



RCEM

Revista Cearense de Educação Matemática

ISSN: 2764 - 8311



e-ISSN: 2764-8311

DOI: 10.56938/v5i9.4784



UM ESTUDO SOBRE CONHECIMENTOS NECESSÁRIOS AO FUTURO PROFESSOR DE MATEMÁTICA PARA A EXPLORAÇÃO DE SÉRIES NO ENSINO MÉDIO

A STUDY ON THE KNOWLEDGE NECESSARY FOR FUTURE MATHEMATICS TEACHERS TO EXPLORE GRADE LEVELS IN HIGH SCHOOL

Ricardo Fernando de Souza¹; Ruy César Pietropaolo²

RESUMO

Este artigo analisa dados obtidos em uma formação que fez parte da pesquisa de doutorado do primeiro autor, cuja problemática consistiu em investigar quais conhecimentos do conteúdo, comum e especializado, são mobilizados e ampliados por futuros professores de Matemática ao discutirem atividades envolvendo sequências, séries geométricas infinitas e noções de limite para o Ensino Médio. Trata-se de uma pesquisa qualitativa desenvolvida em um processo formativo com sete estudantes de uma Licenciatura em Matemática, 100% online. A primeira fase da coleta de dados constituiu-se da aplicação de instrumento diagnóstico, com o objetivo de identificar o perfil e os conhecimentos desses futuros professores a respeito dos processos de ensino e aprendizagem relativos ao tema. A segunda fase, denominada formação, e realizada segundo princípios da metodologia Design Experiments, teve o objetivo de investigar se, atividades que explorem a noção de limite da soma dos infinitos termos de séries geométricas infinitas convergentes, poderiam ampliar a base de conhecimentos dos licenciandos por meio de reflexões compartilhadas sobre o ensino desses objetos na Educação Básica. Para esta pesquisa, tomou-se como ponto de partida a posição de Villani, Bernardi, Zoccante e Porcaro que defendem um estudo inicial do Cálculo por meio de sequências, pois respeitaria a gradação da abstração e da gênese histórica, permitindo antecipar conceitos fundamentais – em particular o de limite – antes de um estudo mais aprofundado das funções reais. O referencial teórico para a análise dos dados incluiu as concepções de Tall e Vinner sobre imagem conceitual e os estudos de Ball, Thames e Phelps sobre o conhecimento profissional do professor de Matemática, em particular o conhecimento do conteúdo: comum e especializado. Essa formação revelou que os conhecimentos e a imagem conceitual dos futuros professores, inicialmente inconsistentes, sobre sequências e séries foram significativamente ampliados, durante o processo formativo por meio das reflexões compartilhadas entre os participantes.

¹ Doutor em Educação Matemática pela Universidade Anhanguera de São Paulo (UNIAN). Coordenador do Curso de Licenciatura em Matemática Semipresencial e docente da Universidade Santo Amaro (UNISA), São Paulo, São Paulo, Brasil. Rua Isabel Schmidt, 349 - Santo Amaro, São Paulo - SP, 04743-030. E-mail: rfdesouza@prof.unisa.br. ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0001-0418-0147>

² Doutor em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUCSP). Professor do Programa Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Cruzeiro do Sul (UNICSUL), São Paulo, São Paulo, Brasil. Rua Galvão Bueno, 868 - Liberdade, São Paulo - SP, 01506-000. E-mail: rpietropaolo@icloud.com. ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-1353-2191>

Palavras-chave: Licenciatura em Matemática; Conhecimento matemático para o ensino; Ensino de séries e limite; Progressão Geométrica.

ABSTRACT

This article analyzes data obtained from a training program that was part of the first author's doctoral research. The research problem consisted of investigating which content knowledge, both common and specialized, is mobilized and expanded by future mathematics teachers when discussing activities involving sequences, infinite geometric series, and notions of limit for secondary education. This is a qualitative research study developed in a training process with seven students from a 100% online Mathematics Licentiate program. The first phase of data collection consisted of applying a diagnostic instrument to identify the profile and knowledge of these future teachers regarding the teaching and learning processes related to the topic. The second phase, called training, and conducted according to the principles of the Design Experiments methodology, aimed to investigate whether activities that explore the notion of the limit of the sum of the infinite terms of convergent infinite geometric series could expand the knowledge base of the undergraduate students through shared reflections on the teaching of these objects in Basic Education. For this research, we took as a starting point the position of Villani, Bernardi, Zocante, and Porcaro, who advocate an initial study of Calculus through sequences, as this would respect the gradation of abstraction and historical genesis, allowing the anticipation of fundamental concepts – particularly that of limits – before a more in-depth study of real functions. The theoretical framework for data analysis included Tall and Vinner's conceptions of conceptual image and the studies of Ball, Thames, and Phelps on the professional knowledge of mathematics teachers, particularly content knowledge: common and specialized. This training revealed that the knowledge and conceptual image of the future teachers, initially inconsistent, regarding sequences and series were significantly expanded during the training process through shared reflections among the participants.

Keywords: Bachelor's degree in Mathematics; Mathematical knowledge for teaching; Teaching series and limits; Geometric Progression.

Introdução

Este artigo examina dados obtidos durante um processo formativo que integraram a tese de Doutorado defendida pelo primeiro autor, (Souza, 2023). Nesse processo procurou-se discutir os conhecimentos necessários aos professores de Matemática, sob os pontos de vista do conteúdo, do pedagógico e do curricular, para ensinar noções básicas de sequência, série e limite no Ensino Médio. Participaram da pesquisa sete estudantes de uma Licenciatura em Matemática, totalmente online, de uma universidade privada do estado de São Paulo. Todos esses licenciandos já haviam cursado as disciplinas Cálculo Diferencial e Integral I e II.

A problemática que orientou a construção deste artigo, segue assim formulada: quais conhecimentos do conteúdo, comum e especializado, são mobilizados e ampliados por futuros professores de Matemática durante um processo formativo voltado à exploração de sequências, séries geométricas infinitas e noções de limite para o Ensino Médio? A partir dessa questão, buscou-se analisar de que modo atividades envolvendo séries infinitas convergentes poderiam favorecer a ampliação da imagem conceitual dos

licenciandos e contribuir para a constituição de conhecimentos necessários ao ensino desses objetos matemáticos na escolaridade básica.

O objetivo deste artigo é analisar conhecimentos mobilizados por futuros professores de Matemática em situações envolvendo sequências, séries geométricas infinitas e limite da soma, considerando tanto a imagem conceitual dos participantes quanto aspectos do conhecimento matemático necessário ao ensino desses objetos.

Para conceber esse processo formativo tomamos como pressuposto de que o professor de matemática deve ser capaz de identificar as ideias fundamentais presentes em cada conteúdo que ensina, uma vez que elas possibilitam articular internamente temas dessa matemática e aproximá-la de outras. Portanto, estratégias para o ensino de noções básicas de Cálculo Diferencial no Ensino Médio – EM devem fazer parte do repertório do professor que ensina Matemática nessa etapa da Educação Básica, tendo em vista que essas aprendizagens possibilitam aprofundar o estudo das funções e de sequências.

Compartilhamos, por exemplo, a posição de Ávila (1991, 2010), quando afirma que abordagens dessas noções no EM, embora modestas, sobretudo as de derivada e limite, podem ser realizadas no contexto do estudo das funções, contrariamente à opinião de muitos professores por considerarem esse ensino muito difícil. Todavia, esse autor faz uma ressalva: essas noções ganhariam mais significado para os estudantes se as funções fossem apresentadas ao longo do EM e não em um bloco único, em geral no primeiro ano. O professor Ávila também publica um artigo na revista do professor de matemática (RPM) cujo objetivo é o de apresentar algumas séries infinitas, que considera um tópico pouco conhecido de professores e estudantes do Ensino Médio.

Neste sentido, Villani, Bernardi, Zocante e Porcaro (2012) consideram que uma abordagem inicial do Cálculo por sequências respeitaria a gradação da abstração, e da gênese histórica, permitindo antecipar conceitos fundamentais, em particular o de limite, em um contexto mais simples, que podem ser abordadas muito antes de um estudo mais aprofundado das funções reais.

Mediante o tempo que dispúnhamos para o processo formativo, optamos por discutir e investigar o ensino de noções de limite por meio de problemas envolvendo sequências e séries infinitas, tendo em vista que a revisão de literatura mostrou que havia poucos estudos sobre este tema. Outro fato que nos levou a essa escolha foram os Cadernos dos Professores publicados pela Secretaria de Estado da Educação de São Paulo em que apresenta problemas e atividades envolvendo séries já para o primeiro ano do EM.

Cabe ainda considerar que a inclusão de algumas noções de Cálculo Diferencial no EM significa também contribuir para a formação geral do estudante de modo a desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos consistentes. Assim, partimos da pressuposição de que a Matemática no currículo tem um papel de aplicar conceitos, ferramentas e linguagem para resolver e comunicar problemas reais, mas relevante também para o desenvolvimento da capacidade de abstração, de imaginação e de consideração de novas perspectivas.

Assim, levamos em conta que o estudo das noções de Cálculo abordadas neste artigo, para além das aplicações, pode favorecer o reconhecimento do estudante do EM de que a Matemática é um conjunto de conhecimentos interconectados, com objetos de estudo e métodos próprios para investigar e comunicar resultados, sejam eles teóricos ou práticos. Além disso, favorece o entendimento de que a Matemática foi construída para responder questões em diferentes momentos históricos, motivadas por problemas sejam de ordem prática, sejam vinculados a outras ciências, bem como os relacionados às investigações internas à própria Matemática.

Assim, envolve também entender a atividade matemática como uma prática humana, sujeita a acertos e erros, caracterizada por buscas, questionamentos, conjecturas, contraexemplos, refutações, aplicações e comunicação.

Segundo a BNCC o estudante

ao formular conjecturas com base em suas investigações, os estudantes devem buscar contraexemplos para refutá-las e, quando necessário, procurar argumentos para validá-las. Essa validação não pode ser feita apenas com argumentos empíricos, mas deve trazer também argumentos mais “formais”, incluindo a demonstração de algumas proposições. (Brasil, 2018, p. 540)

Além disso, diversos pesquisadores têm apontado as dificuldades dos estudantes em relação ao Cálculo como Baruffi (1999); Burigatto (2019) e Martins, (2023). Internacionalmente podemos citar os trabalhos de Cornu (1991), Villani, Bernardi, Zoccante e Porcaro (2012) e Desfitri (2016). Internacionalmente podemos citar os trabalhos de Cornu (1991), Villani, Bernardi, Zoccante e Porcaro (2012) e Desfitri (2016) que observaram as aprendizagens insatisfatórias dos estudantes de cursos superiores – licenciaturas e engenharias, por exemplo – de conceitos e procedimentos presentes nas disciplinas que envolvem o Cálculo Diferencial e Integral.

Considerando esses estudos reiteramos a proposta de desenvolver um processo formativo envolvendo séries e limites para estudantes de Licenciatura em Matemática, que futuramente poderão ensinar noções de cálculo no EM.

Marco Teórico

Para analisar os conhecimentos prévios dos licenciandos e a análise dos dados obtidos no decorrer do processo formativo, utilizamos neste artigo a noção de *imagem conceitual* de Tall e Vinner (1981) e os *conhecimentos do conteúdo – comum e especializado – segundo* de Ball, Thames e Phelps (2008)

Tall e Vinner concebem a *imagem conceitual* como um termo para descrever a construção cognitiva associada a um conceito matemático, compreendendo todas as impressões, ideias, imagens mentais, representações visuais e descrições verbais relativas a propriedades e processos que envolvem aquele conceito. Assim, a *imagem conceitual* não é uma estrutura fixa e pode se alterar ao longo do tempo, conforme o desenvolvimento cognitivo do indivíduo, com novas concepções sendo incorporadas e antigas sendo modificadas ou descartadas.

A imagem que um aluno tem, por exemplo, de “ímite” pode incluir uma representação gráfica de uma função se aproximando de um valor, ao passo que os símbolos (como $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$) são a representação formal desse conceito. Para esses pesquisadores a imagem é – quase sempre – mais intuitiva e pode ser influenciada por experiências visuais e concretas.

A escolha por Ball, Thames e Phelps (2008), decorreu de nossa finalidade: investigar sobre os conhecimentos necessários para ensinar conceitos e procedimentos matemáticos. Esses pesquisadores discutem os conhecimentos profissionais do professor de Matemática utilizando as categorias: *conhecimento comum do conteúdo*, *conhecimento horizontal do conteúdo*, *conhecimento especializado do conteúdo*, *conhecimento do conteúdo e do estudante*, *conhecimento do conteúdo e do ensino*, *conhecimento do conteúdo e do currículo*. Neste artigo optamos pela análise do *conhecimento especializado do conteúdo* de futuros professores de Matemática.

O *conhecimento do conteúdo comum* é o conhecimento necessário ou mobilizado pelas pessoas – professor ou não – para resolver problemas matemáticos. No caso do professor, ele se caracteriza pela compreensão essencial da Matemática, que o capacita para o desenvolvimento das tarefas propostas aos alunos, para a utilização correta de termos, representações e notações e para a identificação de incorreções ou inadequações quer em produções dos alunos, quer em materiais didáticos.

Já o *conhecimento especializado do conteúdo* constitui-se da capacidade não apenas de perceber os erros dos estudantes, mas de analisar e identificar prováveis causas desses erros e apresentar a eles esclarecimentos precisos e respostas convincentes, a fim

de ajudá-los a enfrentar e superar suas dificuldades. Esses conhecimentos são, portanto, necessários ao professor, mas provavelmente não o são para outras profissões. Assim, esses três pesquisadores fazem clara distinção entre o *conhecimento especializado do conteúdo* do professor de matemática com o de outro profissional que não exerce a docência.

O professor de Matemática provavelmente reconhece que o ensino da obtenção da geratriz de uma dízima periódica é um assunto previsto para o 8º ano do Ensino Fundamental: “(EF08MA05) Reconhecer e utilizar procedimentos para a obtenção de uma fração geratriz para uma dízima periódica” (BNCC, 2018, p. 313). Contudo, o repertório de conhecimentos formais em que se assentam as justificativas e os argumentos utilizados pelo professor para ensinar as dízimas periódicas, deve incluir a compreensão do conjunto dos números reais como corpo ordenado completo, assegurando a possibilidade de escrever $0,9999 \dots = \frac{x}{y}$, sendo x e y inteiros e $y \neq 0$ e garantindo a conservação da igualdade, quando multiplica-se simultaneamente os dois membros por um mesmo número real distinto de zero.

Assim, para a obtenção da fração geratriz de uma dízima periódica pela multiplicação dos dois membros da igualdade por uma potência de 10 só é possível porque o número que estamos considerando é número real. Mais ainda: esse procedimento só é possível porque, por exemplo, a série $0,9999 \dots = 0,9 + 0,09 + 0,009 + 0,0009 + \dots$ é convergente.

Portanto, é relevante o professor ter também disponíveis contraexemplos de séries infinitas em que não se pode aplicar propriedades da igualdade. Esse conhecimento seria um *conhecimento especializado do conteúdo* para ensinar dízimas – como na situação a seguir.

Seja a progressão geométrica: $1, \frac{13}{10}, \frac{169}{100}, \frac{2197}{1000}, \dots$ cuja razão é $\frac{13}{10}$ e de soma S

$$S = 1 + \frac{13}{10} + \frac{169}{100} + \frac{2197}{1000} + \dots$$

- Multiplicando ambos os termos da igualdade por 10:

$$10 \times S = 10 \times \left(1 + \frac{13}{10} + \frac{169}{100} + \frac{2197}{1000} + \dots \right)$$

$$10S = 10 + 13 + \frac{169}{10} + \frac{2197}{100} + \dots$$

- Colocando o 13 em evidencia:

$$10S = 10 + 13\left(1 + \frac{13}{10} + \frac{169}{100} + \frac{2197}{1000} + \dots\right)$$

- Substituindo $1 + \frac{13}{10} + \frac{169}{100} + \frac{2197}{1000} + \dots$ por S mostra-se um absurdo.

$$10S = 10 + 13S$$

$$10S - 13S = 10$$

$$-3S = 10 \rightarrow S = -\frac{10}{3}$$

Nesse caso, a soma de infinitas parcelas positivas é um número negativo – o que consiste, evidentemente em absurdo, decorrendo da aplicação à série divergente, de propriedades válidas apenas para séries convergentes. Assim, as justificativas apresentadas nessa situação constituem *conhecimento do conteúdo especializado*, segundo Ball, Thames e Phelps (2008) imprescindível ao professor, para que ele possa avaliar a viabilidade de propor essa discussão em sala de aula ao ensinar dízimas e números reais, mas não necessariamente imprescindível para outros profissionais. Por exemplo, um engenheiro provavelmente conhece os significados de séries convergentes e de séries divergentes – *conhecimento comum do conteúdo* segundo Ball, Thames e Phelps (2008). Todavia, para ele exercer sua profissão, não é necessário que ele tenha disponíveis, de imediato, situações em que propriedades da igualdade não são válidas.

Procedimentos Metodológicos

Este projeto de pesquisa foi submetido à Plataforma Brasil e autorizado pelo parecer de número 5.179.051 e CAEE 52325821.2.30019847.

A pesquisa foi realizada com sete futuros professores do curso de Licenciatura em Matemática na modalidade Educação a Distância, matriculados no quinto semestre do curso. Esses participantes já haviam cursado os componentes curriculares de Cálculo Diferencial e Integral I e II e tinham idades entre 29 e 45 anos, com média de 37,0 anos.

Cabe esclarecer que, neste artigo, a expressão “futuros professores de Matemática” refere-se especificamente a licenciandos matriculados no quinto semestre do curso, ou seja, estudantes que já haviam cursado aproximadamente metade da Licenciatura em Matemática. Essa delimitação é relevante, pois a percepção matemática e os conhecimentos necessários ao ensino tendem a ser progressivamente refinados ao longo da formação inicial.

Desse modo, as análises aqui apresentadas consideram o momento formativo em que os participantes se encontravam, especialmente por já terem cursado Cálculo Diferencial e Integral I e II, mas ainda não estarem na condição de concluintes do curso.

A coleta de dados ocorreu em duas etapas. Na primeira, aplicamos um questionário de entrada para cada um dos participantes de modo a identificar conhecimentos desses futuros professores de Matemática sobre a noção de limite, notadamente sobre a ideia de *série infinita* quando imagina-se adicionar parcelas sucessivamente sem que essa operação termine após um número finito de parcelas somadas.

A segunda fase, denominada processo formativo, teve o objetivo de investigar se, atividades que exploram a noção de limite da soma dos termos de séries geométricas infinitas convergentes, poderiam ampliar a base de conhecimentos dos licenciandos por meio de reflexões compartilhadas sobre o ensino desses objetos no Ensino Médio.

A intervenção foi organizada em encontros síncronos, realizados pela plataforma *Microsoft Teams*, com a participação dos sete licenciandos. As atividades foram desenvolvidas em pequenos grupos, compostos por duas duplas e um trio, e tiveram como foco a discussão de situações-problema envolvendo sequências, séries geométricas infinitas e limite da soma. Inicialmente, os participantes eram direcionados às salas virtuais para analisar e discutir as questões propostas; em seguida, registravam suas respostas e estratégias por meio de formulários eletrônicos; posteriormente, retornavam à sala principal para socializar os encaminhamentos, confrontar interpretações e participar da síntese conduzida pelo pesquisador. Esse movimento permitiu acompanhar os conhecimentos mobilizados pelos licenciandos, bem como os avanços produzidos ao longo do processo formativo.

Para este artigo selecionamos os dados coletados de apenas uma das questões do questionário de entrada, denominada de “A equação” (figura 1) que envolvia uma série infinita, duas situações discutidas na formação, uma denominada de “O paradoxo de Zenão” (figura 2) e a outra de “Os perímetros dos triângulos” (figura 3).

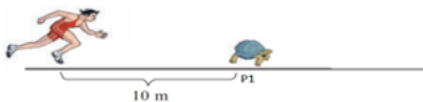
Figura 1: A equação

É possível resolver a equação $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} + \dots = 15$? Por quê?

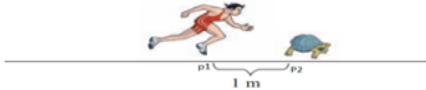
Fonte: Acervo pessoal

Figura 2: “O paradoxo de Zenão”

Atividade 3: Zeno argumenta sobre uma hipotética corrida entre Aquiles e uma tartaruga. Aquiles, confiante em sua vitória, permite que a tartaruga comece em uma posição P1, bem vantajosa à sua frente.



Começada a disputa, Aquiles precisa chegar em P1, entretanto, a tartaruga não estará mais lá, pois terá também se locomovido para uma nova posição P2.



Aquiles precisa então chegar a P2. Quando Aquiles atinge P2 a tartaruga não estará mais lá, tendo se locomovido para P3. Com este raciocínio, Zeno afirma que Aquiles nunca alcançará a tartaruga.



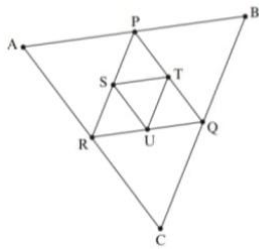
Será mesmo verdade que ele nunca alcançará a tartaruga?

a) Escreva a sequência das distâncias que Aquiles percorre até chegar ao ponto em que a tartaruga estava a cada vez. b) Calcule a soma das infinitas distâncias percorridas por Aquiles até chegar ao ponto em que se encontrava a tartaruga a cada vez. c) Quantos metros percorrerá Aquiles até alcançar a tartaruga? Ou você acredita que ele não a alcança?

Fonte: São Paulo (Estado) Secretaria da Educação (2009), p.55.

Figura 3: “Os perímetros dos triângulos”

Atividade 4: O triângulo ABC da figura é equilátero de lado 1. Unindo os pontos médios dos lados desse triângulo, obtemos o segundo triângulo PQR. Unindo os pontos médios dos lados do triângulo PQR, obtemos o terceiro triângulo STU, e assim sucessivamente. Determine a soma dos perímetros dos infinitos triângulos construídos por esse processo.



a) Quanto mede o lado PQ do triângulo PQR? E os lados PR e RQ?

b) Qual é o perímetro dos triângulos ABC, PQR e STU?

c) Escreva uma sequência numérica cujos termos são os perímetros dos triângulos ABC, PQR, STU e mais outros dois triângulos construídos segundo o critério.

d) Calcule a soma dos perímetros: dos dois primeiros, dos três primeiros e assim por diante.

Fonte: São Paulo (Estado) Secretaria da Educação (2009), p.53.

Análise e Discussão dos Dados

Expomos a seguir a análise das três questões propostas aos futuros professores e que foram selecionadas para este artigo.

Sobre a equação

A situação apresentada na figura 1 teve o propósito de avaliar se o estudante da licenciatura em matemática identificaria uma progressão geométrica (PG) infinita decrescente e calcularia o limite da soma desses termos para resolver a equação dada.

Esperávamos que os estudantes respondessem afirmativamente à pergunta feita e para resolvê-la colocassem o x em evidência, obtendo em um dos fatores uma série geométrica: $x \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots\right) = 15$.

Como a série $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ é a soma dos termos PG decrescente e infinita e de razão q , sendo $0 < q < 1$, os licenciandos calculariam essa soma por meio da expressão, $\frac{a_1}{1-q}$, sendo $a_1 = 1$, o primeiro termo, e $q = \frac{1}{2}$, a razão, obtendo $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ e concluindo que $x \cdot 2 = 15 \rightarrow x = \frac{15}{2}$.

Essa fórmula $\frac{a_1}{1-q}$, presente em todas as coleções didáticas do Ensino Médio e, nomeada de limite da soma da PG, geralmente é discutida a partir da fórmula da soma S de uma PG finita: $S = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$. Se a PG é infinita e q^n tende a zero, então a soma – limite da soma – passa a ser $S = \frac{a_1}{1-q}$.

No entanto, não esperávamos que todos os participantes classificassem a PG em questão como série convergente, mas presumíamos sim, que todos eles, ao menos tivessem a concepção de que as reticências (...) indicassem uma soma contínua, com infinitas parcelas e quanto mais termos adicionássemos às somas parciais, o limite da soma pode ser finito.

Nenhum deles conseguiu reconhecer a PG envolvida. O licenciando IV, por exemplo, sequer identificou que se tratava de uma adição com infinitas parcelas, atribuindo um valor à x de maneira “conveniente”, para que a soma dos quatro termos explicitados resultasse no segundo membro da equação, como se observa no protocolo, da figura 4.

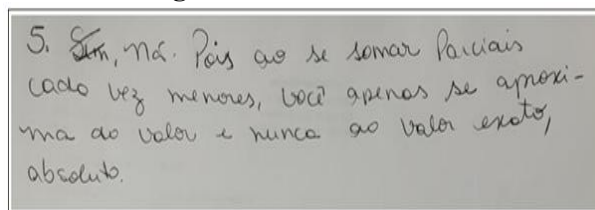
Figura 4: Protocolo Lic IV

The image shows a handwritten note on a piece of paper. The text reads: "É possível desde que tenha o valor de x , sendo $= 8$ ". To the right of this text, there are two calculations: $8 + \frac{8}{2} + \frac{8}{4} + \frac{8}{8} = 15$ and $8 + 4 + 2 + 1 = 15$. The first calculation uses fractions, and the second uses integers, both resulting in 15.

Fonte: Acervo pessoal

Já os demais licenciandos, apesar de reconhecerem de que se tratava de uma soma infinita, apenas afirmaram, sem qualquer argumentação, que essa soma não resultaria em 15. O registro a seguir, corrobora com nossa interpretação:

Figura 5: Protocolo Lic VI



Fonte: Acervo pessoal

As respostas à questão da figura 1 apontam que a possibilidade de se obter a soma de uma determinada série infinita não fazia, no momento da aplicação do questionário inicial, parte da imagem conceitual (Tall e Vinner, 1981) do grupo de futuros professores de Matemática, participantes de nossa formação e pesquisa. Esta nossa afirmação pode ser justificada pelo fato de sequer reconhecerem que o primeiro membro da equação proposta continha uma Progressão Geométrica infinita e decrescente – assunto valorizado nos currículos de Matemática do EM.

Esse não-conhecimento reduz as possibilidades de o futuro professor de Matemática selecionar e organizar atividades potencialmente ricas para a ampliação da imagem conceitual de sequências e séries a ser desenvolvida pelos alunos do Ensino Médio. Concordamos com Corbo (2012), quando afirma que o domínio do professor sobre o assunto a ser ensinado, permitirá a transformação desse conhecimento em conhecimento a ser ensinado –compreensível aos estudantes, ainda que se opte por uma abordagem apenas inicial do assunto.

Assim, procuramos investir em nosso processo formativo a ampliação da imagem conceitual sobre séries infinitas, por meio de outras situações-problema que envolvessem séries convergentes e séries divergentes,

Analisando os dados do ponto de vista de Ball, Thames e Phelps (2008) ponderamos que as dificuldades explicitadas pelos futuros professores em relação à equação proposta certamente poderão refletir no ensino de sequências e séries, pois não indicaram minimamente conhecimentos sobre o conteúdo, nem o comum nem o especializado.

Assim, os conhecimentos dos conceitos a serem ensinados são necessários para que o professor possa propor e desenvolver uma escala adequada em cada turma, em cada situação concreta, para apresentar os conteúdos que considera relevantes, não subestimando a capacidade de os alunos aprenderem, nem tratando os temas com excesso de pormenores, de interesse apenas de especialistas.

Sobre o Paradoxo de Zenão

Ao propormos a situação apresentada na figura 2, esperávamos que os estudantes observassem que a distância entre Aquiles e a tartaruga, iria diminuindo segundo à razão $\frac{1}{10}$ e escrevessem a sequência $10, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \dots$, reconhecendo que se tratava de uma progressão geométrica – PG – decrescente com razão positiva e menor que 1.

Apresentamos, a seguir, o protocolo do grupo B, formado pelos estudantes (III e IV), que inseriu os dados numéricos em uma tabela do Word.

Figura 6: Protocolo do grupo B

a) Sequência:
 $S = \{10,0; 1,0; 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; 0,00001; 0,000001; 0,0000001; 0,00000001; 0,000000001; \dots\}$

b) Soma das Distâncias
 $D_t = 10 + 1 + 0,1 + 0,01 + 0,001 + 0,0001 + 0,00001 + \dots = 11,111111111111 \text{ m}$

c) Aquiles percorrerá 11,1111111111 m até alcançar a tartaruga.

Tabela de dados:

	Distancia percorrida por Aquiles	Distância percorrida pela Tartaruga	Diferença das distâncias entre a Tartaruga e Aquiles
1	0,00000000000000	10,00000000000000	10,00000000000000
2	10,00000000000000	11,00000000000000	1,00000000000000
3	11,00000000000000	11,10000000000000	0,10000000000000
4	11,10000000000000	11,11000000000000	0,01000000000000
5	11,11000000000000	11,11100000000000	0,00100000000000
6	11,11100000000000	11,11110000000000	0,00010000000000
7	11,11110000000000	11,11111000000000	0,00001000000000
8	11,11111000000000	11,11111100000000	0,00000100000000
9	11,11111100000000	11,11111110000000	0,00000010000000
10	11,11111110000000	11,11111111000000	0,00000001000000
11	11,11111111000000	11,11111111100000	0,00000000100000
12	11,11111111100000	11,11111111110000	0,00000000010000
13	11,11111111110000	11,11111111111000	0,00000000001000
14	11,11111111111000	11,11111111111100	0,00000000000100

Fonte: Acervo pessoal

As observações formuladas no decorrer da discussão entre os membros dos grupos, indicaram em princípio, dúvidas em suas falas:

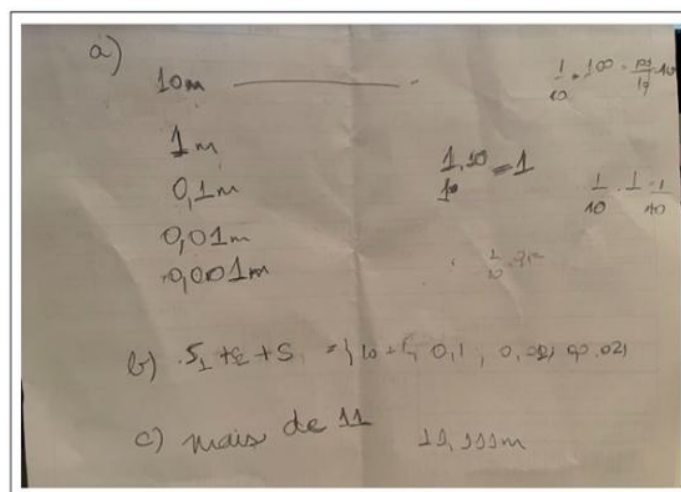
[...] Lic III: quando ele tava no ponto inicial zero, ela já tava a dez metros na frente, quando ele chegou perto dela, ela já tava 11 metros, mesmo que ele vai caminhando, ele nunca vai alcançar ela. Lic IV: só que ela alcança ela, em um dado momento ele alcança na verdade eu fiz os cálculos e como Aquiles é dez vezes mais rápido, ele vai andando mais rápido que ela, então conforme ela vai andando menos que ele, chega um ponto que ele consegue ultrapassar ela,

porque ele é mais rápido que ela, os números vão ficando cada vez menores, menores, menores.....só que chega uma hora que ele zera a distância da tartaruga” Lic (V) “Ummmm”...

[...] Lic IV: a sequência vai ficando 10, 1, 0,1, 0,01, 0,001, 0,0001, 0,00001, 0,000001 ..., a sequência tende a zero [trecho1:20:45] a soma é 11,1111111111 a gente foi somando as diferenças que Aquiles foi percorrendo $10+1+0,1+0,01+0,001+0,00001$ e assim por diante. (Grupo (B)).

No entanto, os estudantes não registraram que esse número é uma dízima periódica, pois não colocaram as reticências. O grupo C, formado pelos participantes V, VI e VII apresentou raciocínio (figura 7) parecido com o do grupo B, mostrando, também, compreensão sobre a questão, conforme se observa:

Figura 7: Protocolo do grupo C



Fonte: Acervo pessoal

Percebemos nos grupos ideia relacionadas à exploração da soma dos infinitos termos resultando em: $10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots = 11,111 \dots$ revelando uma ideia mais consistente a respeito da soma infinita.

A seguir, destacamos parte dos encaminhamentos adotados para a discussão de itens que compuseram atividade.

Quadro 1: Exploração do conceito de limite envolvendo o paradoxo de Zenão

Ações do pesquisador – questões propostas	Concepções/registros/ações dos futuros professores sujeitos de nossa pesquisa	Objetivos das questões propostas na atividade
Pesquisador: perceberam que que Aquiles estava na posição zero e a tartaruga na posição 10? Questões: (a) E quando Aquiles chegar na posição 10, a tartaruga estará 1 metro agora a frente, certo? (b) Aquiles caminha até a posição 1, só que quando ele chega nessa posição, a tartaruga já vai estar na posição 0,1, tudo bem? E se Aquiles continuar, chegará na posição 0,1, a tartaruga vai estar em qual posição agora? Pesquisador: Perceberam que a distância entre Aquiles e a tartaruga diminui de acordo com uma progressão geométrica de razão menor que 1, ou seja $\frac{1}{10}$? O pesquisador expõe em slide: (c) A soma das infinitas distâncias poderia ser: $10 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots$? Então, Aquiles alcançará a Tartaruga depois de percorrer quantos metros? Essa soma não tem um Limite?	“Sim”. “Silêncio” “Tudo bem”. “sempre que Aquiles chega na tartaruga, ela já está um pouco a frente” e a distância, <u>tá</u> ficando cada vez menor” Lic I: “.... é em 0,01 metro” “sim” “sim, poderia”. Lic I: “.... em 11,1111...metros.”	Objetivos: - Reconhecer que a sequência que irá ser formada, é uma PG infinita e de razão $\frac{1}{10}$. - Reconhecer que a soma dos infinitos elementos de uma sequência pode ser um número.

Fonte: Acervo do autor

Todos concordaram com a possibilidade de Aquiles alcançar a tartaruga após verificarem que a soma das infinitas distâncias, tendia a 11,111..., ou seja a um número real, embora para esses licenciandos restassem dúvidas de como obter essa soma. Observamos que as discussões ocorridas no interior de cada grupo e posteriormente entre os grupos amplia a *imagem conceitual* de cada licenciando.

No entanto, nenhum desses estudantes calculou a soma das “infinitas distâncias percorridas por Aquiles” até chegar ao ponto em que se encontrava a tartaruga, usando

$$\frac{a_1}{1-q} = \frac{10}{1-\frac{1}{10}} = \frac{100}{9}.$$

Os resultados observados nos levaram a concluir que seria necessário retomar com os licenciandos alguns pontos sobre sequências, séries e de limite tendendo ao infinito, destacando o limite da soma de uma PG com a razão $0 < q < 1$. Podemos afirmar que durante a realização da atividade em grupo e depois o compartilhamento das

discussões com os demais grupos, ampliou o *conhecimento do conteúdo – comum e especializado* (Ball et al, 20080) de cada futuro professor de matemática.

Sobre o Problema dos Perímetros dos Triângulos

Os três grupos de licenciandos se reuniram para discutir sobre o problema dos triângulos equiláteros apresentado na figura 3. Da mesma forma que as duas questões anteriores esperávamos que os estudantes reconhecessem que os perímetros compõem, segundo a ordem de construção, a sequência geométrica infinita $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \dots$ de razão $q = \frac{1}{2}$ e que a sequência iria se aproximando de zero. Além disso, indicariam que o limite da soma desses perímetros $3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \dots$ é igual a 6.

O grupo C recorreu ao uso da notação $\frac{a_1}{1-q}$, para calcular a série, conforme apresenta o protocolo da figura 8.

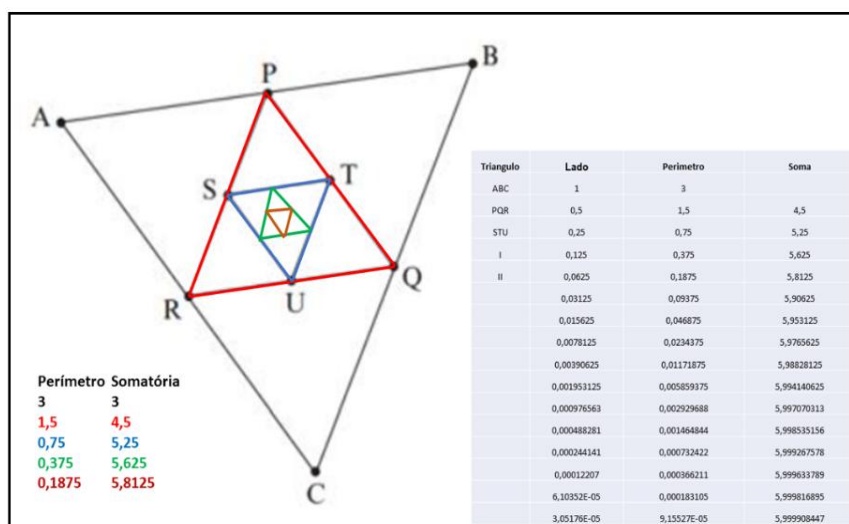
Figura 8: Protocolo do grupo C

The image shows a handwritten mathematical protocol on a piece of paper. It includes the following content:

- At the top, it defines a geometric progression: $P.G. (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$.
- It states the limit formula: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$.
- It identifies the first term $a_1 = 3$ and the common ratio $q = \frac{1}{2}$.
- It calculates the sum of the first three terms: $S_3 = 3 + 1.5 + 0.75 = 5.25$.
- It calculates the sum of the first four terms: $S_4 = 5.25 + 0.375 = 5.625$.
- It shows the general formula for the sum of an infinite series: $S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{3}{1-\frac{1}{2}} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6$.
- It also shows the sum of the first five terms: $S_5 = 5.625 + 0.1875 = 5.8125$.
- At the bottom, it states the final result: $S = 6$.

Fonte: Acervo do autor

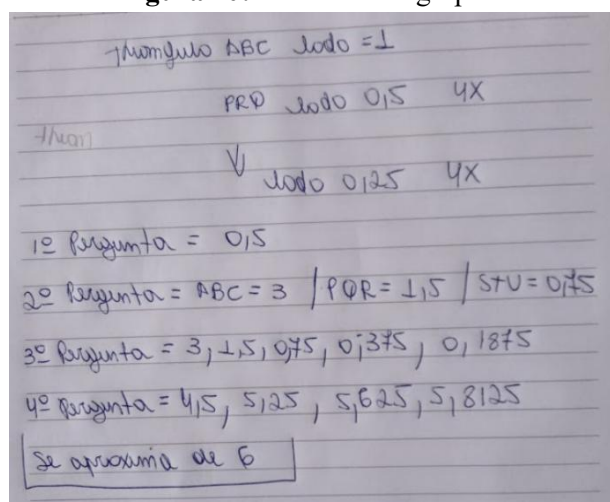
Percebemos o avanço dos estudantes do grupo C na resolução do problema dos triângulos relativamente ao problema de Zenão, pois incorporaram em seus registros uma linguagem, utilizando termos como limite e infinito, ampliando a *imagem conceitual* do tema e os *conhecimentos do conteúdo*. Os estudantes do grupo B (figura 9), por sua vez, não apresentaram esse registro, mas ao utilizarem o Excel indicaram com mais segurança que a soma dos perímetros era 6, embora intuitivamente.

Figura 9: Protocolo do grupo B

Fonte: Arquivo pessoal

Como se vê o grupo B utiliza a tabela (Excel) para continuar a soma, verificando neste caso, que por mais que se aumente o número de termos na série infinita, a soma se aproximará cada vez mais de seis.

Já o grupo A obtém os termos dos perímetros dos triângulos, forma a sequência numérica, e em seguida, efetua o somatório por escrito para verificar que a soma também irá se aproximar do número seis. Entretanto, não utiliza nenhum recurso tecnológico ou alguma representação usual do Cálculo para confirmar sua resposta, apresentando poucas somas, conforme a figura 10.

Figura 10: Protocolo do grupo A

Fonte: Arquivo pessoal

Diante das estratégias de abordagem vistas nesses protocolos, percebe-se ao longo desta intervenção, que a representação da série infinita foi se incorporando à *imagem conceitual* dos participantes desses grupos.

O quadro a seguir apresenta algumas propostas de discussão para a linguagem usual de noções de limites no infinito.

Quadro 2: Conceito de limite utilizando perímetros de triângulos equiláteros

Ações do pesquisador – questões propostas	Concepções/registros/ações dos futuros professores sujeitos de nossa pesquisa	Objetivos das questões propostas na atividade /observações do pesquisador
"[...] ... vocês verificaram que a soma das parcelas seria: $S_1 = 3$ para a primeira parcela, foi isso?"	"Sim"	• Objetivos: ampliar o conceito de série geométrica convergente.
Questão proposta: Estão lembrados que vimos a ideia de soma infinita anteriormente em outras atividades?	"Sim"	• Finalidade: retomar a ideia de soma infinita e introduzir o a noção de limite por meio do aspecto algorítmico.
Vocês verificaram que a primeira soma seria 3, e a segunda, seguindo essa ideia seria: $S_2 = 3 + \frac{3}{2}$, tudo bem? E isso dá quanto?	Lic. (R) e (K) dos Grupos (B) e (C): "3 + 1,5" igual a "4,5"	• Interpretação: Os grupos acompanharam o desenvolvimento da atividade. Demonstraram interesse durante o debate se esforçaram para compreender as ideias discutidas em outros encontros referente as noções de aproximação e soma infinita, associando as noções de limite envolvendo sequências e séries
Se continuarmos? $S_2 = 3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \dots$	Lic (P) "mais a terceira 0,75 que dá 5,25, mais a quarta 0,375 que dá 5,625 e é...mais a quinta 0,1875 que vai ficar 5,8125" Se continuarmos 5,8125 + 0,09375 que vai dar igual a 5,90625.	
A soma converge ou diverge?	"converge" no caso para 6, né...."	
Então, podemos escrever a expressão da soma infinita para um número S , como sendo o limite: $S = S_n$.	"isso"	
	"Sim"	

Fonte: Acervo do autor

Com isso, pretendíamos que a ideia de limites no infinito poderia também ser obtida usando a expressão $S = (3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} + \frac{3}{32} + \frac{3}{64} + \frac{3}{128} + \frac{3}{256} + \dots + \frac{3}{2^n})$, para promover a ampliação da imagem de conceito de limite no infinito dos licenciandos

Há, em nosso ponto de vista, uma ascensão nas argumentações dos participantes. Esse progresso pode ser verificado em comparação aos registros apresentados anteriormente a respeito da compreensão da adição de infinitas parcelas em relação a série. Fato esse, podendo ser constatado no segundo e no terceiro encontro da intervenção. Tão logo, essas questões foram sendo aprimoradas no decorrer do experimento.

Considerações

As análises desenvolvidas neste artigo tiveram como problemática central compreender quais conhecimentos do conteúdo, comum e especializado, são mobilizados e ampliados por licenciandos em Matemática, matriculados no quinto semestre do curso, durante um processo formativo voltado à exploração de sequências, séries geométricas infinitas e noções de limite para o Ensino Médio.

A partir dos dados analisados, observou-se que os participantes apresentavam, inicialmente, conhecimentos frágeis e pouco articulados sobre a possibilidade de atribuir sentido à soma de infinitas parcelas em determinadas séries convergentes. No entanto, as atividades desenvolvidas ao longo da intervenção favoreceram a ampliação da imagem conceitual dos licenciandos, especialmente quando passaram a reconhecer relações entre sequências, séries geométricas infinitas, convergência e limite da soma, ainda que permanecessem dificuldades relacionadas à formalização desses conceitos.

É importante reiterar e ampliar nossas justificativas para a escolha de iniciar a discussão sobre sequências, séries e limites com os participantes da pesquisa, licenciandos em Matemática. Essas escolhas são baseadas em nossas compreensões das leituras de textos sobre investigações e práticas de ensino e pesquisa, que revelam o que é imprescindível e o que pode ser tratado em segundo plano no processo de ensino-aprendizagem deste tema com estudantes de Licenciatura em Matemática, especialmente na modalidade de Educação a Distância (EaD).

Embora a noção de sequência numérica também seja abstrata, pois envolve a possibilidade de uma infinidade de números, ela é sustentada por uma base mais concreta, uma vez que os primeiros n termos da sequência podem ser previstos e determinados à medida que n se aproxima do infinito, especialmente nos casos mais simples. Por outro lado, no que se refere às funções reais, o nível de abstração é significativamente mais elevado, pois o conhecimento dos valores que uma função pode assumir, mesmo que em um número infinito de pontos, geralmente não nos permite deduzir imediatamente o comportamento da função em muitos outros valores. Assim, não conseguimos dominar completamente a tendência de uma função, mesmo em um intervalo “muito pequeno” de seu domínio, o que requer o uso de ferramentas mais robustas.

De acordo com Villani et al. (2012), uma abordagem inicial do cálculo através de sequências respeita a gradação da abstração e a gênese histórica, permitindo a antecipação de conceitos fundamentais, sobretudo o de limite em um contexto mais acessível, que pode ser explorado antes do estudo das funções reais.

Consideramos esses aspectos ao selecionar as atividades sobre sequências e séries e seus respectivos contextos, que foram desenvolvidas durante o processo formativo, levando em conta dois critérios:

1. Os objetos de conhecimento que realmente constam nos currículos de Matemática para os últimos anos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, conforme a BNCC.

2. Os objetos de conhecimento que podem ser explorados em cursos de Licenciatura, visando à formação necessária para que esses futuros professores de Matemática ensinem esses conteúdos a alunos da Educação Básica. Em outras palavras, os futuros professores precisam construir conhecimentos para o ensino, seguindo as categorias propostas por Ball et al. (2008).

A pesquisa revelou inicialmente concepções inconsistentes dos futuros professores sobre sequências, séries e, conseqüentemente, sobre a noção de limite. Esse foi o ponto de partida para o processo de formação e pesquisa com os participantes.

As discussões e reflexões promovidas ao longo desse processo ampliaram a compreensão conceitual – *imagem conceitual* – dos licenciandos em relação às noções mencionadas, ainda que de forma não totalmente satisfatória, especialmente no que se refere à importância do componente formal no desenvolvimento dessas noções.

Podemos afirmar que os estudantes expandiram sua base de conhecimentos sobre as noções abordadas, especialmente no que diz respeito ao *conhecimento especializado do conteúdo*, além do conhecimento comum do conteúdo. Cabe-nos afirmar que não pudemos discutir em nossos encontros o conhecimento pedagógico do conteúdo e nem o curricular do conteúdo tal era o não-conhecimento dos objetos matemáticos a serem ensinados.

Retomando a problemática que orientou este estudo, os dados analisados indicam que os futuros professores mobilizaram inicialmente conhecimentos frágeis e pouco articulados sobre sequências, séries geométricas infinitas e limite da soma. No entanto, as discussões realizadas no decorrer do processo formativo, possibilitaram a ampliação da imagem conceitual dos licenciandos e avanços em relação ao conhecimento comum e ao conhecimento especializado do conteúdo.

Essa ampliação mostrou-se relevante para que os participantes pudessem compreender não apenas os procedimentos matemáticos envolvidos, mas igualmente algumas exigências conceituais necessárias à abordagem desses temas no Ensino Médio.

Por fim, ainda há um vasto campo de pesquisa a ser explorado sobre a introdução de noções relacionadas ao Cálculo na Educação Básica e, consequentemente, sobre a formação de professores de Matemática para esse ensino.

Referências

- ÁVILA, Geraldo. O Ensino do Cálculo no Segundo Grau. In: **Revista do Professor de Matemática**, n.18, Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1991, p.1-9.
- ÁVILA, Geraldo. Limites e Derivadas no Ensino Médio? In: **Revista do Professor de Matemática**, nº 60. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2006, p. 30 -38.
- BALL, Deborah Loewenberg; THAMES, Marke Hoover; PHELPS, Geoffrey. (2008). Content Knowledge for Teaching: what makes it special? In: **Journal of Teacher Education**. 59(5), 389-407. doi: 10.1177/0022487108324554
- BARUFI, Maria Cristina. Bonomi. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral, 1999**. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, 1999.
- BRASIL. Ministério da Educação. (2018). **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC disponível em: <http://download.basenacionalcomum.mec.gov.br/> acesso em 10/01/2024
- BURIGATO, Sonia Maria Monteiro da Silva. **Um estudo sobre a aprendizagem do conceito de limite de função por estudantes nos contextos Brasil e França**. (Tese de doutorado em Educação Matemática). Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, 2019. Campo Grande. Disponível em: https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=7645622 acesso em 10/01/2024
- CABRAL. Tânia Cristina Baptista; BALDINO, Roberto Ribeiro. Cálculo infinitesimal para um curso de engenharia. **Revista de Ensino de Engenharia**, 25(1), 3-16, 2006. Disponível em: <http://revista.educacao.ws/revista/index.php/abenge/article/viewFile/31/13> acesso em 10/01/2024
- CARVALHO, João Pitombeira de. O cálculo na escola secundária: algumas considerações históricas. **Caderno CEDES**. Campinas: Papyrus, n. 40, p. 68-81, 1996.
- CORBO, Olga. **Um estudo sobre os conhecimentos necessários ao professor de matemática para a exploração de noções concernentes aos números irracionais na Educação Básica**. (Tese de doutorado em Educação Matemática). Universidade Bandeirantes. São Paulo, 2012. Disponível em: <https://repositorio.pgsscogna.com.br/handle/123456789/3493> acesso em 10/01/2024.

DESFITRI, Rita. In-service teachers' understanding on the concept of limits and derivatives and the way they deliver the concepts to their high school students. In: **Journal of Physics: Conference Series**. IOP Publishing, 2016. p. 012016.

LÜDKE, Menga; IVENICKI, Ana. Teoria e prática na formação de professores: Brasil, Escócia e Inglaterra. **Ensaio: Avaliação e Políticas Públicas em Educação**, v. 30, p. 579-597, 2022.

MARTINS, Junior José Carlos. **Resolução de problemas de resistência dos materiais: um experimento de ensino envolvendo etapas da modelagem**. 256 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). São Paulo: Centro Universitário Anhanguera de São Paulo, 2023. Disponível em: <https://repositorio.pgsscogna.com.br/handle/123456789/63372> acesso em 10/01/2024.

MACHADO, Nílson José. **Cálculo Diferencial e Integral na Escola Básica: possível e necessário**. São Paulo: USP, 2008. Disponível em <http://www.nilsonmachado.net/sema20080311.pdf>. Acesso em 25 jul. 2012.

SÃO PAULO, (Estado) Secretaria da Educação. **Caderno do professor: matemática, ensino médio - 1ª série, volume 1 /Secretaria da Educação**; coordenação geral, Maria Inês Fini; equipe, Carlos Eduardo de Souza Campos Granja, José Luiz Pastore Mello, Nílson José Machado, Roberto Perides Moisés, Ruy César Pietropaolo, Walter Spinelli. – São Paulo: SEE, 2009.

SOUZA, Ricardo Fernando De. **Um Estudo Sobre Conhecimentos Necessários ao Futuro Professor de Matemática para a Exploração de Noções de Limite no Ensino Médio**. 2023 – 214 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2023.

TALL, David; VINNER, Shlomo. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. **Educational studies in mathematics**, v. 12, n. 2, p. 151-169, 1981.

VILLANI, Vinicio; BERNARDO, Claudio; ZOCCANTE, Sergio; PORCARO, Roberto. **Non solo calcoli: Domande e risposte sui perché della matematica**. Springer. doi: 10.1007/978-88-470-2610-0.

Recebido em: 18 / 12 / 2025
Aprovado em: 22 / 06 / 2026