RECEM
Revista Catarinense de Educação Matemática

PROCESSOS DE ABSTRAÇÃO MATEMÁTICA: reflexões a partir da articulação entre o Desvanecimento da Concretude e a Teoria Dos Registros De Representação Semiótica

MATHEMATICAL ABSTRACTION PROCESSES: reflections from the articulation between the Concreteness Fading and the Theory of Semiotic Representation Registers

Eduardo Sabel[1]
Everaldo Silveira[2]

Resumo: Considerando a matemática uma ciência composta por objetos ideais abstratos, as pesquisas em educação matemática devem contemplar essa discussão para contribuir em como podemos promover sua aprendizagem. O presente artigo, de caráter qualitativo e teórico, apresenta uma reflexão sobre os processos de abstração na aprendizagem matemática, a partir de uma articulação teórica entre o Desvanecimento da Concretude e os Registros de Representação Semiótica. Por meio da compreensão dos aspectos conceituais de cada referencial e como podem ser conectados, estabelecemos uma discussão sobre a abstração matemática por meio do diálogo teórico entre ambos. Dentre as principais reflexões, defendemos que, para refletirmos acerca dos processos de abstração matemática, os dois referenciais podem ser usados em conjunto, pois oferecem elementos significativos para investigá-los.

Palavras-chave: Abstração Matemática. Desvanecimento da Concretude. Registros de Representação Semiótica. Aprendizagem Matemática.

Abstract: Considering mathematics as a science composed of abstract ideal objects, research in mathematics education should contemplate this discussion to contribute to how we can promote its learning. The present article, of qualitative and theoretical character, sought to present a reflection about the abstraction processes in mathematical learning, from a theoretical articulation between the Concreteness Fading and the Semiotic Representation Registers. By understanding the conceptual aspects of each referential and how they can be connected, we established a discussion about mathematical abstraction through the theoretical dialogue between both. Among the main reflections, we argue that to reflect on mathematical abstraction, both references can be used together and offer significant elements to investigate the processes of abstraction.

Keywords: Mathematical Abstraction. Concreteness Fading. Semiotic Representation Registers. Mathematical Learning.

[1] Doutorando em Educação Científica e Tecnológica (PPGECT/UFSC). Atua como Especialista de Ensino III no Centro de Educação Digital no SENAI/SC. Florianópolis – SC. E-mail: eduardosabelmatematica@gmail.com
[2] Doutor em Educação Científica e Tecnológica (PPGECT/UFSC). Professor Adjunto do Departamento de Metodologia de Ensino da UFSC (MEN/CED), Florianópolis – SC. E-mail:derelst@hotmail.com.

1. INTRODUÇÃO

A matemática, por se conceber como uma ciência cujos conhecimentos são ideais e não físicos, exige um olhar atencioso ao que se refere a oportunizar o aprendizado de conceitos abstratos, tema que muitas pesquisas na área têm se dedicado a investigar (JARDINETTI, 1997; MAIO, 2001). No intuito de entender essa problemática, diferentes linguagens e representações têm sido utilizadas para promover compreensões acerca desses objetos e favorecer sua abstração (KOKKONEN, LICHTENBERGER e SCHALK, 2022). E, dentre o conjunto de possibilidades, a ideia de usar materiais concretos para fazer conexões entre conceitos abstratos tem sido defendida por diferentes autores como um meio para exemplificar os processos de abstração (FIORENTINI, 1995; BJORKLUND, 2014; UTTAL, 2003).

A partir do exposto, fazemos a seguinte indagação: Que teorias podem contribuir para a reflexão dos processos de abstração em matemática? Dentre as possíveis perspectivas teóricas, entendemos que a abordagem do Desvanecimento da Concretude[3] e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica[4], de Raymond Duval, são potencialmente significativas para isso. A TRRS é uma teoria semiocognitiva, de aprendizagem intelectual, que defende o ensino da matemática indissociável da mobilização de diferentes registros de representação semiótica, enquanto que a do Desvanecimento da Concretude apresenta uma proposta de sequenciamento para a abordagem das representações matemáticas, partindo de um meio concreto que vai gradativamente perdendo suas propriedades físicas até se tornar uma representação idealizada e abstrata.

Compreendendo que ambas as perspectivas teóricas partem de um campo onde a semiótica exerce um papel fundamental nos processos cognitivos, neste artigo objetivamos: Refletir sobre os processos de abstração na aprendizagem matemática, a partir de uma articulação teórica entre o Desvanecimento da Concretude e os Registros de Representação Semiótica. Em um primeiro momento, apresentaremos os principais aspectos teóricos da TRRS e do Desvanecimento da Concretude para, em seguida, construirmos um diálogo teórico que contribua na reflexão da abstração.

[3] Em inglês, no original, *Concreteness Fading*. Usamos a tradução que consideramos a mais apropriada, entendemos que a concretude se relaciona com qualquer característica física ou visual que busca indicar um objeto.
[4] Utiliza-se a sigla TRRS como referência à Teoria de Duval.

2. TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

2.1 Os pressupostos da teoria e a hipótese de aprendizagem de Duval

Desenvolvida pelo filósofo e psicólogo francês Raymond Duval na década de 1980, a TRRS investiga a aprendizagem matemática, sob uma perspectiva que analisa os processos cognitivos que promovem sua compreensão. Segundo os princípios dessa teoria, os objetos matemáticos são materiais de estudo ideais, abstratos e conceituais, e isso explica a forma como são trabalhados, que ocorre geralmente por meio de uma representação.

Duval (2011) aponta a necessidade de pensarmos no funcionamento cognitivo que envolve a matemática, tendo em vista sua natureza epistemológica, e pelo fato de estarmos trabalhando com objetos ideais e abstratos. Ele defende que o saber matemático atravessa a esfera das representações semióticas que possibilitam o acesso a esses objetos culturais. Na matemática, utilizamos vários sistemas semióticos, incluindo a língua natural, a linguagem algébrica, os gráficos, as tabelas, as figuras geométricas, os esquemas, o sistema de numeração decimal, as coordenadas cartesianas, dentre outros.

Duval (2004) diferencia esses sistemas e aponta as características de um registro de representação semiótica. Logo, para um sistema ser considerado um registro, ele necessita cumprir certas atividades cognitivas, a saber: a formação de uma representação identificável, o tratamento e a conversão.

Formação de Representação Identificável: a forma que reconhecemos um objeto através de suas características específicas e regras que o compõem. Duval (2004, p. 36) diz que essa atividade está relacionada "aos traços perceptíveis que possam identificar algum objeto em um sistema semiótico". Podemos pensar no exemplo da função $g(x) = 3x + 2$, que indica uma representação que pode nos remeter a uma função afim. Ou seja, a Formação de Representação Identificável é composta pelo conjunto de elementos, unidades, princípios e regras que identificam o objeto.

Tratamento: consiste em alterar o conteúdo da representação através de operações coerentes para o sistema semiótico envolvido, mas permanecendo ainda no registro da representação inicial. Como um exemplo de tratamento, Duval (2003, p. 16) argumenta que é preciso "efetuar um cálculo ficando estritamente no mesmo sistema de escrita ou de representação dos números". Outro modo seria partir da expressão $(x + 3)^2$ e desenvolvê-la para se obter $x^2 + 6x + 9$. Cumpre notar que o registro inicial utilizado era o algébrico, sendo que, após as operações pertinentes, decidimos alterar o conteúdo sem extrapolar esse registro, caracterizando essa situação como uma atividade de tratamento.

Conversão: atividade que ocorre quando se parte de um registro de representação de um objeto e se transforma em outro registro diferente do inicial. Ou seja, quando o registro de 19 partidas é diferente do registro de chegada. Para Duval (2004, p. 16), "as conversões são transformações de representações que consistem em mudar de registro conservando os mesmos objetos denotados". Um exemplo disso seria pensarmos nas expressões: *dois terços* e ⅔. Na primeira temos o número sendo representado pelo registro escrito por meio da língua natural, enquanto na segunda uma representação dentro do registro simbólico. Como esses dois sistemas semióticos são diferentes, essa atividade cognitiva é chamada de conversão.

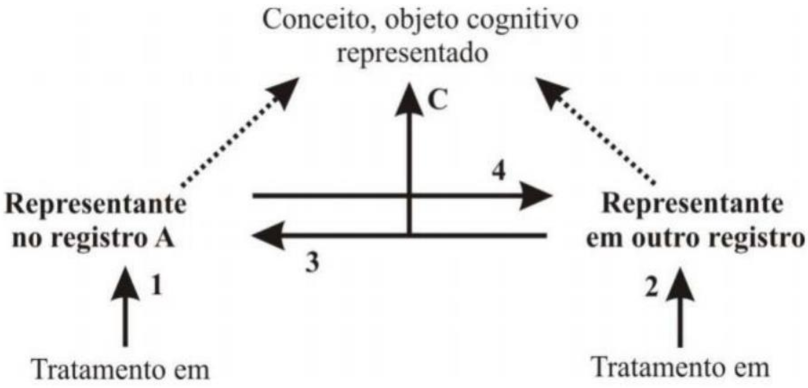
Duval (2003, p. 14) salienta que "a originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo o momento de registro de representação". Desta forma, a atividade cognitiva de conversão é a mais importante dentro da TRRS. Entendemos que é preciso usar uma variedade de objetos ostensivos[5] (os quais, neste caso, são os registros de representação) para promover o acesso aos objetos não-ostensivos (conceitos e imagens mentais).

Destacamos que, quando falamos em Registros de Representação, a língua materna também representa uma delas, exercendo um papel fundamental (DUVAL, 2004). A língua materna pode ser entendida como um registro fundante, pois é ela que cria os meios para se compreender e falar acerca dos objetos matemáticos antes mesmo de atingir os registros simbólicos formais da própria matemática (DUVAL, 2011)

Embora as representações sejam importantes para a aprendizagem, Duval (2012, p. 70) chama a atenção para que, na matemática, os objetos não sejam confundidos com suas representações, uma vez que "o recurso a muitos registros parece mesmo uma condição necessária para que os objetos matemáticos não sejam confundidos com suas representações". Desta maneira, utilizar mais registros evita que o indivíduo acredite que uma única representação seja o objeto como um todo. O esquema a seguir representa a hipótese fundamental de aprendizagem de Duval, que destaca a importância da coordenação de registros:

[5] Os objetos ostensivos são todos aqueles que apresentam "uma natureza sensível, certa materialidade que, com efeito, adquirem para o sujeito humano uma realidade perceptível" (HENRIQUES, 2019, p. 65).

Figura 1 - Esquema da hipótese fundamental da aprendizagem de Duval



Fonte: Duval (2012, p. 282).

Pela imagem acima, a TRRS assume que, para alcançarmos a compreensão de um objeto/conceito matemático, devemos trabalhar com diferentes representações, tratando e convertendo-as. Desta forma, quanto maior for a diversidade de registros utilizada, maior será o conteúdo semiótico a ser mobilizado, fazendo com que mais características, propriedades e relações com o objeto cognitivo sejam estabelecidas.

2.1 O papel semiótico dos materiais concretos

No âmbito das discussões semióticas, os materiais concretos também desempenham um papel importante para o aprendizado da matemática. Contudo, eles não são classificados como um registro de representação semiótica, pois não permitem a atividade cognitiva de igual tratamento aos demais registros. Para exemplificar, pensemos no Bloco de Base Dez (Material Dourado)[6], amplamente conhecido por ensinar a contagem e os agrupamentos do sistema de numeração decimal. Suas peças são feitas de uma forma que os modos de tratar sejam restritos e limitados, pois não se pode, por exemplo, quebrar uma peça que vale 100 e transformar em duas peças de 50. Ou ainda, dividir uma unidade ao meio para formar uma fração. E embora possibilite diversas situações, o material apresenta limitações iguais às que impõe sua concretude, ao não permitir, por exemplo, a atividade de tratamento que Duval (2004) defende e que um registro deve cumprir.

[6] Por não encontrar na literatura internacional uma referência à expressão "Material Dourado", utilizaremos neste texto "Bloco de Base Dez".

Mesmo assim, isso não significa que materiais concretos não desempenham um papel semiótico na aprendizagem. As interações entre os materiais e os estudantes podem ajudar na compreensão de ideias que o objeto carrega. No estudo de Pires, Sabel e Silveira (2022, p. 9, no prelo), argumenta-se que tais recursos "podem oferecer informações físicas e visuais sobre os conceitos matemáticos, que outros sistemas não oferecem". Voltando ao exemplo do Bloco de Base Dez, o material concreto, ao ser manipulado pelo estudante e acompanhado de mediações feitas pelo professor, oferece a possibilidade de entender as formas de agrupamento admitidas por nosso sistema de numeração.

Neste sentido, os materiais concretos são entendidos como sistemas de representação auxiliar ou intermediária para o funcionamento do pensamento matemático (DUVAL, 2003; 2011), os quais são definidos como representações de transição, usados para apoiar, auxiliar e contribuir na passagem de um registro a outro. Algumas pesquisas como a de Moretti e Baerle (2022) já investigam os diferentes usos das representações auxiliares, apresentando os materiais concretos como representações intermediárias, os quais podem ser utilizados como materiais que substituem visualmente os objetos de estudo. Montenegro *et al*. (2020) também enriquecem o debate com um estudo de representações auxiliares, as quais são empregadas como instrumentos que ajudam o estudante a resolver problemas de combinação, evidenciando sua contribuição.

Ao compreendermos o papel semiótico dos materiais manipulativos, entendemos que contribuem para além de agir como uma representação auxiliar, uma vez que oferece também uma possibilidade semiótica para representar o conceito. Conforme já mencionado, Duval (2012, p. 9) alerta que "os objetos [cognitivos] matemáticos não devem ser jamais confundidos com a representação que se faz deles". Neste caso, a utilização das diferentes representações semióticas (inclusive, as auxiliares) deve acontecer com o intuito de serem trabalhadas em conjunto e não de forma isolada. E isso, conscientes de que o foco da aprendizagem é o objeto mental (cognitivo), e não os objetos ostensivos.

3. O DESVANECIMENTO DA CONCRETUDE

A abordagem conhecida como o Desvanecimento da Concretude[7] é entendida como uma sequência instrucional para se trabalhar com as representações externas (visuais e concretas), no intuito de promover a abstração (FYFE; NATHAN, 2019). A ideia geral é que

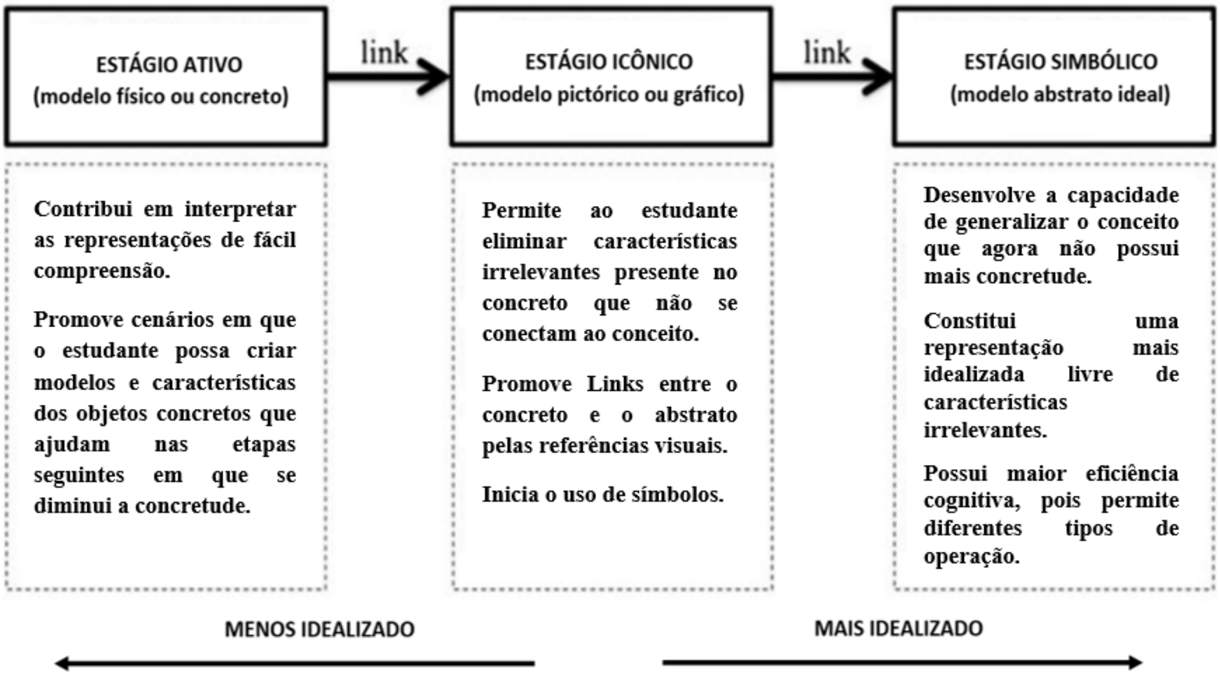
[7] O Desvanecimento da Concretude não possui um único autor/criador. Tem sido representado, principalmente, pela pesquisadora Prof. Drª Emily R. Fyfe, da Indiana University Bloomington, em conjunto com outros pesquisadores.

os estudantes partam de recursos concretos e progridam aos poucos para uma representação mais idealizada.

O termo surgiu a partir da argumentação defendida por Bruner (1966) acerca da progressão da aprendizagem, que utiliza inicialmente representações icônicas até chegar às simbólicas. Nessa mesma esteira, Butler *et al.* (2003) orientam que é preciso trabalhar os conceitos na seguinte sequência: concreto-representacional-abstrato. O Desvanecimento da Concretude utiliza as ideias desses outros autores para pensar na abstração, avançando em alguns aspectos, sobretudo no fato de não estabelecer limites tão nítidos para as diferentes categorias de representação (concreta, icônica e simbólica). Deste modo, os estudos de Fyfe e Nathan (2019) e Fyfe *et al.* (2014) representam abordagens mais recentes baseadas nas teorias mais antigas que olham para os processos de abstração.

Um dos pontos a ser considerado para se trabalhar nessa perspectiva de partir do concreto para se chegar ao abstrato, são os diferentes níveis de idealização que uma representação pode ter (FYFE; Mc NEIL, 2009). Quanto mais abstrata for a representação, mais idealizada ela será. Logo, para caracterizar melhor esses diferentes níveis de idealização e ilustrar o modelo defendido pelo Desvanecimento da Concretude, apresentamos o seguinte quadro:

Quadro 1: Esquema teórico do Desvanecimento da Concretude



Fonte: adaptado de Fyfe *et al.* (2014, p. 8 - tradução nossa).

No Estágio Ativo, o estudante manipula concretamente materiais que oferecem elementos físicos que se conectam ao objeto matemático que se pretende abstrair, por meio de suas características. Este momento é entendido como o menos idealizado, já que está mais afastado da abstração que se objetiva construir. No Estágio Icônico, o estudante começa a não precisar mais manipular concretamente os materiais que remetem ao objeto em questão, sendo que ele próprio produz certa representação pictórica do material físico trabalhado anteriormente. Este passo é importante não apenas para diminuir a necessidade do concreto, mas também porque exigirá um exercício mental de transformar para o papel os elementos visuais considerados relevantes para se manter a referência com o objeto. Aqui não atingimos ainda uma representação ideal e abstrata, embora tenhamos avançado em relação ao estágio anterior.

O Estágio Simbólico é o último e o mais idealizado, pois se trata de uma representação generalizada do objeto que impele o estudante a se apropriar dos processos de ensino e aprendizagem. Ao se chegar nele, não há mais a necessidade de se reconhecer a nenhum tipo de concretude (física ou pictórica), uma vez que os símbolos foram compreendidos. Sua vantagem é a possibilidade de realizar diferentes operações matemáticas de forma mais eficiente e rápida, por meio dos sistemas de representação idealizados matematicamente (símbolos numéricos, algébricas, figuras geométricas…). Veja a seguir um exemplo apresentado por Fyfe e McNeil (2009):

Figura 2: Progressão de materiais usados para promover a abstração de uma situação de igualdade.

Fonte: Fyfe e McNeil (2009, p. 9).

Na primeira imagem (Estágio Ativo), o material físico usado trata-se de uma balança de brinquedo usada para o estudante perceber concretamente a ideia de equilíbrio/igualdade. Verifica-se que a ideia de igualdade exige ter a mesma quantidade em ambos os lados, sendo que ele mesmo poderá testá-lo ao mexer nas quantidades concretas de cada lado da balança.

Na segunda imagem (Estágio Icônico), o estudante realiza a distribuição das quantidades entre ambos os lados para manter o equilíbrio, mas agora faz isso por meio de um desenho, pois essa propriedade já foi conjecturada pela experiência concreta. As inferências produzidas pelo estágio anterior devem ser agora retomadas para que se possa seguir este novo modelo visual, mais idealizado e que irá preparar novas imagens mentais para o próximo estágio.

Na terceira imagem (Estágio Simbólico) consta o tipo de tarefa que o estudante poderá mobilizar sem referência à imagem ou ao material concreto da balança. Neste momento, já se abstraiu que o símbolo do igual ocupa o papel que antes era efetuado pelo eixo de equilíbrio da balança. Os símbolos numéricos oferecem a abstração para que se possa compreender a igualdade pelo conjunto de ideias advindas dos estágios menos idealizados.

Pelo exemplo anterior, vemos um processo de cognição para a abstração de um objeto/conceito matemático que partiu de um cenário com demandas concretas e que finaliza somente quando os símbolos idealizados já são suficientes. A teoria do Desvanecimento da Concretude deixa claro que nem sempre este caminho será sempre vantajoso para todas as situações de ensino (KAMINSKI *et al.*, 2008; BRAITHWAITE; GOLDSTONE, 2013), embora tenha mostrado interessantes resultados de pesquisas que a utilizam e consideram uma ferramenta potencializadora para pensar na abstração (SCHEITER *et al.*, 2010, FYFE; MCNEIL, 2013, KOEDINGER; ANDERSON, 1998).

Dentre os benefícios que amparam trabalhar de acordo com esta perspectiva de diminuir gradativamente a concretude, há, por exemplo, os estudos que defendem que a criança deve começar no concreto para depois construir abstrações (BARANES *et al.*, 1989, CARRAHER *et al.*, 1985). O uso de materiais concretos pode ajudar também na interpretação de aspectos acerca dos objetos abstratos, os quais resultem difíceis de imaginar inicialmente, mas que a representação física oferece uma possibilidade (GOLDSTONE; SON, 2005).

Há também autores que abordam as relações entre o uso do concreto e as teorias de cognição incorporada, entendendo que certos processos cognitivos mais elevados, como a compreensão da linguagem matemática, surgem da ação e percepção (BARSALOU, 2003, LAKOFF; NÚÑEZ, 2000). Podemos dizer ainda que "[...] a compreensão de símbolos abstratos requer mapear esses símbolos em imagens corporais, experiências ou representações dessas experiências" (FYFE *et al.*, 2014, p. 7, tradução nossa). Próximo a isso, o estudo de Bruner (1966), que originou as discussões atuais do Desvanecimento da Concretude, também indica que esse tipo de experiências concretas físicas ou pictóricas forma uma base de imagens mentais que o estudante pode recorrer para compreender conceitos futuros.

A partir do exposto, entendemos que o uso de materiais concretos pode ser um caminho promissor para promover as abstrações matemáticas. Contudo, entendemos também que, para refletir acerca desses processos, os estudos semióticos devem ajudar igualmente a formar novas ideias ou explicar melhor certas etapas do Desvanecimento da Concretude. No tópico seguinte, oferecemos algumas possibilidades de articulação entre as teorias que embasam este estudo.

4. ARTICULANDO AS TEORIAS: REFLETINDO SOBRE POSSIBILIDADES PARA OS PROCESSOS DE ABSTRAÇÃO

A partir do conhecimento do Desvanecimento da Concretude e da Teoria de Duval, neste tópico propomos algumas reflexões a partir das articulações entre esses referenciais como um modo de promover a abstração. Um primeiro ponto a destacar é que as teorias apresentam origens epistemológicas diferentes, pois, enquanto uma parte de estudos que iniciaram em Bruner (1996), os quais têm sido atualmente debatidos por pesquisadores estadunidenses, a outra é elaborada por Raymond Duval no campo da didática francesa, na década de 1980. Ou seja, não são teorias que nascem em tempos e correntes fundamentadoras semelhantes. Contudo, ambas podem ser estudadas em conjunto para compreender e investigar problemáticas da educação matemática, especialmente a abstração dos objetos, visto que seus conceitos apresentam uma possibilidade para o diálogo.

Em um primeiro movimento de articulação, elaboramos um quadro onde constam os principais termos que o Desvanecimento da Concretude e a TRRS utilizam, ambos com uma finalidade conceitual similar. Isso nos auxiliará a entender como articular as ideias de cada teoria e estabelecer um diálogo teórico com mais clareza. Vejamos o Quadro 2, a seguir:

Quadro 2: Comparando as aproximações conceituais entre as teorias

DESVANECIMENTO DA CONCRETUDE	TRRS
Representações externas	Sistemas semióticos (objetos ostensivos)
Estágio Ativo (físico/concreto)	Representação auxiliar concreta (do tipo de material que substitui o objeto)
Estágio Icônico (pictórico/desenho)	Representação auxiliar (do tipo Ilustração/desenho)

Representação simbólica	Registro de representação simbólico (números hinduarábicos)
Representação menos idealizada	Mais afastada de um registro, em geral, uma representação auxiliar (concreta ou pictórica)
Representação mais idealizada	Mais próxima de um registro de representação semiótica formal

Fonte: elaborado pelos autores.

Enquanto no Desvanecimento da Concretude se fala em representações externas para se referir aos símbolos, desenhos e materiais concretos, na TRRS se mencionam os sistemas de representação (numéricos, algébricos, figurais, gráficos e auxiliares). Ambas as teorias estão falando de utilizar objetos ostensivos.

Outra comparação importante é a ideia de representação, mais ou menos idealizada, que a teoria do Desvanecimento da Concretude pensa para a progressão das sequências de apresentação das representações. Conectando com a TRRS, essas comparações sugerem a transição dos sistemas de representação auxiliares (instrumentos concretos) aos chamados Registros de Representação Semiótica, defendidos por Duval (2004) por possuírem uma maior importância para a aprendizagem matemática e pelos diversos tratamentos e conversão que mobilizam. A articulação teórica que objetivamos aqui não se restringe às comparações, mas sim, à perspectiva de que possa ser um complemento teórico para refletir acerca da problemática da abstração.

Alguns aspectos da TRRS não são contemplados ou evidenciados com destaque no Desvanecimento da Concretude. O principal deles é o papel da linguagem natural[8] (materna) como ponto disparador de qualquer atividade matemática. Duval e Moretti (2018, p. 99) argumentam que "a utilização da língua natural nas atividades matemáticas é radicalmente diferente daquela que é feita por fora da matemática e em todos os outros domínios do conhecimento". Na matemática, a língua natural não é apenas comunicação, pois age como um registro de representação semiótico para o funcionamento do pensamento (DUVAL, 2011).

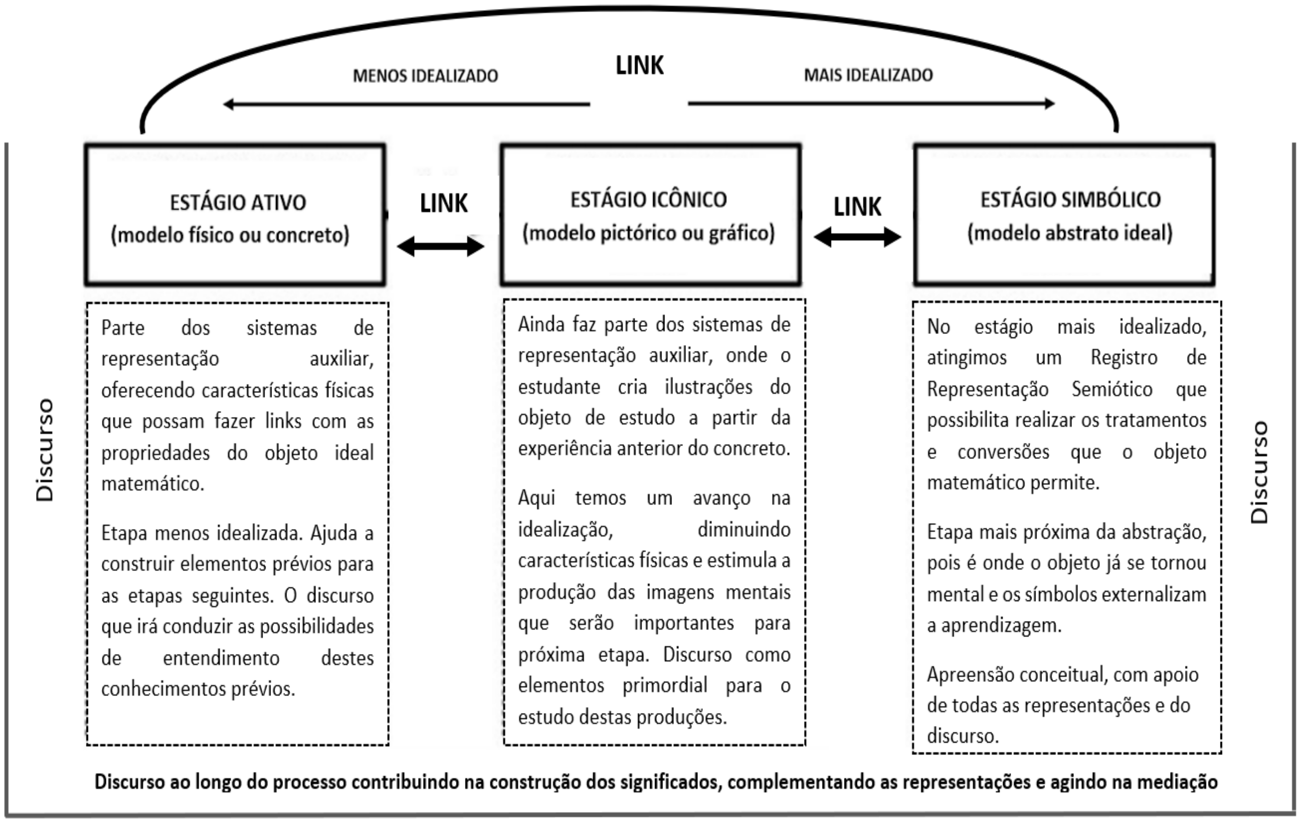
Entendemos que, no Desvanecimento da Concretude, nenhum dos estágios indicados poderia ser mobilizado sem a presença da linguagem como mediadora dos processos, tampouco

[8] A língua materna ou natural refere-se à língua nativa do indivíduo, ou seja, a primeira língua que o sujeito aprende e que corresponde ao grupo étnico-linguístico a que pertence.

chegamos a cogitar que seus representantes concordem com isso. Contudo, como não temos nenhum destaque para o discurso (oral ou escrito) nos estágios apresentados no Quadro 2, acreditamos que a teoria de Duval possa enfatizar o papel da linguagem nas etapas de abstração.

Para referenciar as questões linguísticas que abordamos na reflexão acerca da abstração, utilizamos o termo "discurso". Um discurso, para Duval (2004, p. 87), "é o emprego de uma língua para dizer alguma coisa, para falar dos objetos físicos, imaginários e ideais e está conectada a um funcionamento cognitivo". Algumas pesquisas, na perspectiva duvaliana, têm enfatizado o papel fundamental da linguagem materna como um agente de discurso em matemática (SABEL, 2021, SABEL; MORETTI, 2022, HILLESHEIM, 2022). Defendemos que a língua materna precisa estar em constante interação com as práticas matemáticas, pois, para um estudante que ainda não tem uma matemática abstrata mais avançada, ele entenderá os conceitos a partir de sua língua natural. Desta forma, sugerimos uma reconfiguração do Quadro 1 que condicione as teorias supracitadas e que valorize também o papel da linguagem:

Quadro 3: Nova configuração para os estágios para a abstração a partir das teorias



Fonte: Elaborado pelos autores.

No quadro acima, apresentamos alguns aspectos a mais do que os contidos no Quadro 2, advindos da articulação teórica elaborada. Primeiramente, as flechas que indicam os *links* entre os diferentes estágios de representação agora não só apontam para o estágio seguinte, mas também para o anterior, assim como o *link* entre o estágio concreto e o simbólico, que fora acrescentado. Isso se deve ao fato de que, pelo Quadro 2, é possível ter a impressão de que as conexões ocorrem em uma mesma direção de progressão, embora entendamos que isso aconteça de forma dialética e constante. Estar no estágio simbólico não significa que o sujeito só fará ligações com o pictórico, pois tudo o que ele identificou no concreto poderá também fazer *insights* para o simbólico e o abstrato.

Outra mudança são as descrições de cada um dos estágios, evidenciando aspectos das representações semióticas que consideramos úteis para refletir acerca dos estágios da abstração. O entendimento de que lidamos com representações auxiliares, que serão mobilizadas para a compreensão dos Registros de Representação, contribui para a reflexão dos diferentes papéis semióticos que esses diferentes estágios têm com o objeto matemático ideal.

Além disso, ampliamos o quadro ao destacar o importante papel do discurso, isto é, a linguagem natural (materna). Se estamos lidando com estudantes cujo processo de abstração está em andamento, então, faz-se necessário construirmos a narrativa pedagógica com o uso de sua linguagem natural. Obviamente, ao longo dos processos discursivos (orais e escritos), estaremos mobilizando outros tipos de linguagens específicas da matemática, mas isso só será possível se a linguagem natural for utilizada como mediadora entre o professor, o estudante e os objetos de estudo, em seus níveis de representação.

Desta maneira, no Quadro 3, oferecemos uma possibilidade de reflexão sobre os processos de abstração, articulando-os às duas teorias, sendo que cada uma delas contribuiu à sua maneira. O Desvanecimento da Concretude oferece uma organização sequencial específica para a abstração sobre o ordenamento das representações, o que a TRRS não aborda. Por sua vez, a TRRS discute com maior profundidade a importância dos sistemas de representação, além de acrescentar um debate sobre a linguagem que o Desvanecimento da Concretude não destaca. Portanto, em nossa análise, ambas se complementam teoricamente para refletir acerca da abstração matemática. Conforme se pode constatar, o objetivo deste estudo se limitou à apresentação e discussão de aspectos teóricos para promover ambas as teorias, as quais, em diálogo, nos auxiliaram a refletir sobre como os objetos matemáticos podem ser abstraídos, ou então, que atinjam ao menos estágios simbólicos da linguagem matemática.

5. ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Ao pesquisar o ensino-aprendizagem da matemática, é preciso assumir, em primeiro lugar, que lidamos com um campo de conhecimento que não está acessível aos nossos sentidos externos, como o das demais ciências. A natureza de seus objetos requer uma abordagem metodológica que contemple os aspectos conceituais e semióticos para então conduzir a uma compreensão conceitual completa, que é um dos pressupostos da TRRS (DUVAL, 2004).

Se o objetivo for mediarmos a aprendizagem dos objetos matemáticos ideais, precisaremos, então, organizar estratégias para atingir a abstração desses conhecimentos. Por isso, a teoria do Desvanecimento da Concretude tem apontado caminhos que podem possibilitar alcançar esse escopo, conforme os estudos de Fyfe e Nathan (2019), Fyfe *et al.* (2014), Fyfe e McNeil (2009), dentre outros.

Para atingirmos o objetivo de refletir acerca dos processos de abstração na aprendizagem matemática, discutimos como os aspectos dessas duas perspectivas teóricas podem contribuir nesse sentido. Esse tipo de exercício, para além do propósito deste artigo, nos auxilia a entender que uma problemática de pesquisa pode se enriquecer quando a colocamos em um debate teórico constante com referenciais diferentes, os quais podem se complementar.

O Desvanecimento da Concretude nos oferece uma sequência de ações que parte do concreto e progride para um entendimento abstrato, no qual cada estágio deve ser trabalhado no sentido de extrair elementos matemáticos que ajudem na compreensão do objeto e que levem, ao mesmo tempo, a uma perda gradativa de sua concretude. Do concreto (físico) ao pictórico (desenho) e ao simbólico (ideal), o estudante vai se apropriando e estabelecendo relações entre um estágio e outro, até que, no fim, não precise (ou com menos frequência) recorrer ao material concreto.

Já a TRRS apresenta atividades cognitivas que devem ser trabalhadas nos diferentes registros de representação. E mesmo que os materiais concretos e os desenhos não estejam configurados como um registro, mas sim, como uma representação auxiliar, eles assumem um papel essencial ao oferecer visualidades que não podem ser oferecidas apenas pelos símbolos. As características físicas ajudam a criar conhecimentos mentais prévios que depois irão potencializar e abrir caminho para a abstração.

Deste modo, defendemos que, para refletirmos sobre a abstração matemática, ambas as referências podem ser usadas em conjunto. Enquanto o Desvanecimento da Concretude sugere uma sequência de humanização do uso de diferentes representações, a TRRS se complementa, ao destacar o papel da linguagem nesse meio. No Quadro 3 consta uma forma de articulação que valoriza aspectos dos dois referenciais, que juntos ampliam o que cada teoria apresenta separadamente.

Por meio desta reflexão, consideramos que partir do concreto, logo do pictórico, e depois da forma ideal dos objetos pode favorecer a abstração, desde que as representações sejam sempre articuladas em conjunto e não isoladamente. E que o professor seja o mediador desse processo, sobretudo com o apoio da linguagem natural e do discurso matemático construído no processo de ensino. Entendemos que este estudo teve caráter qualitativo e teórico, mas que poderá, no futuro, ser usado como base para elaborar práticas matemáticas e trazer novas reflexões sobre o tema.

REFERÊNCIAS

BARANES, Ruth; PERRY, Michele; STIGLER, James W. Ativação do conhecimento do mundo real na solução de problemas de palavras. **Cognição e Instrução**, v. 6, n. 4, p. 287-318, 1989.

BARSALOW, L. Simulação situada no sistema conceitual humano. **Linguagem e Processos Cognitivos**, v. 18, n. 6, p. 513–562, 2003.

BJÖRKLUND, C. Less is more – mathematical manipulatives in early childhood education. **Early Child Development and Care**, v. 184, n. 3, p. 469–485, 2014.

BRAITHWAITE, David W.; GOLDSTONE, Robert L. Integrando representações formais e fundamentadas na aprendizagem combinatória. **Revista de Psicologia Educacional**, v. 105, n. 3, p. 666, 2013.

BRUNER, Jerome Seymour et al. **Para uma teoria da instrução**. Imprensa da Universidade de Harvard, 1966.

BUTLER, Frances M. et al. Instrução de frações para alunos com deficiências matemáticas: comparando duas sequências de ensino. **Pesquisa e Prática em Dificuldades de Aprendizagem**, v. 18, n. 2, p. 99-111, 2003.

CARRAHER, Terezinha Nunes; CARRAHER, David William; SCHLIEMANN, Analucia Dias. Mathematics in the streets and in schools. **British journal of developmental psychology**, v. 3, n. 1, p. 21-29, 1985.

DUVAL, Raymond. **Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales**. Traducción de Myriam Vega Restrepo. Santiago de Cali: Universidad del Valle, Instituto de Educacion y Pedagogia, Grupo de Educacion Matematica, 2004.

DUVAL, Raymond; MORETTI, Méricles Thadeu. Como analisar a questão crucial da compreensão em Matemática? **REVEMAT: Revista Eletrônica de matemática**, v. 13, n. 2, p. 1-27, 2018.

DUVAL, Raymond. Registros de representações semióticos e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, Silvia D. A. (Orgs.). **Aprendizagem em matemática:** registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003.

DUVAL, Raymond. Registros de representações semióticos e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução de Méricles Thadeu Moretti. **Revemat**, Florianópolis, v. 6, n. 2, p. 266-297, 2012.

DUVAL, Raymond. **Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar:** os registros de representações semióticas. Tradução de Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011.

FIORENTINI, Dario. Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. **Zetetiké** , v. 3, n. 1, 1995.

FYFE, Emily R. et al. Desvanecimento da concretude no ensino de matemática e ciências: uma revisão sistemática. **Revisão de psicologia educacional**, v. 26, n. 1, p. 9-25, 2014.

FYFE, Emily R.; MCNEIL, Nicole M. Benefícios do "desvanecimento da concretude" para crianças com baixo conhecimento de equivalência matemática. **Pôster apresentado na Cognitive Development Society, San Antonio, TX** , 2009.

FYFE, Emily R.; NATHAN, Mitchell J. Tornando o "desvanecimento da concretude" mais concreto como uma teoria de instrução para promover a transferência. **Revista Educacional**, v. 71, n. 4, p. 403-422, 2019.

GOLDSTONE, Robert L.; SON, Ji Y. A transferência de princípios científicos usando simulações concretas e idealizadas. **The Journal of the Learning Sciences**, v. 14, n. 1, p. 69-110, 2005.

HILLESHEIM, Selma. As Funções Discursivas da Língua e Suas Implicações na Aprendizagem da Geometria nos Anos Iniciais. **Boletim GEPEM**, n. 81, p. 159-174, 2022.

JARDINETTI, J. R. B. Abstrato e o Concreto no Ensino da Matemática: algumas reflexões. **Bolema,** Rio Claro – SP, v. 11, n. 12, 1997.

KAMINSKI, Jennifer A.; SLOUTSKY, Vladimir M.; HECKLER, Andrew F. A vantagem de exemplos abstratos no aprendizado de matemática. **Ciência**, v. 320, n. 5875, p. 454-455, 2008.

KOKKONEN, Tommi; LICHTENBERGER, Andreas; SCHALK, Lennart. Desvanecimento da concretude na aprendizagem de conceitos de física no ensino médio. **Aprendizagem e Instrução**, v. 77, p. 101524, 2022.

LAKOFF, George; NÚÑEZ, Rafael. **De onde vem a matemática**. Nova York: Basic Books, 2000.

MONTENEGRO, J. A., BORBA, R., BITTAR, M. Representações Intermediárias na Aprendizagem de Situações Combinatórias. **Educação & Realidade.** v. 45, n.1, p. 1-26, 2020. DOI: 10.1590/2175-623687693.

MORETTI, M. T., BAERLE, D. M. O uso de representações auxiliares na aprendizagem matemática: um olhar semiocognitivo segundo Raymund Duval. **Revista Educação Matemática Pesquisa.** v. 24, n.1, p.1-29, 2022. DOI: https://doi.org/10.23925/1983-3156.2022v24i1p582-610.

SABEL, E. **O papel das funções discursivas na análise da produção de alunos na resolução de problemas**. Mestrado (Dissertação). PPGECT, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2021.

SABEL, E.; MORETTI, M. T. A contribuição das funções discursivas na análise da produção dos estudantes na resolução de problemas**. Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 11, n. 26, p. 338–360, 1 dez. 2022. DOI: https://doi.org/10.33871/22385800.2022.11.26.338-360

PIRES, E.; SABEL, E. M; SILVEIRA, E. Objetos Manipuláveis Em Livros Didáticos: Realidade X Representação**. Anais...**1° Colóquio de Livros de Matemática, Rio Claro - SP, 2022, no prelo.

SCHEITER, Katharina; GERJETS, Pedro; SHHUH, Julia. A aquisição de habilidades de resolução de problemas em matemática: como as animações podem ajudar na compreensão dos recursos estruturais do problema e dos procedimentos de solução. **Ciência Instrucional**, v. 38, n. 5, p. 487-502, 2010.

SPINELLI, Walter. **A construção do conhecimento entre o abstrair e o contextualizar: o caso do ensino da matemática**. 2011. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo.

SUH, Sangho; LEE, Martinet; LEI, Edith. Como projetamos o desvanecimento da concretude? pesquisa, estrutura geral e dimensões do projeto. **Proceedings... Interaction Design and Children Conference** . 2020. p. 581-588.

UTTAL, D. H. On the relation between play and symbolic thought: the case of mathematics manipulatives. In: SARACHO, O. N.; SPODEK, B. (Org.)**. Contemporary perspectives on play in early childhood education.** Charlotte/USA: Information Age Publishing, 2003. p. 97-114.

FONTE FINANCIADORA

Programa de Bolsas Universitárias de Santa Catarina – UNIEDU/FUMDES - (Bolsa Nível Doutorado para o primeiro autor)