

e-ISSN: 2764-8311

DOI: 10.56938/v4i8.4746



AÇÕES MENTAIS MATEMÁTICAS E MATERIAL CONCRETO: UM ESTUDO COM A RÉGUA DE CÁLCULO LINEAR

MATHEMATICAL MENTAL ACTIONS AND CONCRETE MATERIAL: A STUDY WITH THE LINEAR SLIDE RULE

Pedro Henrique Conceição de Oliveira¹; Karly Barbosa Alvarenga²

RESUMO

O ambiente da Educação Matemática apresenta-se como um campo fértil, fundamentado em diversas teorias que buscam entender como se estrutura o processo de aprendizagem dos estudantes. Dessa forma, o presente trabalho expõe resultados de uma pesquisa voltada à compreensão de aspectos do pensamento matemático, fundamentando-se no Modelo Teórico de Ações Mentais Matemáticas, com o intuito de evidenciar as possíveis ações mentais mobilizadas durante a construção e manipulação de um material concreto que auxilie na aprendizagem de conceitos matemáticos: a Régua de Cálculo. Para isso investiga-se as potencialidades tanto do referido modelo teórico quanto do material concreto, por meio de uma análise metacognitiva, na qual os autores se auto-observaram, destacando as ações mentais mobilizadas por eles mesmos nos processos de elaboração e manipulação do referido material. Foram identificadas por meio desse processo 27 ações mentais distintas, sendo 9 exclusivas da elaboração, 7 exclusivas da manipulação e 11 relacionadas a ambos os processos. Dentre essas 11 ações, destacam-se, por exemplo: realizar operações com números reais, interpretar, investigar e verificar. Ressalta-se que a elaboração incorpora, em sua essência, aspectos das ações recrutadas na manipulação, ocorrendo de forma inter-relacionada e não isolada. Ademais, o modelo, enquanto ferramenta de análise dos processos mentais envolvidos na aprendizagem matemática, demonstrou-se abrangente e objetivo como referencial teórico para a análise e elaboração de atividades que envolvem materiais concretos manipuláveis. Por fim, indica-se que a implementação do modelo em salas de aula da educação básica pode auxiliar os estudantes na compreensão dos conceitos matemáticos, especialmente no que diz respeito à organização dos processos mentais, favorecendo o desenvolvimento de suas aprendizagens.

Palavras-Chave: Ações Mentais; Material Concreto; Pensamento Matemático; Régua de Cálculo.

¹ Graduando em Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal de Goiás (UFG). Discente da Universidade Federal de Goiás (UFG, Goiânia, Goiás, Brasil. Endereço para correspondência: Campus Samambaia - R. Jacarandá - Chácara Califórnia, Goiânia, Goiás, Brasil, CEP: 74001-970. E-mail: pedrohenrique261202@gmail.com

ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0009-9189-5252>

² Doutora pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP). Docente-pesquisadora na Universidade Federal de Goiás (UFG), Goiânia, Goiás, Brasil. Endereço para correspondência: Campus Samambaia - R. Jacarandá - Chácara Califórnia, Goiânia, Goiás, Brasil, CEP: 74001-970. Email: karly@ufg.br ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-7670-8548>.

ABSTRACT

The field of Mathematics Education presents itself as a fertile ground, grounded in diverse theories that seek to understand how the learning process of students is structured. Therefore, this work presents the results of research focused on understanding aspects of mathematical thinking, based on the Theoretical Model of Mathematical Mental Actions, with the aim of highlighting the possible mental actions mobilized during the construction and manipulation of a concrete material that aids in the learning of mathematical concepts: the slide rule. To this end, the potential of both the aforementioned theoretical model and the concrete material is investigated through a metacognitive analysis, in which the authors self-observed, highlighting the mental actions mobilized by themselves in the processes of elaboration and manipulation of the material. Through this process, 27 distinct mental actions were identified, 9 exclusive to elaboration, 7 exclusive to manipulation, and 11 related to both processes. Among these 11 actions, the following stand out, for example: performing operations with real numbers, interpreting, investigating, and verifying. It is noteworthy that the elaboration incorporates, in its essence, aspects of the actions recruited in manipulation, occurring in an interrelated and not isolated manner. Furthermore, the model, as a tool for analyzing the mental processes involved in mathematical learning, has proven to be comprehensive and objective as a theoretical framework for the analysis and elaboration of activities involving concrete manipulable materials. Finally, it is indicated that the implementation of the model in basic education classrooms can assist students in understanding mathematical concepts, especially with regard to the organization of mental processes, favoring the development of their learning.

Keywords: Mental Actions; Concrete Material; Mathematical Thinking; Slide Rule.

Para introduzir

O ambiente da Educação Matemática é caracterizado por uma vasta produção de pesquisas que buscam compreender como o sujeito pensa matematicamente (Hadamard, 1996; Poincaré, 1996; Sriraman, 2017). Poincaré (1996), ao analisar a gênese da invenção matemática, chegou à concepção de que criar matematicamente consiste não exatamente em realizar combinações aleatórias, mas sim naquelas que se mostram úteis, destacando que criar é discernir e realizar escolhas entre as alternativas mais interessantes, porém “as regras que conduzem a estas escolhas são extremamente sutis e delicadas” (Poincaré, 1996, p. 11).

Hadamard (1996), por sua vez, analisou aspectos gerais da psicologia da invenção no campo da matemática e concluiu que o pensamento matemático está estruturado em diferentes camadas do subconsciente. A direção do pensamento pode ser mais restrita ou mais ampla, estando diretamente relacionada ao nível de atuação do subconsciente. Ademais, o autor afirma que há diversas formas de representações auxiliares e que o pensamento se relaciona de modos distintos quando é apoiado por imagens mentais ou por outras representações concretas, evidenciando que alguns desses tipos de representações podem conferir ao pensamento uma direção mais lógica, enquanto outros favorecem uma abordagem mais intuitiva.

Quando se fala sobre o pensar matematicamente, um dos temas mais proeminentes, amplamente debatido e pesquisado, refere-se ao Pensamento Matemático Avançado (Alvarenga *et al.*, 2022; Cabral *et al.*, 2021; Dreyfus, 1991; Dubinsky, 1991; Peixoto; Alvarenga, 2024; Tall, 1995). Tal teoria aborda os processos de pensamento nos quais o estudante abstrai da relação causal matemática de aplicação para uma reflexão crítica acerca do objeto matemático, o que, de acordo com Tall (1995), implica atribuir significados a determinado ente matemático, possibilitando sua concepção em contextos distintos e adequados ao conceito matemático em questão.

Outro aspecto relevante na Educação Matemática refere-se à utilização de materiais concretos, considerando que, por meio desses materiais, muitas das abstrações matemáticas são transpostas para o mundo físico. Conforme ressaltam Fiorentini e Miorim (1990), o aluno tem o direito de aprender, e esse aprendizado deve ocorrer de modo significativo, de forma que o estudante se perceba como reelaborador do saber historicamente construído, superando uma visão ingênua, fragmentada e parcial da realidade. O material concreto pode potencializar esse processo.

Lorenzato (2009, p. 21) adverte: “Convém termos em mente que a realização em si de atividades manipulativas ou visuais não garante a aprendizagem. Para que esta efetivamente aconteça, faz-se necessária também a atividade mental, por parte do aluno”. Em outras palavras, não basta manipular o material por mera manipulação; é imprescindível que o estudante realize uma atividade mental clara e consistente para que o conhecimento matemático seja efetivamente desenvolvido.

Dessa maneira, o presente trabalho, que constitui um recorte de um estudo mais amplo, propõe-se a discutir a apreensão do conhecimento matemático por meio da elaboração e manipulação de um material concreto. Busca-se responder à seguinte questão: “Quais ações mentais, com base no Modelo Teórico de Ações Mentais Matemáticas (MTAMM), podem ser mobilizadas por um estudante ao construir e manipular uma Régua de Cálculo?” Destaca-se que o objetivo é que os resultados das discussões aqui apresentadas alcancem as salas de aula, de modo que professores e estudantes possam experienciar e evidenciar seus processos de pensamento matemático, estes relacionados às ações mentais (AM), utilizando-se, primordialmente, desse modelo, para que, posteriormente, tais ações sejam realizadas de maneira automática, autorregulando-se internamente para a mobilização das AM.

O referencial teórico

A escolha do referencial teórico, vide Quadro 1, constitui etapa fundamental na elaboração de qualquer pesquisa, uma vez que, a partir dele, delimitam-se as bases que fundamentam o objeto de estudo, orientam-se as análises e confere-se rigor à investigação. Neste trabalho, apoia-se em um eixo central: o Modelo Teórico de Ações Mentais Matemáticas (Alvarenga; Domingos, 2020) (Quadro 1).

Quadro 1 – Modelo Teórico de Ações Mentais Matemáticas (MTAMM)

Algebrizar (AM 1)	Analizar a direção inversa da manipulação (AM 2)	Argumentar de forma textual, sem a formalização ou a linguagem matemática (AM 3)	Classificar (AM 4)
Coletar informações/dados (AM 5)	Comparar por meio de problemas semelhantes (AM 6)	Compensar (AM 7)	Conectar experiências anteriores (met-before) (AM 8)
Conjecturar (AM 9)	Convencer o outro, explicar verbalmente (AM 10)	Criar a própria linguagem matemática (AM 11)	Dar contraexemplos (AM 12)
Demonstrar, provar (AM 13)	Distinguir o que são hipóteses e o que é tese (AM 14)	Elaborar casos particulares (AM 15)	Empregar propriedades dos números reais (AM 16)
Encapsular processos em objetos, descapsular objetos em processos (AM 17)	Enumerar etapas (AM 18)	Estimar, fazer aproximações (AM 19)	Evidenciar (AM 20)
Fazer “mostrações” (AM 21)	Fazer analogias entre outros conteúdos (AM 22)	Fazer operações com números reais (AM 23)	Flexibilizar contextos (AM 24)
Flexibilizar interpretações (AM 25)	Formalizar (AM 26)	Generalizar (AM 27)	Geometrizar (AM 28)
“Graficar” (AM 29)	Identificar (AM 30)	Induzir (AM 31)	Inferir (AM 32)
Interpretar (AM 33)	Investigar (AM 34)	Manipular algebricamente (AM 35)	Manipular expressões da direita para a esquerda, quando possível. Reverter (AM 36)
Manipular expressões de baixo para cima (AM 37)	Modelar (AM 38)	“Numerizar” (AM 39)	Organizar, desorganizar e reorganizar (AM 40)
Repensar, refazer e repensar, isto é, tentar, tentar e tentar... (AM 41)	Representar (AM 42)	Simplificar (AM 43)	Sintetizar (AM 44)

Tabelar (AM 45)	Traduzir da língua materna para a linguagem matemática simbólica (AM 46)	Traduzir da linguagem matemática para a língua materna (AM 47)	Transpor ideias (mudar de um contexto para o outro) (AM 48)
Transpor informações (estar coerente; conectar informações) (AM 49)	Usar linguagem matemática adequada (AM 50)	Verificar (AM 51)	Visualizar (AM52)
Medir (AM53)			

Fonte: Alvarenga e Domingos (2020).

O referido modelo (ver Quadro 1), proposto por Alvarenga e Domingos (2020), parte do pressuposto de que o pensamento matemático se organiza a partir de AM, as quais são mobilizadas pelos sujeitos ao lidarem com conceitos e procedimentos matemáticos (Alvarenga, 2020). Tal modelo foi desenvolvido com base em investigações de cunho empírico e teórico e, desde então, vem sendo ampliado por pesquisadores vinculados ao Grupo de Estudos em Educação Matemática (GEEM). As ações mentais são entendidas como processos cognitivos internos que estruturam o desenvolvimento do pensamento matemático, podendo ser realizados pelos indivíduos ao pensar, compreender, resolver problemas e construir significados em matemática, o que possibilita transitar entre diferentes níveis de complexidade de compreensão e propriedades envolvidas em determinada atividade. São fundamentais para o desenvolvimento do raciocínio lógico, da compreensão conceitual e da capacidade de articular conhecimentos matemáticos em distintos contextos.

Esse modelo teórico fundamentou a estruturação de toda a análise de dados, isto é, a identificação das AM envolvidas na elaboração e manipulação de um material como a Régua de Cálculo. Outro referencial basilar para a pesquisa foi o de Metacognição, proposto por Flavell (1979), que se refere às reflexões do indivíduo sobre seus próprios processos cognitivos, tais como, conhecer o que se pensa e se aprende, bem como exercer o controle consciente sobre estes processos. Tal autorregulação pode incluir o planejamento de estratégias para monitorar os caminhos cognitivos ao se empreender a resolução de tarefas matemáticas, além de avaliar todo o percurso realizado.

Os procedimentos autorregulatórios foram empregados pelos autores, que se autoanalisaram durante todo o processo de elaboração e utilização da Régua de Cálculo, de modo a identificar os raciocínios articulados à sua construção e ao seu uso, em consonância com as ações abordadas no MTAMM, visto que “a aprendizagem por meio

de estratégias metacognitivas é uma das possibilidades de o aluno desenvolver um conhecimento explícito das estratégias específicas necessárias nas diferentes situações de aprendizagem” (Santos; Oliveira; Saad, 2021, p. 33). Após as identificações iniciais, foi realizado um debate entre os autores e, posteriormente, com o GEEM.

Os processos metodológicos da investigação

Esta pesquisa pode ser caracterizada como qualitativa, exploratória e explicativa simultaneamente. O objetivo é compreender, por meio de uma abordagem interpretativa, as ações mentais envolvidas na construção e manipulação de um material concreto (Lakatos; Marconi, 2003) — a Régua de Cálculo — articuladas a um processo metacognitivo, fundamentado em Flavell (1979) e Santos, Oliveira e Saad (2021). Ademais, é possível alinhar este estudo a uma investigação sobre a própria prática docente (Kripka; Ribeiro, 2025), uma vez que os autores deste artigo se propuseram a analisar suas próprias ações mentais, tanto na condição de estudantes quanto de profissionais docentes-pesquisadores, considerando que este estudo emerge do “[...] aprimoramento do conhecimento docente a partir dos conflitos vivenciados nos contextos de atuação do professor-pesquisador” (Kripka; Ribeiro, 2025, p. 193).

A investigação da própria prática possibilita ao professor refletir criticamente sobre sua atuação docente (Schön, 2000), colocando-se, também, na posição do aluno para melhor compreender seus desafios. Esse processo transforma a experiência em conhecimento, fortalece a autonomia docente e contribui para o aprimoramento do ensino (Zeichner, 1993). Nesse contexto, os autores procederam à auto-observação durante a construção e manipulação da Régua de Cálculo.

O primeiro procedimento consistiu em um levantamento bibliográfico realizado em bases como a Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), o Catálogo de Teses e Dissertações da Capes, o Portal de Periódicos da Capes, o repositório de dissertações do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional e o Google Acadêmico. O objetivo foi mapear trabalhos que abordassem a Régua de Cálculo sob a perspectiva de sua construção, manipulação ou ambas. Paralelamente, foram consultados também estudos referentes ao uso de materiais concretos no ensino de matemática, visando fundamentar teoricamente a proposta.

Na sequência, foram analisados tutoriais disponíveis em *sites* especializados, como o *Instructables*, com o intuito de selecionar um modelo de Régua de Cálculo que pudesse ser confeccionado com materiais simples e de baixo custo. Para tanto, a

construção foi realizada com papel, papelão, cola branca e cola quente. Durante todo o processo de construção e manipulação, foi conduzida uma análise metacognitiva, inspirada em Flavell (1979). O primeiro autor monitorou e registrou suas próprias ações cognitivas. Essa autoanálise foi também orientada pelos princípios do MTAMM, permitindo a identificação e descrição das AM envolvidas em cada etapa da atividade. Houve, de forma constante, o questionamento: o que estou fazendo? Por quê? Como estou pensando?

A Régua de Cálculo

O objetivo principal desta investigação foi identificar as ações mentais mobilizadas na construção e na manipulação de um material concreto que auxilie na aprendizagem de conceitos matemáticos, especialmente aqueles relacionados às funções exponenciais e logarítmicas, tendo sido escolhida a Régua de Cálculo.

Segundo Maia (2013), trata-se de um instrumento histórico atribuído a William Oughtred, clérigo e estudioso da matemática inglês do século XVII (Alves; Pereira, 2024), que a desenvolveu a partir dos trabalhos de John Napier sobre logaritmos. Utilizada amplamente por engenheiros, cientistas e estudantes até meados do século XX, a Régua de Cálculo permite realizar multiplicações, divisões, extrações de raízes e outros cálculos complexos por meio de escalas logarítmicas deslizantes. Antes do advento das calculadoras eletrônicas, era considerada uma ferramenta indispensável para a resolução eficiente de problemas numéricos em contextos acadêmicos e profissionais (Santos; Oliveira; Pereira, 2020) (Figura 1).

Figura 1 – Um modelo de Régua de Cálculo, a Linear, de 1957



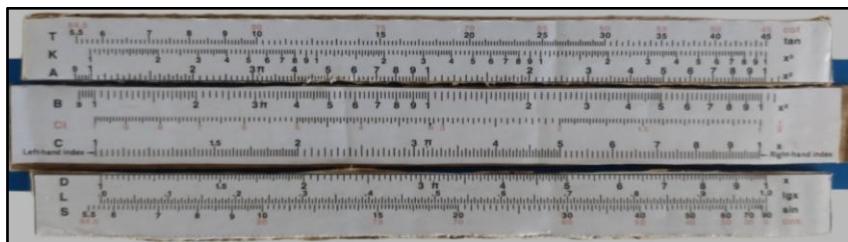
Fonte: *Slide Rule Museum* (2003)

Alguns estudos abordam a Régua de Cálculo Linear como potencializadora para o ensino de propriedades logarítmicas, evidenciando sua natureza histórica e a habilidade de resolver cálculos que o instrumento possui, visto que se vale das propriedades dos

logaritmos para efetuar esses cálculos de maneira mais simples (Cordeiro, 2021; D'Avilla, 2018; Pedrosa, 2018; Pippa, 2014). Outros autores utilizaram-na como forma de relacionar sua construção e manuseio com o ensino de matemática na educação básica e superior (Oliveira; Alvarenga, 2024; Santos; Pereira, 2020).

Neste trabalho, sua construção foi realizada a partir de modelos disponíveis na plataforma *Instructables* (2011) e confeccionada com materiais reutilizáveis. A escolha desses materiais se deu por uma questão ecológica e por serem de fácil acesso. Assim, todo professor pode abordá-la em suas aulas e os próprios estudantes podem confeccioná-la. O processo envolveu etapas como a leitura e compreensão da escala logarítmica, o corte e a montagem das diferentes partes da régua (parte fixa, parte deslizante e cursor marcador), além de ajustes e testes para garantir a precisão relativa das operações realizadas. Todas essas atividades podem promover a compreensão dos conceitos matemáticos (Figura 2).

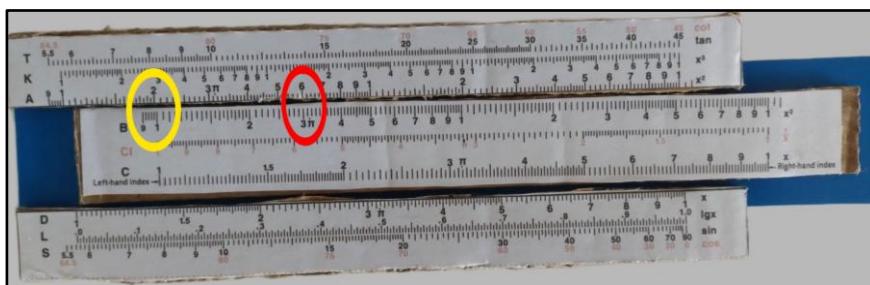
Figura 2 – Um modelo da Régua de Cálculo



Fonte: Elaboração própria

A utilização da régua para a multiplicação, assim como exploram Santos e Pereira (2020) por exemplo, ocorre quando se desloca a parte deslizante para a direita, localizando o número 1 do controle deslizante (parte central), na parte B, com o número que se deseja utilizar como multiplicador na parte A. Para realizar, por exemplo, 2×3 , desloca-se o 1 da parte B até o 2 da parte A (destacado em amarelo) e identifica-se, na parte B, o multiplicando, ou seja, procura-se o número 3 na parte B (Figura 3. Observe que o valor de π está próximo do 3). Assim, verifica-se o número, na parte A, que está alinhado com o 3. Nesse caso, encontra-se o 6 (em vermelho), identificando que a multiplicação $2 \times 3 = 6$.

Figura 3 - Exemplo de utilização da Régua



Fonte: Elaboração própria

A Régua de Cálculo aqui apresentada, possui diversas escalas impressas (marcadas de 1 a 10). Essas escalas não são lineares: a distância entre os números é proporcional ao logaritmo destes. Dessa forma, somar distâncias na régua equivale a somar logaritmos, o que corresponde à multiplicação de números. Trata-se de um tipo de "computador analógico" que transforma, por exemplo, multiplicações em somas de distâncias, graças às propriedades dos logaritmos. Não existe uma escala linear convencional na Régua de Cálculo (ela é logarítmica). Portanto, adição e subtração não são operações nativas. Para realizar adições ou subtrações, engenheiros, cientistas e estudantes utilizavam papel e lápis.

As ações mentais matemáticas correlacionadas à elaboração e a utilização da régua

Durante todo o processo de elaboração e manipulação da Régua de Cálculo, o primeiro autor deste trabalho, por meio de um processo metacognitivo (Flavell, 1979; Santos, Oliveira e Saad, 2021), correlacionou suas ações mentais ativadas com as do MTAMM, concentrando informações a respeito de quais, como e quando determinadas ações mentais foram mobilizadas.

Destaca-se que, no processo de construção, foram mobilizadas 20 ações mentais, enquanto, na utilização do material, foram 18. Desconsiderando as ações repetidas, identificaram-se ao todo 27 ações mentais distintas (Quadro 2).

Quadro 2 – 27 Ações Mentais mobilizadas ao todo

Classificar (AM 4)	Compensar (AM 7)	Compensar (AM 7)	Conectar experiências anteriores (met-before) (AM 8)	Conjecturar (AM 9)	Elaborar casos particulares (AM 15)	Empregar propriedades dos números reais (AM 16)
Enumerar etapas (AM 18)	Estimar, fazer aproximaçõ es (AM 19)	Evidenciar (AM 20)	Fazer analogias entre outros conteúdos (AM 22)	Fazer operações com números reais (AM 23)	Flexibilizar contextos (AM 24)	Flexibilizar interpretações (AM 25)

Formalizar (AM 26)	Generalizar (AM 27)	Identificar (AM 30)	Induzir (AM 31)	Inferir (AM 32)	Interpretar (AM 33)	Investigar (AM 34)
“Numerizar” (AM 39)	Organizar, desorganizar e reorganizar (AM 40)	Rerepensar, refazer e repensar, isto é, tentar, tentar e tentar... (AM 41)		Representar (AM 42)	Verificar (AM 51)	Visualizar (AM52)

Fonte: Elaboração própria

Inicialmente, discute-se algumas dessas ações:

- a) Identificar (AM30) – Constitui o primeiro passo, possivelmente a primeira ação mental: reconhecer elementos presentes no material ou na situação. O indivíduo pode perceber uma forma, uma quantidade, uma regularidade ou até mesmo relações entre as escalas e as operações.
- b) Verificar (AM51) – Esta ação mental é bastante relevante e, frequentemente, negligenciada. A pessoa que constrói ou utiliza o material pode verificar se os resultados das operações estão corretos, conferindo-os em uma calculadora ou manualmente (raramente, mas é uma boa oportunidade para estimular cálculos mentais). Em geral, consiste em checar se uma ideia, hipótese ou resultado está correto, confrontando-o com a manipulação ou com as regras matemáticas.

As ações apresentadas no momento da elaboração estão majoritariamente relacionadas a cortar, dobrar, montar, desenhar, colar, medir, selecionar cores ou formas. O foco reside em transformar um conceito matemático em um objeto concreto; contudo, no presente caso, o objetivo se estendia além disso, pois implicava compreender as escalas já previamente estabelecidas.

Foram mobilizadas 20 ações mentais (AM) durante a construção: AM4, AM5, AM7, AM8, AM16, AM18, AM19, AM20, AM23, AM24, AM25, AM30, AM31, AM32, AM33, AM34, AM40, AM41, AM51 e AM52.

É possível identificar uma diversidade de ações mentais mobilizadas além daquelas já discutidas, tais como, Classificar (AM 4) e Empregar propriedades dos números reais (AM 16). A ação de classificar está relacionada ao agrupamento de objetos de uma mesma classe. No contexto da elaboração, essa ação ocorre ao recortar moldes em papelão, sendo necessário classificar as partes cortadas para que estejam em um mesmo grupo. Ademais, as propriedades dos números reais foram constantemente empregadas durante o uso da régua e na compreensão do seu funcionamento e construção, especialmente ao abordar a escala logarítmica.

A manipulação do material concreto envolve: percepção, exploração, teste, inferência, generalização, representação simbólica e reflexão. Trata-se de um ciclo de ação → observação → análise → generalização, o qual transforma a experiência concreta em compreensão abstrata.

Em contrapartida, foram 18 AM mobilizadas na etapa de utilização: AM9, AM15, AM16, AM19, AM22, AM23, AM26, AM27, AM30, AM31, AM32, AM33, AM34, AM39, AM41, AM52 e AM51.

Novamente observa-se uma variedade de ações, incluindo algumas distintas das presentes na construção, como: Generalizar (AM 27) e “Numerizar” (AM 39).

Das 27 ações mentais totais (Quadro 2), 11 são comuns a ambos os processos (Quadro 3), 9 são exclusivas da construção e 7 são específicas da utilização.

Quadro 3: 11 AM comuns a ambos os processos

AM16	AM19	AM23	AM30	AM31
AM32	AM33	AM34	AM41	AM51
AM52				

Fonte: Elaboração própria

Observa-se que são ações mais comuns à resolução de problemas, sejam eles contextualizados ou não, como: Fazer operações com números reais (AM 23) e Repensar, refazer e repensar, isto é, tentar, tentar e tentar... (AM 41).

Elaborar um material concreto para o aprendizado da matemática implica criar ou organizar objetos físicos de forma intencional, a fim de representar conceitos matemáticos e possibilitar a exploração, compreensão e experimentação. No caso da Régua de Cálculo, destaca-se a relevância de construir também as escalas, ainda que sejam apenas as mais simples, para envolver as operações aritméticas básicas. Entretanto, tal tarefa demanda mais tempo e poderia ser realizada em horário extra, alocado em um projeto pedagógico ou em atividades de escolas de tempo integral. As AM envolvidas no processo de elaboração são em maior número do que aquelas relacionadas à manipulação.

As 9 AM exclusivas à elaboração foram: AM4, AM5, AM7, AM8, AM18, AM20, AM24, AM25 e AM40.

Nesse âmbito, é possível identificar ações que remetem a movimentos, como: Compensar (AM 7) e Enumerar etapas (AM 18), ações mais direcionadas ao ato de

construção do material concreto, de agir sobre o material e de ir elaborando-o, mesmo que as escalas, neste caso, tenham sido obtidas prontas na internet. O processo de atribuição de sentido ao material é desenvolvido, sobretudo, na etapa de elaboração.

Manipular consiste em agir sobre o material para fins de aprendizagem, utilizando simultaneamente o corpo e a mente, explorando conceitos, testando hipóteses e construindo compreensão abstrata a partir do concreto. As AM, nesse caso, estão mais associadas à abstração.

As 7 AM exclusivas à manipulação foram: AM9, AM15, AM22, AM26, AM27, AM39 e AM42.

A construção e a manipulação da Régua de Cálculo foram integralmente analisadas por meio de um processo metacognitivo que, segundo Flavell (1979) e Santos, Oliveira e Saad (2021), envolve o conhecimento e o controle que o indivíduo exerce sobre seus próprios processos de aprendizagem, incluindo a capacidade de planejar estratégias, monitorar a execução e avaliar os resultados. Em todo o processo, foi exatamente isso que os autores realizaram: autoavaliaram-se, percebendo, correlacionando e registrando suas próprias ações mentais para que, posteriormente, fossem analisadas à luz do MTAMM. Analisar, nesse contexto, significa explorar especificamente a correlação entre as ações apresentadas no MTAMM e aquelas efetivamente realizadas durante a produção do material e, posteriormente, na sua utilização para executar operações como multiplicação de dois números, cálculo de raízes quadradas, cálculo de números ao quadrado, entre outras.

As ações mentais matemáticas mobilizadas tanto na elaboração, quanto na utilização da Régua de Cálculo

Apresenta-se, a seguir, uma análise das 11 AM presentes na interseção entre a elaboração e a utilização, destacando aspectos considerados no momento da mobilização dessas ações. Optou-se por analisar as ações mentais situadas na interseção entre os dois processos, pois entende-se que revelam uma base cognitiva compartilhada que sustenta tanto a concepção quanto a operacionalização do instrumento.

- *AM 16 - Empregar propriedades dos números reais*

Na manipulação do material, a AM16 manifestou-se ao resolver multiplicações e divisões utilizando a régua, sendo necessário recorrer à propriedade de aditividade dos logaritmos para transformar produtos em somas. Essa mobilização evidencia uma

compreensão relacional entre operações aritméticas e propriedades algébricas dos logaritmos, aspecto fundamental para o uso eficiente do instrumento. No processo de elaboração, essa ação mental tornou-se evidente durante a realização de cálculos para determinar os pontos precisos de corte do papelão, etapa essencial para a montagem da régua. Caso as escalas tivessem sido construídas, tal ação se mostraria ainda mais evidente. Ressalta-se que essa ação articula-se diretamente com as AM19 e AM23, discutidas a seguir.

- *AM 19 - Estimar, fazer aproximações*

A AM19 esteve presente na fase de elaboração, especialmente durante as medições realizadas com a régua milimetrada, momento em que foi necessário estimar posições para demarcações e cortes do papelão. No contexto da manipulação, a estimativa revelou-se fundamental para os cálculos envolvendo números decimais. Como muitos valores exatos não estão representados diretamente na régua, foi necessário realizar aproximações, sem prejuízo à eficácia dos cálculos. Outro exemplo pode ser observado ao lidar com números irracionais. Essa necessidade reforça o caráter prático e flexível da Régua de Cálculo como instrumento de ensino.

- *AM 23 - Fazer operações com números reais*

A AM23 refere-se à execução de operações conhecidas dos números reais, como adição e multiplicação. Durante a elaboração da régua, essa ação manifestou-se nas tarefas de demarcação e corte do papelão, exigindo o uso da régua comum, milimetrada, para medições precisas e cálculos de ajuste de dimensões. No momento da manipulação, o recrutamento dessa ação foi constante, uma vez que o funcionamento da Régua de Cálculo baseia-se na transformação de multiplicações em adições por meio da escala logarítmica. Assim, todas as operações realizadas com o instrumento pressupõem domínio das, ao menos, quatro operações fundamentais com números reais.

- *AM 30 - Identificar*

A AM30 pode ser a primeira de uma sequência de outras ações, como: 31, 32, 33 e 34. Durante o processo de construção, manifestou-se na identificação dos locais corretos para cortes e marcações no papelão, por meio da observação cuidadosa das medidas e posicionamentos na régua milimetrada. Na manipulação, essa ação mental é mobilizada ao identificar, na escala logarítmica da régua, os valores correspondentes aos números

desejados para iniciar operações (como localizar 2, 3, 10 etc.). Da mesma forma, é importante para a compreensão do funcionamento da Régua, identificando os valores e as operações entre eles. Tal entendimento é necessário, inclusive, para a montagem do instrumento, caso sejam utilizadas escalas já prontas.

- *AM 31 - Induzir*

A AM31 pode dar prosseguimento à cadeia de raciocínio iniciada na AM30. Na etapa de elaboração, tal continuidade foi evidenciada ao observar-se a regularidade dos espaçamentos na régua, o que provocou uma compreensão acerca da relação entre o tamanho dos espaços e a necessidade de ajustes no modelo impresso utilizado para a construção. Na fase de manipulação, essa ação mental manifestou-se ao induzir padrões que associam distâncias na régua a operações de multiplicação ou divisão, como, por exemplo, perceber que “somar distâncias” corresponde a multiplicar valores.

- *AM 32 - Inferir*

A AM32 pode dar continuidade ao encadeamento de mobilizações iniciado pelas ações anteriores. Na etapa de construção, essa continuidade foi expressa ao inferir-se a necessidade de realizar modificações estruturais no modelo da régua, bem como novos cortes no papelão, de modo que o instrumento se tornasse mais estruturado, preciso, confiável e adequadamente utilizado. Na fase de manipulação, essa ação mental foi ativada ao posicionar a régua para realizar uma operação, possibilitando a obtenção de uma conclusão antecipada a partir de indícios, dados ou informações já disponíveis, inferindo-se aproximadamente o resultado da multiplicação antes de proceder à leitura precisa.

- *AM 33 - Interpretar*

A AM33 pode manter a continuidade da sequência de ações mentais. Na fase de construção, tal registro ocorreu ao interpretar que as modificações previamente realizadas, tanto no modelo impresso da régua quanto nos cortes do papelão, proporcionaram uma melhor visualização dos pontos ali marcados. No uso, a ação mental manifestou-se ao interpretar o funcionamento do instrumento, compreendendo que as operações realizadas correspondem à adição de logaritmos, o que revela um padrão.

- *AM 34 - Investigar*

A AM34 pode encerrar a cadeia de processos iniciados na AM30. Na etapa de elaboração, tal encerramento se apresentou quando, após as modificações efetuadas, investigou-se se a régua construída realmente mantém a funcionalidade da régua original, isto é, se sua escala, o posicionamento do molde impresso³ e os cortes no papelão, especialmente os referentes ao ponto deslizante, não interferiram na manipulação da régua. Na fase de manipulação, a investigação ocorreu ao comparar os resultados obtidos com a régua com os cálculos realizados manualmente, com o auxílio de calculadora, ou ainda, por meio de cálculos mentais, como ao verificar se 2^2 na régua resulta em valor próximo de 4 (Figura 4).

Figura 4 – Cálculo de 2^2



Fonte: Elaboração própria

Observe que há duas formas de realizar este cálculo: a primeira consiste em deslocar o controle deslizante B para a posição correspondente à multiplicação por 2 na parte A (destacada em vermelho), identificando, assim, qual é o resultado referente à multiplicação (demarcado em amarelo). Outro método consiste em, sem a necessidade de reposicionar o controle deslizante, identificar na reta B as escalas relativas a “ x ” e a “ x^2 ”, indicadas pelas setas alaranjadas. Dessa maneira, localiza-se na reta “ x ” o valor que se deseja elevar ao quadrado e, em seguida, identifica-se na reta “ x^2 ” o número disposto diretamente acima deste; observe que este número é novamente o 4, o que demonstra que a investigação foi bem-sucedida. As setas em rosa servem apenas para indicar as escalas A e B.

- *AM 41 - Repensar, refazer e repensar, isto é, tentar, tentar e tentar...*

A AM41 está relacionada ao processo de tentativa e erro, sendo mobilizada tanto na construção quanto na manipulação. Durante a elaboração, manifestou-se na execução

³ O molde pode ser encontrado em:

https://sliderulemuseum.com/REF/scales/MakeYourOwnSlideRule_ScientificAmerican_May2006.pdf

dos cortes no papelão, que exigiu o ajuste repetido das marcações até se obter um encaixe adequado para a montagem. Na manipulação, tal ação mental foi evidenciada ao tentar realizar operações utilizando a régua, quando foi necessário, nesse caso, ajustar o posicionamento inicial ou refazer a leitura, buscando a precisão do resultado a partir de sucessivas tentativas e compreensões.

- *AM 51 - Verificar*

A AM51 corresponde à verificação da coerência das soluções obtidas. No processo de construção, foi evidenciada ao conferir se os cortes e as marcações efetuados no papelão estavam de acordo com as medidas corretas projetadas para a régua, visto que a não verificação pode incorrer em erros na construção. Durante a utilização, essa ação mental foi mobilizada ao verificar se o resultado obtido com o uso da régua correspondia ao valor esperado, seja teoricamente ou mentalmente, por exemplo, ao realizar o cálculo $6 \div 3$ na régua e comparar com o valor conhecido de 2.

- *AM 52 - Visualizar*

A AM52 refere-se à capacidade de formar uma imagem mental e perceber aquilo que está sendo realizado ou solicitado. Trata-se de tornar visível, seja aos olhos, seja à mente, para compreender, imaginar ou perceber determinado aspecto. Na construção da régua, essa habilidade foi empregada ao visualizar a disposição das escalas e dos cortes antes de efetuar as marcações no papelão. Já na manipulação, tal ação mental se manifestou ao perceber as operações de multiplicação e divisão como deslocamentos e sobreposições nas escalas logarítmicas da régua, facilitando a realização dos cálculos.

A recorrência de determinadas ações mentais em ambos os momentos sugere que o processo de construção e manipulação do material, longe de ser meramente técnico, pode também ser compreendido como uma experiência de aprendizagem matemática, ressaltando que a elaboração frequentemente já contém aspectos das ações de manipulação, o que pode denotar que tais ações não ocorrem separadamente, mas em constante inter-relação. Além disso, o MTAMM se mostrou uma ferramenta pertinente para análise dos processos mentais envolvidos na aprendizagem matemática, contemplando diversos raciocínios, ações mentais e ativações necessárias como referencial teórico-cognitivo para atividades que envolvam a criação e a utilização de materiais concretos manipuláveis.

Reflexões finais

A concepção teórica de educação matemática é ampla, e compreender o modo de pensar do estudante constitui uma tarefa complexa. Contudo, dispomos de ferramentas que auxiliam na facilitação desse estudo teórico da apropriação do conhecimento, entre as quais se destaca o Modelo Teórico de Ações Mentais Matemáticas, aqui apresentado. Por meio deste modelo, é possível combinar diversas ações que promovam o conhecimento matemático, incluindo aquelas que propiciem o desenvolvimento de um pensamento matemático consciente.

Neste trabalho, apresentamos algumas ações mentais mobilizadas durante a construção e manipulação da Régua de Cálculo por parte dos estudantes. Observa-se que a interação entre esses dois modos de trabalho — construir e manipular o material concreto — pode impulsionar ganhos cognitivos na apreensão do ente matemático envolvido, o que favorece tanto a aprendizagem quanto o ensino mais explícito e significativo. A análise cruzada revelou 27 AM distintas, tais como: realizar operações com números reais, investigar e verificar. Essas ações se desenvolvem de maneira mais eficiente quando os indivíduos estão cientes do que fazem ao elaborar raciocínios matemáticos; trata-se da metacognição em ação.

Em síntese, esta pesquisa está diretamente orientada à prática e à implementação do modelo teórico nas aulas de matemática da educação básica, em especial no ensino médio, e as aulas em cursos superiores de licenciatura em matemática pois se acredita que, ao tomarem consciência de suas ações, os estudantes podem potencializar seu conhecimento matemático e, assim, avançar para uma categoria de pensamento que transcenda o procedural, aproximando-se do reflexivo e crítico fundamentado. Dessa forma, sugere-se a exploração, em sala de aula, da construção e manipulação de um material concreto — seja a Régua de Cálculo ou outro — conjuntamente com um referencial metacognitivo, de modo que o estudante explice, por meio do modelo, as ações mentais que considera terem sido ou que serão recrutadas, identificando, assim, aspectos passíveis de aprimoramento.

Referências

ALVARENGA, K. B. Neurociência cognitiva e matemática. In: PINA, R.; DÖRR, R. (Eds.). **Cenários de Pesquisa em Educação Matemática**. Jundiaí: Paco Editorial, 2020.

ALVARENGA, K. B.; DOMINGOS, A. Ressignificação do Pensamento Matemático

Avançado. Relatório de pós-doutorado. 2020. Não publicado.

ALVARENGA, K. B.; ROCHA, C. N.; CARVALHO, P. P. T.; SOARES, M. J. R.; LIMA, J. A. Investigação acerca das possíveis ações mentais desenvolvidas por estudantes do 1º ano do ensino médio no retorno às aulas presenciais. **Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas**, Belém, v. 18, n. 41, p. 176-187, dez. 2022. Disponível em:
<https://periodicos.ufpa.br/index.php/revistaamazonia/article/view/13501>. Acesso em: 16 ago. 2025.

ALVES, V. B; PEREIRA, A. C. C. William Oughtred (1574-1660) e o ensino das matemáticas nos séculos XVI e XVII. **História da Ciência e Ensino: construindo interfaces**, [S. l.], v. 29, p. 116–130, 2024. DOI: 10.23925/2178-2911.2024v29p116-130.

CABRAL, E. D.; COSTA, J. V. A.; COSTA, S. A.; ALVARENGA, K. B. Construção do pensamento matemático elementar e avançado na educação básica. In: ENCONTRO DE LICENCIATURAS E EDUCAÇÃO BÁSICA, 3., 2021, Goiânia. **Anais...** Goiânia: Publica CIAR, 2021. P. 148-152. Disponível em:
https://publica.ciar.ufg.br/ebooks/ELEB_III_2021/1_resumos/a205.html. Acesso em: 14 jun. 2025.

CORDEIRO, J. J. L. **Régulas de cálculo e seu potencial para o ensino das propriedades logarítmicas**. 2021. f. 78. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Federal do Vale do São Francisco, Petrolina, 2021. Disponível em:
https://portais.univasf.edu.br/profmat/joao_jameson_lopes_cordeiro_turma_2018.pdf. Acesso em: 16 ago. 2025.

D'AVILLA, C. G. **Uma estratégia didática para o ensino de funções exponenciais e logarítmicas**. 2018. f. 99. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, 2018. Disponível em:
<https://repositorio.furg.br/handle/1/9101>. Acesso em: 16 ago. 2025.

DREYFUS, T. Advanced Mathematical Thinking Processes. In: TALL, D. (Ed.). **Advanced Mathematical Thinking**. Holland: Kluwer Academic Publishers, 1991. [n.p.].

DUBINSKY, E. Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In: TALL, D. (Ed.). **Advanced Mathematical Thinking**. Holland: Kluwer Academic Publishers, 1991. [n.p.].

FLAVELL, J. H. Metacognition and cognitive monitoring: A new area of cognitive developmental inquiry. **American Psychologist**, [S.l.], v. 34, n. 10, p. 906-911, 1979.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. Uma reflexão sobre o uso dos materiais concretos e jogos no ensino da matemática. **BOLEMA**, [S.l.], n. 7, p. 5-10, 1990. Disponível em:
https://www.cascavel.pr.gov.br/arquivos/14062012_curso_47_e_51_-_matematica_-_emersom_rolkouski_-_texto_1.pdf. Acesso em: 16 ago. 2025.

HADAMARD, J. **The psychology of invention in the Mathematical Field.** Princeton: Princeton University Press, 1996.

INSTRUCTABLES. **Making your own slide rule.** 2011. Disponível em:
<https://www.instructables.com/Making-Your-Own-Slide-Rule/>. Acesso em: 11 nov. 2024.

KRIPKA, R. M. L.; RIBEIRO, A. J. . Os professores e as pesquisas da própria prática: uma revisão sistemática de literatura. **Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, São Paulo, v. 27, n. 1, p. 186-216, 2025. Disponível em:
<https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/69704>. Acesso em: 14 jun. 2025.

LAKATOS, E. M.; MARCONI, M. A. **Fundamentos de metodologia científica.** 5. ed. São Paulo: Atlas, 2003.

LORENZATO, S.(org.). **O laboratório de ensino da matemática na formação de professores.** 2. ed. Campinas: Autores Associados, 2009.

MAIA, F. do S. A régua de cálculo: uma aplicação das propriedades dos logaritmos. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2013, Curitiba. **Anais...** Curitiba: SBEM, 2013. p. 1-14. Disponível em:
https://www.sbembrasil.org.br/files/XIENEM/pdf/1660_476_ID.pdf. Acesso em: 16 ago. 2025.

OLIVEIRA, P. H. C.; ALVARENGA, K. B. O uso da Régua de Cálculo na educação matemática: conexões entre materiais concretos e ações mentais. In: ENCONTRO DE LICENCIATURAS E EDUCAÇÃO BÁSICA, 6., 2024, Goiânia. **Anais...** Goiânia: [S.n.], 2024. No prelo.

PEDROSA, R. E. M. **Logaritmo e a régua de cálculo: uma proposta de ensino.** 2018. f. 108. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2018. Disponível em:
<https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/2994>. Acesso em: 16 ago. 2025.

PEIXOTO, E. G.; ALVARENGA, K. B. Ações mentais matemáticas identificadas em resoluções de avaliações de cálculo diferencial e integral. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2024, Natal. **Anais...** Natal: SBEM, 2024. p. 1-12. Disponível em:
<https://www.sbembrasil.org.br/eventos/index.php/sipem/article/view/187>. Acesso em: 14 jun. 2025.

PIPPA, T. C. M. **A função logaritmo e a régua de cálculo.** 2014. f. 82. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014. Disponível em:
<https://teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55136/tde-09062014-095044/pt-br.php>. Acesso em: 16 ago. 2025.

POINCARÉ, H. A invenção matemática. In: ABRANTES, P.; LEAL, L. C.; PONTE, J. P. (Eds.). **Investigar para aprender Matemática.** Lisboa: Projecto MPT e APM, 1996.

p. 7-14.

SANTOS, A. G.; OLIVEIRA, A. N.; PEREIRA, A. C. C. As contribuições da régua de cálculo linear na construção dos saberes e das práticas docentes. **Revista BOEM**, Florianópolis, v. 8, n. 15, p. 17-36, 2020. Disponível em: <https://www.revistas.udesc.br/index.php/boem/article/view/17299>. Acesso em: 16 ago. 2025.

SANTOS, A. O.; OLIVEIRA, G. S. ; SAAD, N. S. A metacognição e estratégias metacognitivas no processo de ensino e aprendizagem da matemática. **Revista Valore**, [S.I.], v. 6, p. 23-39, 2021. Disponível em: <https://revistavalore.emnuvens.com.br/valore/article/view/1035>. Acesso em: 14 jun. 2025.

SANTOS, A. G.; PEREIRA, A. C. C. A Incorporação da régua de cálculo no ensino de multiplicação através da sua construção e do seu manuseio. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, [S.I.], v. 7, n. 20, p. 357-369, 2020. Disponível em: <https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/2827>. Acesso em: 16 ago. 2025.

SCHÖN, D. A. **Educando o profissional reflexivo:** um novo design para o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: Artmed, 2000.

SLIDE RULE MUSEUM, 2003. Disponível em: https://sliderulemuseum.com/MiscUSA/Lietz_2971-P_dcNov1957.jpg. Acesso em: 15 jun. 2025

SRIRAMAN, B. Mathematical creativity: psychology, progress and caveats. **ZDM Mathematics Education**, [S.I.], v. 49, p. 971-975, 2017. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0886-0>. Acesso em: 14 jun. 2025.

TALL, D. Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking. In: MEIRA, L.; CARRAHER, D. (Ed.). **Proceedings of 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education**. Recife: UFPE, 1995.

ZEICHNER, K. M. **A formação reflexiva de professores:** ideias e práticas. Lisboa: Educa, 1993.

Recebido em: 05 / 11 / 2025
Aprovado em: 16 / 12 / 2025