário. A apresentação das perguntas utilizadas no questionário, bem como, uma discussão sobre as respostas coletadas será realizada na seção de análise. A seguir apresenta-se a atividade aplicada e os questionamentos para a discussão da Combinatória utilizada.

Discutindo a proposta de atividade: Batalha das Permutações

Com o objetivo de mostrar aos alunos uma forma diferente de ensinar e de aprender combinatória, foi elaborada uma atividade lúdica e interativa. O jogo, intitulado “Batalha de Permutações”. Foram utilizados para elaboração do jogo apenas dois baralhos constituídos de 9 cartas {A,2,3,4,5,6,7,8,9} de cada naipe {copas, ouros, paus, espada}, juntando 36 cartas em cada baralho, conforme se apresenta na figura 2. Essa escolha foi proposital já que os estudantes não estavam familiarizados com o valor das demais cartas do baralho. Caso o professor não possua baralhos, cartas de quatro cores diferentes enumeradas de 1 a 9 podem ser impressas e recortadas para a atividade.

Figura 2 – Baralho de cartas utilizadas no jogo



Fonte: Autor (2024)

Inicialmente, foi realizada uma breve revisão dos conceitos de permutação e arranjo e, logo em seguida, explicitado que a permutação consiste em trocar a posição dos elementos de um conjunto, enquanto o arranjo consiste em selecionar uma quantidade de elementos de um conjunto, sendo essa quantidade menor que o total. (Se for escolher todos os elementos do

conjunto o arranjo será igual à permutação). Ressaltou-se ainda que, quando se trata de arranjo, a ordem em que os elementos são selecionados importa e gera novas possibilidades. Apesar da explicitação dessas regras não foram apresentadas as fórmulas nessa conversa.

Foram distribuídas três cartas de números diferentes para cada grupo e os alunos responderam a pergunta “quantos números de três algarismos podem ser obtidos com os três números descritos nas cartas?”. Eles deveriam, em um primeiro momento, responder essas perguntas sem usar as cartas e, em seguida, com o apoio das cartas.

Os registros dos números gerados com as cartas devem ser realizados no papel, para cada pergunta realizada. Dessa maneira, é possível comparar a resposta inicial com a obtida nas cartas, o que sugere uma autoavaliação das primeiras ideias por meio de recursos didáticos, já que o número dito pode ser maior do que o observado nas cartas, ou vice-versa.

Observa-se ainda que cada grupo recebe um trio de cartas e as respostas podem diferir de acordo com as cartas recebidas. Por exemplo, o grupo 1 recebeu todas as cartas diferentes ($3 \times 2 \times 1 = 6$) e o grupo 2 recebeu duas cartas iguais (apenas três possibilidades).

Em um segundo momento do jogo, acrescentou-se uma carta extra em cada grupo para realização do mesmo exercício. De modo análogo, em cada exercício eles deveriam anotar todas as possibilidades de números que podiam formar, nas condições determinadas pelas perguntas, com as cartas que possuíam. Esse acréscimo ampliava o número de possibilidades, para todas as cartas diferentes ($4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$. Vinte e quatro possibilidades).

Em um terceiro momento, as cartas foram recolhidas e dessa vez receberam três novas cartas, tais que duas eram repetidas. Inicialmente, os alunos deveriam dizer, sem usar as cartas, de quantas maneiras diferentes é possível formar números com três algarismos, com os algarismos explicitados nas cartas. Nesse caso, em específico, o número de possibilidades era reduzido, com duas cartas iguais e uma diferente seria obtido apenas 3 números diferentes ($\frac{3 \times 2 \times 1}{2} = \frac{6}{2} = 3$. Três possibilidades).

Outras situações exploraram a inserção de cartas iguais em um conjunto de quatro cartas, produzindo as situações de apresentar os números formados a partir de duas cartas iguais e duas diferentes ($\frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2} = \frac{24}{2} = 12$. Doze possibilidades) e a partir de três cartas iguais e 1 diferente ($\frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1} = \frac{24}{6} = 4$. Apenas quatro possibilidades).

Essa prática permitiu a discussão de situações combinatórias que apresentavam algumas restrições, como é o caso do seguinte questionamento: de quantas maneiras diferentes poderiam permutar os três algarismos de forma que os que estavam repetidos ficassem juntos? Nesse questionamento, a restrição tem a ver com a posição das cartas de

estarem sempre juntas. Em um conjunto de cartas (1, 2, 2) obtém-se duas possibilidades (122, 221). A terceira possibilidade separa os números iguais (212).

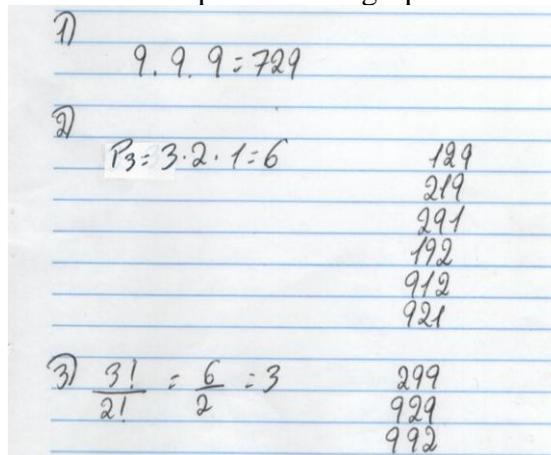
A abordagem com esse recurso no ensino de combinatória pode permitir o surgimento de descobertas matemáticas, incluindo a percepção sobre a influência de ordem e repetição de elementos em uma possibilidade, processos de sistematização da enumeração, proposição de regras e de generalização ou a utilização de outras estratégias para solucionar os problemas, como a “árvore de possibilidades” e o “Princípio Fundamental da Contagem” (Rocha, 2011; 2019).

Análise e Discussões dos resultados

Com a adoção do recurso, foi possível observar que os estudantes conseguiram compreender os problemas combinatórios propostos. Os grupos concluíram que permutar três algarismos, sendo dois deles iguais, de modo que esses dois números devem estar juntos, é numericamente igual a permutar apenas dois algarismos. Ao se utilizar quatro cartas com duas idênticas, concluíram que o número de possibilidades era igual ao número de possibilidades que obtiveram ao permutar 3 algarismos.

Para ilustrar a atividade vivenciada, apresenta-se na figura 3 as respostas registradas de um dos grupos que participaram do momento.

Figura 3 – Folha de resposta de um grupo LPMMG (parte 1)



Fonte: Autor (2024)

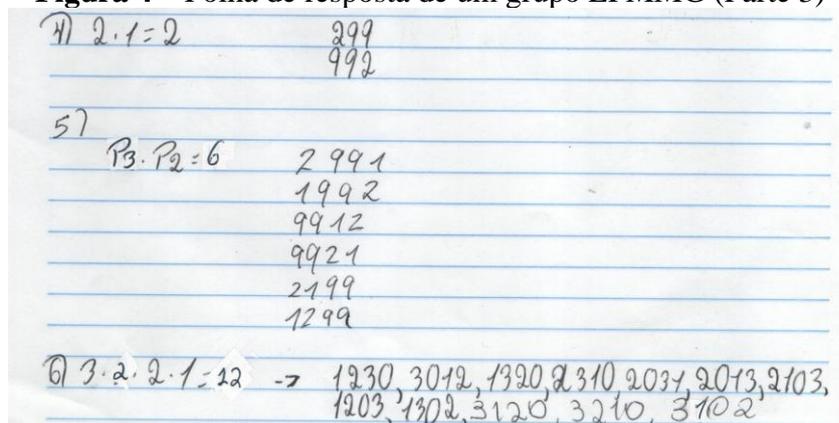
Nesse recorte, os alunos utilizam diferentes estratégias de resolução, com base no Princípio Fundamental da Contagem - PFC (exercício 1- problema de permutação) e fórmula e listagem (exercício 2 - problema de permutação e 3 - problema de permutação com elementos idênticos).

O primeiro exercício era responder “de quantas formas distintas 3 algarismos diferentes podem ser permutados?”. A aluna, no entanto, respondeu como se a pergunta fosse “de quantas formas 3 algarismos, dos 9 existentes, com reposição, podem ser permutados?”, denotando a existência de dificuldades com o conteúdo.

Nota-se que a listagem está com princípio de sistematização ao fixar elementos em determinadas posições (ocorre com o 2 e 9 na primeira posição no exercício 2). A respeito disso, Rocha (2019) aponta a necessidade de, durante abordagem de combinatória no Ensino Médio, discutir variados tipos de representação (PFC, Fórmulas e Listagem, bem como a conversão entre eles. Nesse caso, o Grupo LPMMG relaciona a fórmula ao registro de listagem.

Os problemas de permutação com elementos idênticos na segunda parte (Figura 4) tiveram restrições de números iguais estarem juntos, o que impossibilitou o uso apenas de fórmulas e ampliou a utilização do “Princípio Fundamental da Contagem”.

Figura 4 – Folha de resposta de um grupo LPMMG (Parte 3)



Fonte: Autor (2024)

Nesse outro recorte, os alunos utilizam dessa vez estratégias de resolução de problemas de permutação com elementos idênticos, em que tais elementos devem estar juntos - nos problemas 4 e 5 - e na questão 6, foram convidados a supor a existência de uma carta de número 0. Neste problema, os estudantes deveriam permutar os 4 algarismos de forma a obter resultados todos os possíveis resultados distintos. As possibilidades são $3 \times 3 \times 2 \times 1$, porque, para o 1º algarismo, apenas 3 dos 4 podem ser escolhidos, afinal, se o 0 for escolhido, o número resultante não teria 4 algarismos. Em seguida, o zero volta a poder ser utilizado e, com isso, volta-se a ter 3 possibilidades. Com o que foi explicado, percebe-se que o grupo cometeu um equívoco na resolução do exercício.

Como discutido anteriormente, o questionário foi elaborado com dez perguntas que estão apresentadas no quadro 1.

Quadro 1 — Perguntas utilizadas no questionário

Perguntas
1.Você possuía dificuldade no assunto “Permutação Simples” e “Permutação com repetição”?
2.O jogo trabalhado em sala lhe ajudou a compreender melhor o assunto?
3.Qual foi a parte mais difícil do jogo?
4.Qual foi a parte mais fácil?
5.Quais mudanças você faria no jogo?
6.O jogo lhe deixou alguma dúvida com relação ao assunto?
7.Você acha que o jogo deveria ser aplicado na 1º aula sobre o assunto ou deveria ser aplicado após algumas aulas?
8.O que você entende por permutação?
9.Que tipos de permutação você conhece?
10.Em quais atividades do dia a dia você faz permutações?

Fonte: Autor (2024)

Podemos observar algumas considerações a partir das respostas apresentadas pelos estudantes. Na primeira pergunta, 29% (5) dos estudantes que responderam o formulário alegaram ter dificuldade no assunto de permutação simples e com repetição. Da mesma forma, outros 52% (15) alegaram não ter dificuldade no assunto. Com isso, torna-se perceptível que, de fato, a maioria dos estudantes não encontrava dificuldades em Combinatória.

Com relação à pergunta número quatro, 11% (3) dos estudantes relataram ter dificuldade nas últimas perguntas, ou seja, nas perguntas que eram sobre permutação com elementos repetidos. Em seu artigo, Handaya (2017) defende que um dos problemas no ensino de análise combinatória é a nomenclatura utilizada para os casos com repetição. Ele afirma que a nomenclatura “com repetição” não deixa explícito se é um caso em que os elementos estão, de fato, repetidos ou se estão sendo repostos. Dessa forma, ele propõe duas novas nomenclaturas, permutação com elementos repetidos e permutação com reposição. Rocha (2019) também considera confuso o termo repetição no problema de permutação, principalmente, se comparado aos arranjos com repetição e combinação com repetição que possui natureza diferenciada. A autora utiliza a nomenclatura permutação de elementos idênticos para esse tipo de permutação, na qual o conjunto a ser permutado tem elementos iguais. Embora todos estudantes que responderam à pergunta 5 tenham dito que não fariam mudanças no jogo, é evidente que essa mudança de nomenclatura nas perguntas teria tornado o jogo muito mais claro.

Em resposta à 7ª pergunta, 47% (8) dos estudantes alegaram que o jogo deveria ser utilizado na primeira aula sobre o exercício. “Na primeira aula, é bem dinâmico, gera interesse e engajamento”, alegou um dos estudantes. Apesar disso, devido aos variados tipos de perguntas feitas durante o jogo, tal como perguntas sobre permutação simples e permutação com repetição, é melhor aplicá-lo após algumas aulas, afinal, os alunos já possuem alguns conhecimentos a respeito do assunto.

A décima pergunta que trata das aplicações de permutação no cotidiano apresenta o quão abstrato esse conteúdo é para os estudantes. Ao serem questionados sobre as aplicações cotidianas do conteúdo, 52,9% (9) dos estudantes alegaram não saber quais são essas aplicações ou simplesmente não ter relevância alguma no cotidiano. Tal perspectiva a respeito do conteúdo revela-se um empecilho ao aprendizado do estudante, uma vez que ele não consegue realizar a conexão entre o que é visto em sala e seus conhecimentos obtidos ao longo da vida.

Considerações finais

Com a experiência didática proporcionada pela aplicação do jogo, foi possível perceber a importância e a contribuição dessa ferramenta de ensino para o aprendizado dos estudantes, uma vez que permitiu que eles tivessem uma experiência de ensino na qual o conteúdo é ensinado de forma lúdica, algo que eles alegaram nunca terem vivenciado na escola.

Nessas aulas, a prática de ensino que Skovsmose (2000) chama de paradigma do exercício foi deixada de lado e os alunos vivenciaram o que o autor chama de Cenário para Investigação. Tal cenário é marcado pela liberdade que os alunos possuem para formular questionamentos e reflexões a respeito do conteúdo visto. O objetivo é desenvolver novos saberes e produzir significados próprios e isso ocorre quando os alunos realizam a associação do conteúdo visto com outros saberes que ele já possui.

O momento da aula também permitiu a reflexão acerca da estrutura do jogo. As cartas com letras foram retiradas do baralho devido a possibilidade do seu valor não ser intuitivo para os estudantes, porém, tornou-se perceptível que as cartas com letras poderiam ser usadas para simular situações recorrentes em questões sobre o assunto, tal como a permutação de letras e números da placa de um carro ou o cálculo da quantidade total de placas distintas possíveis de se produzir.

O fato de que os estudantes nunca vivenciaram uma atividade lúdica é um reflexo do cenário educacional atual, em que o ingresso na Educação Superior é priorizado em detrimento da formação geral dos alunos. O Ensino Médio abandonou seu propósito de desenvolver as várias faculdades do estudante e passou a ser um curso preparatório para o vestibular. Como consequência, os estudantes não têm o desejo de estudar aquilo que acreditam não ter valor para o vestibular.

No entanto, além de garantir a interação e o aprendizado dos estudantes, o jogo permitiu a elaboração, compartilhamento e discussão de ideias. Esse contato existente entre eles foi um momento de interação social que foi valioso para o desenvolvimento de suas habilidades sociais, uma vez que os interesses e desejos pessoais foram deixados de lado para que o interesse coletivo - participar da atividade da melhor forma possível - fosse colocado em primeiro lugar. No entanto, a atividade permitiu também o desenvolvimento das habilidades individuais dos estudantes, uma vez que eles utilizaram a criatividade para desenvolver formas de responder as perguntas.

Essa vivência em sala de aula também revelou hábitos de ensino de Combinatória, bem como características dessa área da matemática, que dificultam a compreensão do assunto. Foi observado que os estudantes apresentaram grandes dificuldades em responder as perguntas sem o uso das cartas. Quando os alunos tiveram que dizer, usando fórmulas, a quantidade de números diferentes que poderia ser realizada permutando 4 algarismos onde dois se repetiam, descobrir quais fórmulas usar e como aplicá-las foi uma tarefa complexa. Isso demonstra que as fórmulas relacionadas aos assuntos de Combinatória não são compreendidas pelos estudantes. Como as fórmulas não são construídas e deduzidas junto aos estudantes, elas acabam por se tornar abstratas e sem sentido.

Somado ao excesso de fórmulas, o conteúdo se apresenta como algo abstrato e distante da realidade cotidiana dos estudantes e, por não conseguirem associar o conteúdo visto a alguma situação cotidiana, os estudantes não veem necessidade e não despertam desejo de estudar o assunto. Como Rosa (1996, p. 51) diz, “o aluno não aprende por memorização; tampouco [...] por associação entre estímulos e respostas. A aprendizagem é uma atividade do sujeito e depende do desenvolvimento de suas estruturas cognitivas. Numa palavra, é resultado de um esforço inteligente de conhecer o mundo”. Ou seja, a aprendizagem será efetivada quando os alunos desassociarem o conteúdo às fórmulas e abstrações e começarem a associar aos elementos de sua realidade, pois, assim, estarão usando o conhecimento para conhecer o mundo.

Assim, verifica-se que a aplicação do jogo foi uma experiência construtiva para o aprendizado de todos aqueles envolvidos em sua realização, tendo causado reflexões acerca de práticas adotadas no ensino do conteúdo e tendo garantido uma melhor compreensão a respeito de como o aluno está inserido nesse contexto. Apesar disso, ainda há elementos do jogo que podem ser melhorados e as reflexões e discussões a respeito de tais melhorias ainda estão em andamento para que as futuras experiências sejam mais proveitosas.

Referências

ADLER, J. Conceptualising Resources as a Theme for Teacher Education. **Journal of Mathematics Teacher Education** v. 3, p. 205–224, 2000.

AMBROZI, L. **Jogos em uma Sequência Didática para o ensino de Análise Combinatória**. 2017. 163 f. Dissertação. (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade de Caxias do Sul, Caxias do Sul, 2017. Disponível em: <https://repositorio.ucs.br/xmlui/bitstream/handle/11338/3450/Dissertacao%20Luz%20Ambrozi.pdf?sequence=1&isAllowed=y> . Acesso em: 11 Jun. 2024.

BORBA, R. E.S.R.; ROCHA, C.A; MARTINS, G. V.; LIMA, R. C. G. O que dizem estudos recentes sobre o raciocínio combinatório. Encontro Gaúcho de Educação Matemática, 10. **Anais...** Ijuí, RS, 2009. p. 1-12.

CAMPOS, C. E.; IGLIORI, S. B. C. Teses e Dissertações sobre o Ensino e a Aprendizagem da Combinatória: Perspectivas Investigativas. **REVEMAT: Revista Eletrônica de matemática**. v.16, p. UFSC, Santa Catarina, SC, Brasil, 2021.

CHILELA, R. R. **O jogo de pôquer: uma situação real para dar sentido aos conceitos de combinatória**. 2013. 142 f. (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/81702>. Acesso 01. Jun. 2024.

FONTELLES, M. J.; SIMÕES, M. G.; FARIAS, S. H.; FONTELLES, R G S. Metodologia da pesquisa científica: diretrizes para a elaboração de um protocolo de pesquisa. **Rev. para. med**. 2009. Disponível em: <https://www.pesquisa.bvsalud.org/portal/resource/pt/lil-588477>> Acesso em: 28. Ago. 2024.

GODINO, J. D; BATANERO, C. Implicaciones de las relaciones entre epistemología e instrucción matemática para el desarrollo curricular: el caso de la Combinatoria. **La matemática e la sua didattica**, Università di Bologna, v.24, n.1-2, p. 17-39, 2016. Disponível em: http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/Godino_Batanero_LaMate_Sua_Dida_2016_Epistemologia_instruccion.pdf Acesso em: 22 Jun. 20.

HANDAYA, A. Uma reflexão sobre dificuldade de aprendizagem de análise combinatória. **Sinergia**, São Paulo, v. 18, n. 1, p. 13-17, jan./jun. 2017. Disponível em: <https://ojs.ifsp.edu.br/index.php/sinergia/article/view/71>> Acesso em: 15 Jun. 2024.

LIMA, I.B. **Aulas de Combinatória no Ensino Médio**: como estão ocorrendo. 2016. 114f. Dissertação. (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2016. Disponível em: <https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/17751>. Acesso em: 20 Jun. 20.

ROCHA, C.A. **Formação docente e o ensino de problemas combinatórios**: diversos olhares, diferentes conhecimentos. 2011. Dissertação. (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2011.

ROCHA, C. A. **Estudo de combinatória no ensino médio à luz do enfoque ontossemiótico**: o que e por que priorizar no livro didático e nas aulas?. Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2019.

ROSA, S. **Construtivismo ou novo na educação brasileira**. Construtivismo e mudança. 4. ed. p. 32-53. São Paulo: Cortez, 1996.

SILVA, M. C.; PESSOA, C. A. S. A Combinatória: estado da arte em anais de eventos científicos nacionais e internacionais ocorridos no Brasil de 2009 a 2013. **Educação Matemática Pesquisa**, v.17, n. 4, p. 670–693, 2015.

SKOVSMOSE, Ole. Cenários para investigação. **Bolema**, Rio Claro, v. 13, n. 14, p. 66-91, 2000. Disponível em: <https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/10635> Acesso em: 20 Jun. 2024.

SOARES, R. A. R.; WEISS, R. A. A educação como socialização em Émile Durkheim. **Revista Espaço Pedagógico**, [S. l.], v. 28, n. 1, p. 13-33, 2021. DOI: 10.5335/rep.v28i1.11520. Disponível em: <https://seer.upf.br/index.php/rep/article/view/11520> Acesso em: 13 Jun. 2024

SPARTA, M.; GOMES, W. B. Importância atribuída ao ingresso na educação superior por alunos do ensino médio. **Revista Brasileira de Orientação Profissional**. v. 6, n. 55, p. 45-53, 2005. Disponível em: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=203016893005> Acesso em: 10 Jun. 2024

TOZONI-REIS, Marília Freitas de Campos. **Metodologia da Pesquisa**. 2. ed. Curitiba: IESDE Brasil S.A., 2009.

VASCONCELOS, C. B.; ROCHA, M. A. Análise combinatória e probabilidade. 3. ed. Fortaleza: UECE, 2019. Disponível em: <https://educapes.capes.gov.br/bitstream/capes/552535/1/Livro%20Ana%CC%81lise%20Combinatoria%20e%20Probabilidade%20.pdf>> Acesso em: 27 Ago. 2024

Recebido em: 10 / 07 / 2024

Aprovado em: 02 / 09 / 2024