



UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO DE FRAÇÕES PARA O 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL À LUZ DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA DE DUVAL

An experience for teaching fractions for the sixth year of elementary school in the light of Duval's Theory of Semiotic Representation Registers

Eduardo Sabel¹
Cíntia Rosa da Silva²

Resumo: Este artigo apresenta um relato de experiência para o ensino de frações a uma turma do 6º ano do Ensino Fundamental, tendo como base a Teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval. Esta experiência foi desenvolvida em uma escola da Rede Estadual de Ensino de Santa Catarina, no intuito de desenvolver o aprendizado das frações. Mediante a descrição das aulas aplicadas, relatam-se aspectos das frações que foram abordados em cada uma delas, relacionando os procedimentos com a teoria escolhida. Para ensinar o conteúdo de frações, advoga-se que é preciso levar em conta os diferentes registros de representação semiótica que apresentam e compreendê-los de forma global e não individualizada. Os pontos de reflexão levantados estão na ordem da explicação dos conceitos, sua relação com a teoria e em alguns exemplos das atividades aplicadas, que se mostraram eficientes para o desenvolvimento da aprendizagem das frações. As análises obtidas durante o relato da sequência didática expõem as potencialidades que a teoria de Duval (1995) oferece para o ensino de matemática, de modo que a presente proposta alcançou o objetivo: apresentar uma sequência didática para ensinar frações.

Palavras-chave: Ensino de Frações. Sequência didática. Registros de Representação Semiótica.

Abstract: This article presents an experience for teaching fractions for six classes in elementary school, based on Duval's Theory of Records of Semiotic Representation. The didactic sequence presented was developed in a school of the State Education Network of Santa Catarina, with the objective of developing the learning of fractions. We describe the applied classes reporting which aspects of the fractions were specific to each one of them, relating the procedures to the chosen theory. To use the content of credit fractions, it is necessary to take into account the different records of semiotic representation they have, understanding them globally and not individually. One of the points of reflection that we brought is in the order of explanation of the concepts and some examples of activities that were applied and were perfect for the development of learning fractions. The analysis that we bring during the report of the didactic sequence exposes as potentialities that the theory of Duval (1995) offers for the teaching of mathematics and we verify that the present proposal reached the objective: to provide opportunities for the learning of fractions for the majority of students.

Keywords: Fractions Learning. Didactic Sequence. Semiotic Representation Registers.

¹ Doutorando em Educação Científica e Tecnológica (PPGECT/UFSC). Professor de matemática no SENAI/SC, Florianópolis, Santa Catarina. E-mail: eduardosabelmatematica@gmail.com

² Doutora em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Professora Adjunta da Universidade Federal de Santa Catarina, Blumenau, Santa Catarina. E-mail: cintiarosa@gmail.com

1. INTRODUÇÃO

A matemática é uma das ciências mais antigas, cuja necessidade humana a fez evoluir ao longo da história. É dona de um vasto campo de conhecimento importante para o desenvolvimento cultural e científico da sociedade. Seu aprendizado se inicia ainda na infância e perpassa toda a vida escolar.

Entretanto, a matemática tem enfrentado muitos obstáculos no processo de ensino e aprendizagem, exigindo dos educadores a necessidade de buscar elementos que potencializem e superem essas dificuldades. Dentre os objetos matemáticos estudados na escola, destacamos nesta pesquisa o estudo das Frações.

Sobre o ensino de frações e suas dificuldades, Bocalon (2008, p. 78) ressalta que “a observação dos erros praticados pelos alunos de 6º ano do Ensino Fundamental, com relação aos números racionais em sua forma fracionária, leva à reflexão sobre a ação pedagógica do professor”. Ou seja, com base no entendimento de que esse conteúdo apresenta desafios notórios para a sua aquisição, precisamos pensar em práticas que promovam o seu aprendizado.

Uma característica que pode dificultar a compreensão das frações diz respeito à sua diversidade de representações e às suas transformações, uma vez que podem ser expostas nos campos escrito, simbólico, geométrico, decimal, quociente, razão, medida, dentre outros (SILVA, 2018). Desta forma, é preciso que os professores saibam como mediar seu aprendizado de uma forma que isso permita a apropriação de todas essas representações e transformações.

Este relato se trata de uma parte de um trabalho de monografia, em que buscamos apresentar uma experiência no ensino de frações com uma turma de 6º ano do Ensino Fundamental, discutindo suas potencialidades com os aspectos teóricos que nortearam o trabalho. Para atender o objetivo de ensinar frações, desenvolvemos um estudo de caso qualitativo, organizado com base em uma proposta de ensino de frações por meio de uma sequência didática. Zabala define uma sequência didática como “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos” (ZABALA, 1998, p. 18). Com essa sequência, pretendemos promover as habilidades esperadas por um aluno do 6º ano quanto ao conteúdo de frações.

Fundamentados na Teoria de Registro de Representação Semiótica de Duval, norteamos a organização das aulas e as atividades avaliativas. A escolha da teoria se deve ao fato de que ela oferece subsídios sobre como trabalhar com diversas representações de um mesmo objeto, sendo que o conteúdo de fração contém uma variedade de representações que precisa ser

compreendida para sua aprendizagem. Com esse relato de experiência, pretendemos contribuir suscitando reflexões nos professores que ensinam matemática e em especial, no ensino de frações.

2. A TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA E O ENSINO DE FRAÇÕES

Desenvolvida na década de 1980 pelo filósofo e psicólogo francês Raymond Duval, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica se preocupa com o aprendizado dos conteúdos matemáticos, analisando os processos cognitivos necessários para a compreensão de seus objetos de estudo. Seu principal enfoque se centra na diversidade de representações semióticas que um mesmo objeto pode ter, destacando a importância na mobilização de todas as representações como parte inerente do aprendizado em matemática.

Duval considera a matemática uma ciência diferente das demais, pois seus objetos de estudo são ideais, abstratos e mentais. Neste sentido, a única forma de interagir com esses objetos matemáticos é por meio de uma representação, que permitirá acessá-los. Um mesmo objeto pode ter várias representações possíveis, o que faz necessário que o estudante domine toda essa diversidade para compreender a totalidade do objetivo. Para o entendimento da teoria é preciso esclarecer alguns conceitos como: Formação de Representação Identificável, Tratamento e Conversão.

Formação de Representação Identificável: É a forma que reconhecemos um objeto através de suas características específicas e regras que o compõem. Podemos pensar no exemplo da função $g(x) = x^2 + 2$, onde essa configuração nos remete a uma função quadrática. Deste modo, a Formação de Representação Identificável é composta pelo conjunto de elementos, unidades, princípios e regras que identificam o objeto.

Tratamento: Essa atividade consiste na alteração do conteúdo da representação, através de operações pertinentes àquele sistema semiótico, mas sem sair do registro inicial. Pensamos, por exemplo, na expressão $(x + 2)^2$, que pode ser desenvolvida para obtermos $x^2 + 4x + 4$. Neste caso, o registro inicial era o sistema algébrico, sendo que através de algumas operações podemos alcançar outra expressão, que ainda está no meio algébrico.

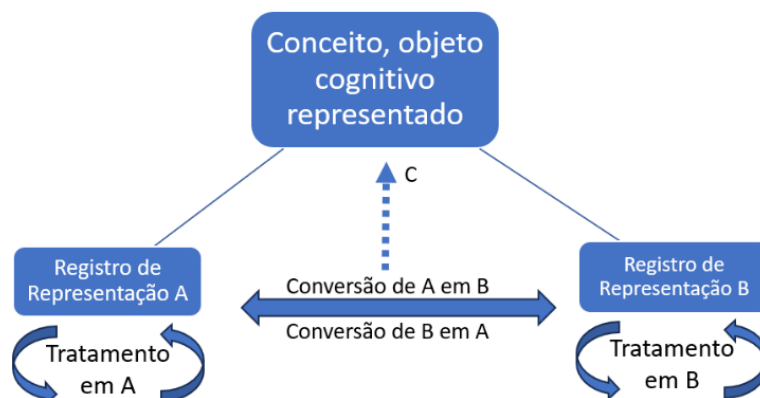
Conversão: A atividade cognitiva de conversão consiste em iniciar o estudo de um objeto em um determinado registro de representação e transformá-lo em outro. Ocorre quando nosso registro de partida, após algumas operações, não é o mesmo que o de chegada. Pensamos,

por exemplo, nas expressões: um meio e $\frac{1}{2}$. Primeiro, temos o objeto representado em sua forma escrita e depois na simbólica. Duval (2003) explica que:

A originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo o momento de registro de representação [...]. Do ponto de vista cognitivo, é a atividade de conversão que, ao contrário, aparece como atividade de transformação representacional fundamental, aquela que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão. (DUVAL, 2003, p. 14).

Ou seja, para que possamos compreender um conteúdo matemático, precisamos trabalhar com ao menos dois registros diferentes, pois é na coordenação entre dois tipos de registros que a aprendizagem acontece. Essa é a hipótese fundamental da aprendizagem de Duval, explicada na figura a seguir:

Figura 1 - Esquema da hipótese fundamental da aprendizagem



Fonte: Elaborado por Sabel e Silveira (2023, p. 8) a partir de Duval (2012).

Na Figura 1 constam os processos cognitivos para a aprendizagem que fundamentam a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Disposto de dois registros diferentes (A e B), é no processo de trânsito entre um e outro que nos aproximamos do conceito matemático (C). Dentro das dificuldades que podem existir nos processos de conversão, chamamos a atenção para as questões que envolvem a congruência semântica. Duval argumenta que:

Duas expressões podem ser sinônimas ou referencialmente equivalentes (elas podem “querer dizer a mesma coisa”, elas podem ser verdadeiras ou falsas ao mesmo tempo) e não serem semanticamente congruentes: neste caso, há um custo cognitivo importante para a compreensão. (DUVAL, 2012, p. 100).

A congruência semântica entre duas representações geralmente acontece quando a conversão de um registro para o outro não ocorre de forma espontânea, exigindo mais custo cognitivo. Segundo Duval (2004, p. 53), existem três condições para que exista a congruência semântica entre duas representações e suas unidades significantes, a saber:

- Correspondência semântica entre as unidades significantes que as constituem.
- Univocidade “semântica” terminal, em que cada unidade significativa elementar de partida corresponde a uma só unidade significativa elementar no registro de chegada.
- A ordem dentro da organização das unidades significativas de partida é mantida na representação de chegada. (DUVAL, 2004, p.53).

Quando não se cumprem um ou mais desses critérios, as representações não são congruentes, de modo que a conversão de uma para outra não será feita de forma imediata (DUVAL, 2004, p. 17). Ou seja, quando temos congruência semântica, a passagem de uma representação para a outra é mais fácil, e quanto maior for a não congruência semântica, mais distinção haverá entre as representações, o que aumenta o risco de o estudante não compreender o objeto e o processo matemático.

No conteúdo de frações, esses fenômenos de congruência estão presentes e influenciam diretamente em seu aprendizado. Por exemplo, ao converter *dois quintos* em $\frac{2}{5}$, notamos que a palavra “dois” faz referência ao algarismo 2, assim como o termo “quintos” lembra o algarismo 5. Essa conversão é do tipo congruente, pois existe essa correspondência entre os elementos de cada registro que atende aos critérios da congruência semântica, fazendo com que o processo de conversão seja mais simples.

No estudo das frações que esta pesquisa elucidada, temos o objetivo de ensinar frações através de quatro representações; escrita, simbólica, geométrica e decimal. Apesar de termos outras formas de representar as frações além das indicadas, devido ao recorte serial, apenas nos debruçamos sobre esses quatro tipos de registro.

As frações têm sido alvo de constantes pesquisas no campo da educação matemática, que destacam as dificuldades que promovem quando são trabalhadas em sala de aula. Cavalieri (2005) acredita que, devido ao pouco uso das frações no cotidiano, há muitas barreiras que permeiam seu entendimento, enquanto D’Ambrósio (2002) argumenta que, quando trabalhadas no concreto, há interesse sobre elas, mas quando adentram meios abstratos, os estudantes não entendem a necessidade de estudá-las, tampouco seus significados.

Em seus estudos, Bertoni (2009) revela que “o conteúdo de frações tem sido um dos temas mais difíceis no ensino fundamental e pesquisas atestam o baixo rendimento dos alunos no assunto” (BERTONI, 2009, p. 16). Desta forma, precisamos repensar as práticas

pedagógicas que temos levado para a sala de aula quando tratamos desse conteúdo e criar caminhos didáticos para contornarmos esses problemas. Posto isso, precisamos analisar e seguir também as orientações das diretrizes curriculares vigentes para o tema em questão.

No que se refere às habilidades que um estudante do 6º ano precisa desenvolver sobre frações, analisamos documentos norteadores, como a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018) e os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997). Pautados em suas orientações, formulamos doze habilidades que pretendemos desenvolver com essa sequência didática, as quais foram codificadas e citadas no decorrer da pesquisa. Essas habilidades não são as mesmas descritas nos documentos, mas elaboradas a partir delas de uma forma mais fragmentada, para que cada aula tivesse objetivos claros e ao todo, elas contemplam os objetivos dos documentos norteadores. São elas:

- H1 - Reconhecer a forma oral e escrita das frações.
- H2 - Representar frações na forma geométrica.
- H3 - Associar frações a figuras dadas.
- H4 - Compreender a relação entre fração e número decimal.
- H5 - Converter simultaneamente as diferentes representações das frações.
- H6 - Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão.
- H7 - Reconhecer frações equivalentes e simplificá-las.
- H8 - Ordenar as frações na reta numérica.
- H9 - Entender o uso frações nas unidades de medida.
- H10 - Compreender a relação do todo e das partes.
- H11 - Realizar as operações básicas com números fracionários.
- H12 - Utilizar as operações com números fracionários para resolver problemas.

Cumpramos notar que existem outras habilidades que abarcam outros contextos das frações, como proporção, operação, porcentagem e probabilidade. Mas como o objetivo era atender às representações pertinentes ao nível do 6º ano, esta pesquisa se deteve nas formas: escrita, simbólico, geométrica e decimal. No próximo tópico, explanaremos sobre a fundamentação teórica escolhida e suas potencialidades dentro do conteúdo de frações.

3. A SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Esta pesquisa desenha-se como um estudo de caso qualitativo, que acontece quando “o caso é sempre bem delimitado, devendo ter seus contornos claramente definidos no desenvolver do estudo” (LUDKE; ANDRÉ, 1986, p. 17). Os estudos de caso permitem analisar a problemática de um determinado contexto e promover reflexões e contribuições para resolvê-la. Eles servem para investigarmos qualitativamente uma situação de interesse, cujos resultados poderão extrapolar o contexto e contribuir de forma ampla para o campo.

Para a realização da pesquisa, produzimos um conjunto de 13 aulas que sistematiza os encontros realizados durante a aplicação deste estudo, o qual chamamos de sequência didática. Cada aula representa 90 minutos com a turma (duas aulas de 45 minutos). A descrição das aulas teve como foco a relação do conteúdo com a teoria que a fundamentou, e também, alguns exemplos de atividades trabalhadas ao longo das aulas.

Durante a aplicação da sequência didática, atividades avaliativas foram intercaladas ao processo com o objetivo de diagnosticar o aprendizado. Essas avaliações não estão aqui integralmente relatadas, pois o foco deste artigo é apresentar a organização da sequência didática e a abordagem do referencial teórico, considerando que as formas de avaliação são particulares para cada turma e que devem ser elaboradas por cada professor em seus diferentes contextos.

Cada aula recebeu um objetivo principal, e depois, uma reflexão sobre seu procedimento e desenvolvimento. Além de descrever os procedimentos e discuti-los à luz da teoria de Duval, apresentaremos exemplos de atividades que contribuíram, ao longo da sequência, para diagnosticar a aprendizagem das habilidades. Os exercícios expostos foram obtidos dos estudos de Silva (1997; 2005), que desenvolveu as questões que referenciaram nossa sequência e que se dedicou a estudar o ensino de frações.

3.1. O relato e a reflexão das aulas

As aulas foram numeradas de 1 a 13 e nomeadas de Aula 1, Aula 2, Aula 3 e assim por diante. Em cada aula apresentamos o objetivo desejado, a descrição e a reflexão de acordo com a teoria de Registro de Representação Semiótica, de Duval. A seguir, iniciamos o relato destes encontros:

AULA 1: Iniciar o conteúdo de frações com a abordagem histórica e diagnosticar que concepções os estudantes têm sobre esse conceito. Ensinar como se lê e escreve uma fração. Habilidades: H1.

Descrição e reflexão: Inicialmente fizemos um resgate histórico sobre o conteúdo de frações, debatendo acerca de seu surgimento e da necessidade de efetuar a repartição de uma região em partes iguais, a divisão de inteiros e outros dados históricos. Buscamos, nas orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais, dados históricos que sugerem contextualizar a história das frações, tendo como destaque a civilização egípcia como uma das pioneiras nesse conhecimento.

Essa abordagem é importante para desmistificar a noção de matemática como algo pronto e espontâneo, e mostrar que os conteúdos tiveram necessidade social e evolutiva ao longo de sua construção humana. Através de alguns apontamentos advindos da turma, percebemos que muitos não sabiam como ler e nomear as frações e que careciam de conhecimentos anteriores, exigindo uma abordagem mais minuciosa sobre o conceito. A partir disso, esse encontro teve como objetivo principal correlacionar duas representações semióticas das frações: a simbólica e a escrita.

A escolha de começar pela forma que lemos/falamos uma fração está relacionada com a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS). Segundo Duval (1995), a língua natural (materna), além de agir para fins de comunicação, também atua como um registro de representação semiótica. Sabel (2021), ao pesquisar o papel da linguagem na resolução de problemas a partir da TRRS, argumenta que a língua natural cumpre funções discursivas importantes para nomear, designar e evocar os objetos matemáticos. Para o estudo das frações, quando o professor enunciar a expressão “um terço”, o estudante precisa saber que ele está indicando a fração $\frac{1}{3}$, e vice-versa. Como a língua materna apresenta muitas variações por causa de seu papel tanto na comunicação quanto na representação, é importante começarmos o estudo de um objeto por ela.

AULA 2: Identificar os numeradores e denominadores das frações. Relacionar e converter a representação escrita e simbólica com a geométrica. Habilidades: H2; H3.

Descrição e reflexão: Por meio de uma atividade de dobradura, inserimos o conceito de denominador e numerador de uma fração. Destacamos a conexão desses elementos com a relação parte-todo, em que o denominador seria a quantidade de vezes que dividiram a folha em partes iguais, e o numerador, as partes selecionadas que pintaram. Aproveitando esse

raciocínio, introduzimos outra representação semiótica que chamamos de geométrica (figura ou desenho).

Realizamos algumas atividades em que os alunos partiam da forma escrita ou simbólica e tinham que construir um desenho que representasse a fração dada, assim como o caminho inverso também foi explorado. Procuramos não utilizar somente círculos ou quadrados, mas vários tipos de figuras e desenhos que fossem passíveis de serem repartidos e relacionados com as frações.

Essa aula explorou mais um tipo de conversão, ainda congruente, com a nova representação geométrica mobilizada com as demais. Com esse terceiro tipo de registro, os estudantes tiveram a capacidade de efetuar 6 conversões diferentes: simbólico-escrita, simbólico-geométrica, escrito-geométrica, e todas vice-versa.

AULA 3: Frações equivalentes e outros contextos da aplicação de uma fração.
Habilidades: H7; H10.

Descrição e reflexão: Para que os estudantes entendessem o conceito de fração equivalente, fizemos uma atividade de dobragem e pintura. Em duplas, solicitamos que um dos membros dobrasse uma folha de papel em quatro partes iguais e pintasse uma delas e o outro uma folha em oito partes iguais e pintasse duas. Em seguida, pedimos que comparassem a região pintada nas folhas e as sobrepusessem, para perceber que eram áreas iguais.

Ao perguntarmos quais frações estavam sendo representadas e qual o resultado obtido nessa atividade, os alunos concluíram que a fração *um quarto* representa a mesma parte do todo que a fração *dois oitavos*. Com essa percepção, formalizamos o conceito de fração equivalente e levantamos mais exemplos.



Em seguida, queríamos inserir uma nova significação para as frações, que seria utilizada posteriormente nas aulas, de modo que lançamos a seguinte pergunta: Qual a regra para representar geometricamente uma fração, dada sua forma simbólica ou geométrica? Mediante algumas discussões com a turma, concluímos juntamente que o denominador é a quantidade de partes que indica que o *todo* será dividido em partes iguais, enquanto o numerador a parte desejada/selecionada.

Ou seja, *um terço* poderia ser escrito como: *Duas partes de um total de três partes iguais*. Esse tipo de pensamento, nomeamos de *Interpretação*, que não se configura como uma nova representação. Porém, esse conceito de interpretação é importante para ampliar o significado que as representações têm para os estudantes, e será importante para as próximas aulas. Os estudantes mostraram compreensão da *interpretação* e seguimos com mais exemplos.

AULA 4: Atividades em sala para diagnosticar a aprendizagem. Habilidade: H5.

Descrição e reflexão: Aplicamos alguns exercícios para que os alunos entregassem e através dos quais fosse possível verificar o quanto haviam conseguido internalizar os conceitos até o momento da sequência didática. Ao longo das aulas foi possível acompanhar o aprendizado dos estudantes, mas com esses exercícios foi possível ter mais clareza das dificuldades individuais que possuíam. Alguns deles foram:

Quadro 1 - Atividade individual explorando múltiplas representações semióticas

Fração	Escrita	Geométrico	Interpretação
$\frac{2}{3}$	Dois terços		São duas partes de um total de três partes iguais.
$\frac{1}{4}$			
			São três partes de um total de quatro partes iguais.
			
	Quatro Quintos		

Fonte: elaborado por Sabel (2018), a partir de Silva (2005).

A seguir, temos uma atividade cujo objetivo é avaliar se os estudantes conseguiam partir de uma dada representação fracionária e ir para outra, ou seja, a atividade cognitiva de conversão. Esse exercício estimula o trânsito entre três registros de representação (escrita, geométrica e simbólica) e ainda se preocupa com o significado contextual das frações, exigido na última coluna (interpretação). Na Figura 2, a seguir, vemos um exemplo de resolução de um estudante participante da pesquisa, que conseguiu resolver a atividade corretamente, efetuando todas as conversões:

Figura 2 - Resolução de um estudante à atividade proposta no Quadro 1

Fração	Escrita	Geometricamente	Interpretação
$\frac{2}{3}$	Dois terços		São duas partes de um total de três partes iguais.
$\frac{1}{4}$	um Quarto		São uma parte de um total de quatro partes iguais.
$\frac{3}{4}$	Três Quartos		São três partes de um total de quatro partes iguais.
$\frac{1}{2}$	uma metade		São uma parte de um total de duas partes iguais. Metade
$\frac{4}{5}$	Quatro Quintos		São quatro partes de um total de cinco partes iguais.

Fonte: acervo dos autores.

- Pinte um terço da metade do retângulo abaixo. Qual fração representa a parte do retângulo que você pintou?



Nesta segunda atividade, o enunciado era composto apenas do registro escrito (língua natural). Para sua resolução, o estudante poderia converter a unidade escrita diretamente à geométrica (figura), ou converter primeiro à simbólica e depois à geométrica. Em todo caso, a atividade exige domínio de pelo menos dois tipos de registros de representação, e Duval (2003) destaca que “a originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo” (DUVAL, 2003, p. 14). Desta maneira, a questão satisfaz a hipótese de aprendizagem de Duval, uma vez que o estudante precisa pôr em prática a coordenação do registro geométrico com o escrito.

O enunciado da questão ainda exige cuidados interpretativos, pois a expressão “um terço da metade” faz referência a duas frações diferentes (um terço e um meio), sendo comum os estudantes errarem pela congruência semântica. A turma teve estas dificuldades esperadas, mas foi possível contorná-la explicando com mais exemplos como resolver este tipo de situação.

AULA 5: Simplificação de Frações. Habilidade: H7.

Descrição e reflexão: Retomando a atividade feita na Aula 3 sobre frações equivalentes, partimos da seguinte pergunta para realizar esta aula: *Se um quarto equivale à mesma parte de dois oitavos, como transformamos a fração com algarismos maiores em sua versão reduzida?*

Ou seja, a ideia era pensar em como simplificar uma fração e chegar à forma cujo denominador e numerador fossem os menores possíveis.

Observando através das construções geométricas que dois oitavos equivaliam a um quarto, que três nonos em um terço e dois décimos em um quinto, induzimos os estudantes a conjecturarem que o procedimento para realizar esse processo de simplificação deve ocorrer por meio de um divisor comum entre o numerador e o denominador.

Vale ressaltar que agora podemos realizar conversões em casos de não congruência semântica, pois agora a expressão “um quarto” poderá ser convertida em $\frac{2}{8}$. Esses casos de conversões não congruentes são importantes nas atividades matemáticas, uma vez que “o maior obstáculo que se instala na realização espontânea da coordenação dos diferentes registros de representação semiótica está relacionado ao fenômeno da não congruência semântica” (HILLESHEIM; MORETTI, 2013, p. 126).

AULA 6: Identificar e calcular as frações de um conjunto de elementos por meio de exercícios. Habilidade: H10.

Reflexão e descrição: O objetivo desta aula foi reforçar a ideia de Interpretação de uma Fração, mencionada na Aula 3. Iniciamos esta sequência didática utilizando exemplos onde calculamos a fração de algo inteiro, representado por uma figura. Porém, as frações precisam ser compreendidas em contextos que fazem referência a um conjunto de elementos, e esse é o objetivo desta aula. Um exemplo de atividade trabalhada nessa etapa:

- Pinte cinco sextos do total das bolinhas:



Aqui não temos um único elemento que será repartido em seis partes iguais, pois essa divisão envolve um grupo de elementos que a fração pretende alcançar. Neste caso, utilizando a interpretação da fração teremos: *são cinco partes de um total de seis partes iguais*. Sendo assim, dessas doze bolinhas, como faremos a divisão em seis partes? O estudante efetuará a divisão pertinente (doze por dois) e encontrará o número dois como quociente, chegando a seis duplas de bolinhas. E para finalizar, irá selecionar cinco dessas duplas, obtendo dez bolinhas e respondendo à questão.

Esse tipo de exercício exige a atividade cognitiva de conversão do enunciado em língua natural para o registro figural (geométrico), que seria o desenho apresentado. Esse tipo de conversão não apresenta congruência semântica, pois o denominador seis não está destacado

no desenho das bolinhas. A turma realizou esta e outras atividades semelhantes e se apropriaram das conversões não congruentes.

AULA 7: Operação de Adição e Subtração de Frações. Habilidade: H11.

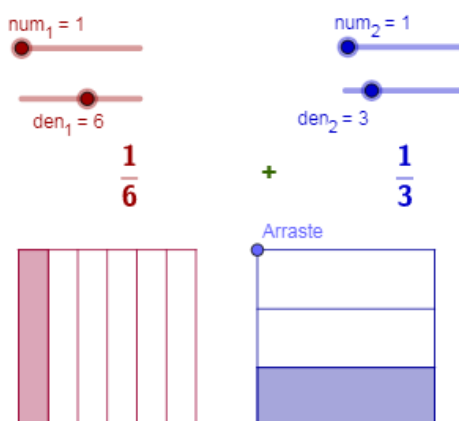
Reflexão e descrição: Nesta aula utilizamos o *software* GeoGebra como recurso didático para ensinar a soma e a subtração de frações. Ele permite integrar as representações semióticas instantaneamente, fazendo com que, após digitarmos simbolicamente uma fração, sua representação geométrica surja.

Nóbriga (2017) explorou a relação desse recurso com a teoria de Duval, pois ele permite a mobilização das representações de forma rápida e dinâmica, favorecendo a compreensão dos diferentes registros (simbólico, algébrico, discursivo e geométrico), os quais podem integrar concomitantemente.

Inicialmente, trouxemos frações com denominadores iguais a fim de realizar a operação de adição e subtração que o próprio *software* efetua e mostrar visualmente o que ocorre. Os estudantes perceberam que, em casos de mesmo denominador, a adição ou a subtração ocorrem efetuando a operação com os numeradores e mantendo o denominador.

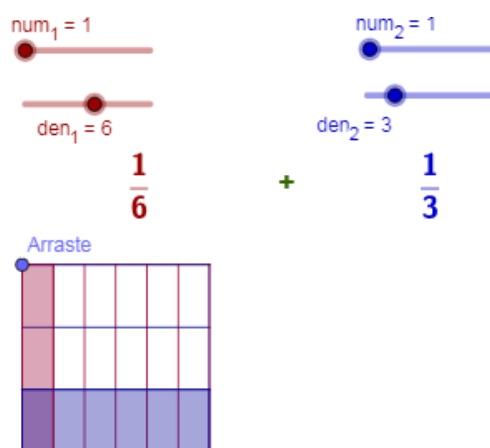
A principal contribuição do GeoGebra foi no cálculo das operações com denominadores diferentes. Colocamos no *software* uma fração com denominador seis e outra com três e somamos ambas no GeoGebra. A visualização ocorreu conforme as figuras a seguir:

Figura 3 - Adição de duas frações



Fonte: elaborada pelos autores.

Figura 4 - Resultado da adição



Fonte: elaborada pelos autores.

Na Figura 4, podemos ver que o resultado da adição advinda da sobreposição das duas frações gera uma figura com dezoito partes iguais. Qual a relação do dezoito com os denominadores das frações somadas? Através de outros exemplos, os estudantes conseguiram responder a essa pergunta e conjecturar que a soma das frações gera uma nova fração, cujo denominador será a multiplicação dos denominadores dos termos.

Com esta aula, apresentamos um novo método para somar ou subtrair frações, sem utilizar o MMC, que é um processo longo e mecânico. Os estudantes entenderam que, para realizar essas operações, basta multiplicar cada fração pelo denominador da outra, obtendo duas frações com denominadores comuns. Percebemos maior engajamento dos estudantes com uso da tecnologia e interesse em manipular o Geogebra no laboratório de informática.

Aula 8: A multiplicação e a divisão das frações. Exercícios envolvendo as quatro operações. Habilidades: H11 e H12.

Reflexão e descrição: Após verificar o entendimento da soma e subtração com algumas aulas de exercícios posteriores à Aula 7, iniciamos o estudo da multiplicação e divisão. Ensinamos que a multiplicação de duas frações ocorre de forma mais intuitiva, pois basta multiplicar os dois numeradores para obter o numerador do produto, assim como o denominador, que é calculado de forma análoga. No momento de dividir, ensinamos a regra da divisão de duas frações, multiplicando o primeiro fator pelo inverso do outro, obtendo, assim, o valor do quociente.

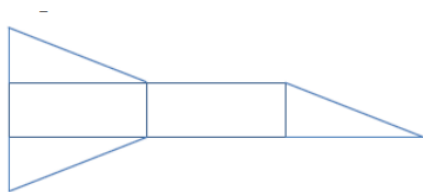
Um exemplo de atividade foi: *Uma escola vai colocar cortinas em todas as salas, e para isso, precisa de 75 metros de tecido. Se a escola já conseguiu $\frac{3}{5}$ do que necessitava, quantos metros ainda faltam?* Apesar de algumas dificuldades no tratamento aritmético, os estudantes conseguiram se apropriar do que estava sendo proposto e mostraram pelos exercícios feitos em sala que estão tendo êxito.

Aula 9: Segunda atividade diagnóstica das frações. Habilidades: H1; H2; H3; H5; H10; H11; H12.

Reflexão e descrição: Entre a Aula 7 e esta aula houve momentos para praticar exercícios em sala e de correção no quadro. Após exercitar as operações básicas, iniciamos a proposta desta aula.

Assim como na Aula 5, esta aula se destinou a apurar as habilidades em que os estudantes ainda apresentavam dificuldades e trabalhar todos os conceitos vistos até momento. Analisaremos algumas dessas questões:

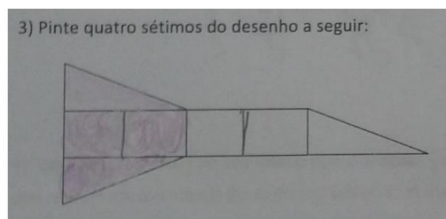
- Pinte quatro sétimos da figura a seguir:



- Joana comeu $\frac{2}{7}$ de um chocolate e Manuela comeu $\frac{3}{5}$ dele. Quem comeu uma porção maior?

Na primeira atividade, a figura estava visualmente repartida em cinco partes não iguais, e a questão pedia para que se representasse uma fração com denominador sete. Novamente é preciso ter a capacidade de realizar a conversão da escrita à imagem, e ainda efetuar uma operação de repartição da própria figura. Aqui muitos estudantes erraram ao dividir em partes que não eram iguais, mostrando ainda dificuldade em resolver esse tipo de questão, como o caso do estudante a seguir:

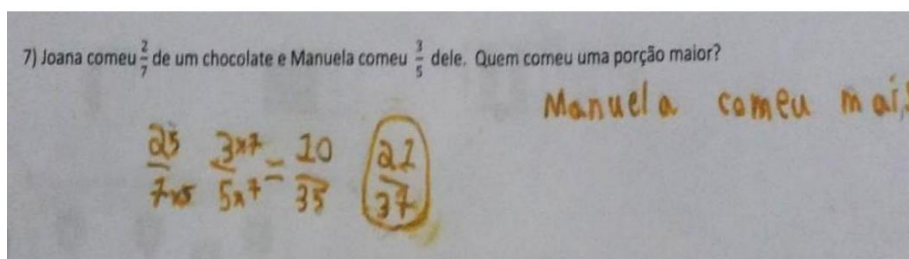
Figura 5 - Resolução de um estudante à atividade anterior



Fonte: acervo dos autores.

Na segunda atividade, havia uma comparação entre duas frações, e a forma que os estudantes o resolveram foi obter o mesmo denominador para poder comparar quem detinha a maior parte. Essa atividade revelou se ainda havia estudantes que não compreenderam a estrutura básica de uma fração e como esta deveria ser mobilizada em suas operações.

Figura 6 - Resolução de estudante ao problema anterior



Fonte: acervo dos autores.

Aula 10: Representação Decimal das frações. Habilidade: H4.

Reflexão e descrição: Já tendo assimilado as outras representações, iniciamos aqui a apropriação da quarta representação: a decimal. Explicamos que uma fração também pode ser vista como uma divisão do numerador pelo denominador, e utilizamos o método convencional da divisão em chave para esse processo.

Partimos com alguns exemplos no quadro e percebemos que, como o algoritmo de divisão ainda era lembrado pelos alunos, a atividade de conversão do símbolo para decimal não encontrou muitos obstáculos. É preciso destacar que, pelo nível que se encontram na educação básica (6º ano), mantivemos nossas atividades evitando os números irracionais e dízimas periódicas. Como o conjunto dos racionais e irracionais ainda não havia sido formalizado, foi necessário fazermos esse recorte. Um destaque importante desta aula foi o diálogo com os estudantes em todos os processos, a fim de que compreendessem que, mesmo se estivessem aprendendo uma nova representação, precisavam ter consciência que ainda estamos estudando

o mesmo objeto matemático, ou seja, a mesma fração independente de ser a figura, o símbolo ou a escrita.

Aula 11: Frações impróprias e números mistos. Habilidade: H11.

Reflexão e descrição: Até o momento desta sequência, os estudantes não haviam tido contato com frações que continham o numerador maior que o denominador. Esse tipo de fração é chamado de *fração imprópria*. Perguntamos aos estudantes como fariam para representar geometricamente a fração $\frac{6}{5}$, momento em que surgiu a dúvida geral: *Como selecionar seis partes, se só temos cinco?*

Para induzir ao entendimento de que essa fração, diferente das demais vistas até agora, representa um número maior que um, solicitamos a conversão para o registro decimal. Após obter o valor 1,20, os estudantes conseguiram observar que esse tipo de fração contém um inteiro completo dentro, e que por isso sua conversão ocorre de forma diferente. Com as noções básicas de soma de fração já aprendidas, foi possível mostrar que:

$$\frac{6}{5} = \frac{5}{5} + \frac{1}{5} = \mathbf{1} + \frac{1}{5}$$

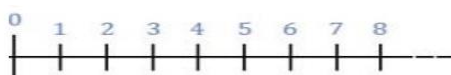
Os estudantes aprenderam como realizar os tratamentos para que uma fração imprópria seja transformada em uma fração composta, por um inteiro e uma fração, conhecida como *fração mista*. Após cumprirmos esse objetivo, seguimos com mais exemplos em sala.

Aula 12: Fração na reta, fração como medida e atividades. Habilidade: H6; H8.

Reflexão e descrição: Entrando na reta final do ensino de frações (no que compete ao 6º ano), nesta aula trouxemos a aplicação dos fracionários em contextos que são utilizados como medidas e relacionados à sua posição na reta numérica.

Como os estudantes já sabiam encontrar decimais na reta numérica desde o ano anterior, a relação com a fração não gerou grande dificuldade. Dado o registro simbólico ou escrito, os alunos com o uso do algoritmo da divisão obtinham o valor decimal e conseguiam identificar esse valor na reta, conforme o exemplo a seguir:

- Observando a reta numérica, podemos dizer que o número associado à fração $\frac{14}{4}$ está:



Dividindo 14 por 4, o resultado era 3,50, e assim essa fração era localizada entre os números 3 e 4 na reta da figura 10. Através dessa relação com a reta, é mais fácil para os estudantes compararem duas frações para saber qual número é maior ou menor, pois podem recorrer à reta numérica para a análise. Por isso, a compreensão da representação decimal é importante, pois podemos comparar esse valor decimal com sua respectiva posição na reta.

Explicamos também situações em que a fração é aplicada como unidade de medida, quando, por exemplo, dizemos: *minha altura é dois terços da altura da porta da sala* ou *use um terço de uma xícara de trigo*. Por meio dessas atividades, ampliamos a visão dos estudantes sobre a relevância de estudar as frações e suas aplicabilidades.

Aula 13: Avaliação Diagnóstica final.

Reflexão e descrição: Para finalizar o ensino de frações com o 6º ano, aplicamos uma última atividade diagnóstica com questões que abordassem novamente todas as habilidades, e algumas com mais aprofundamento. A seguir, apresentamos duas atividades que destacamos desta aula:

- Calcule e represente o resultado na forma decimal: $\frac{4}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} =$
- O desenho abaixo representa $\frac{1}{4}$ de uma figura completa, desenhe o inteiro:



Na primeira atividade, o estudante precisa retomar as operações básicas que aprendeu e efetuar a subtração e a soma que estão sendo solicitadas. Em seguida, irá realizar a conversão para a forma decimal. Desta forma, exercitamos o tratamento simbólico das frações e a conversão dos registros.

Na segunda atividade, há um desenho que simboliza um quarto do todo, que pede para encontrar a figura que representa o todo. Normalmente, quando há uma figura, pede-se para se encontrar um quarto dela, mas nesse caso a conversão tomará uma direção inversa. E Duval explica que “nem sempre a conversão se efetua quando se invertem os registros de partida e chegada. Isso pode mesmo conduzir a contrastes muito fortes de acerto quando se inverte o sentido de conversão” (DUVAL, 2003, p. 20). Por isso, é preciso exercitar essa inversão no sentido da atividade de conversão, pois podemos deixar de promover a compreensão do objeto em sua totalidade.

Ainda existem mais formas de trabalhar a fração, como a fração como razão ou como operador, ou ainda, em uma probabilidade. Porém, nosso recorte se deteve ao que compete ensinar ao 6º ano do Ensino Fundamental. Consideramos que de forma geral, foi uma boa escolha didática organizar o conteúdo desta forma e utilizar a teoria de Duval como apoio.

4. CONSIDERAÇÕES

Com este relato, apresentamos uma pesquisa que objetivou organizar e aplicar uma sequência de ensino com o fim de obtermos o aprendizado das frações para uma turma de sexto ano do Ensino Fundamental. Consideramos que a experiência obteve resultados positivos, uma vez que a maioria dos estudantes demonstraram, ao longo do processo, terem compreendido os conceitos sobre frações elencados para estas aulas. Um dos pontos que contribuíram para o êxito dessa sequência didática foi sua articulação com a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, elemento chave para pensarmos em como montar uma sequência de aulas que atendesse aos objetivos da pesquisa.

A teoria de Duval, por se tratar de uma teoria semiocognitiva de aprendizagem, ofereceu subsídios práticos e cognitivos, próprios da aprendizagem matemática, auxiliando-nos a pensar na abordagem das frações, de forma a valorizar suas representações e desenvolver atividades cognitivas para a sua apreensão. Em todas as aulas planejadas, o contato com as representações esteve presente, destacando-se as atividades de tratamento e conversão. Inicialmente, ensinamos o registro escrito em articulação com o simbólico, depois, a inserção do geométrico e, por último, o decimal. No final da sequência, a coordenação simultânea de pelo menos dois registros foi possível acontecer, por diferentes representações, o que atende à hipótese de aprendizagem de Duval.

Por meio das atividades, diagnosticamos elementos que dificultam o ensino de fração, como a não congruência semântica, por exemplo, que se mostrou ser um elemento que atravessa o ensino de frações e que precisa ser explorado com atenção, uma vez que gerou muitas dificuldades em alguns estudantes. Ainda que a congruência semântica não fosse o objetivo específico de pesquisa, consideramos que, no ensino de frações, é preciso iniciar com exemplos que apresentam congruência, embora ao longo das aulas o professor precise explorar a não congruência para que o aprendizado aconteça, pois, do contrário, o aprendizado do objeto poderia ficar limitado.

Por fim, destacamos que as atividades também foram escolhidas de forma a observar os aspectos da aprendizagem das frações, através das quais foi possível diagnosticar a compreensão das operações básicas, as diferentes representações, os principais conceitos de uma fração, a não congruência semântica e algumas aplicações. Este estudo também pode servir de exemplo ou inspiração para outros professores que sentem dificuldades no ensino de frações e possam refletir sobre suas aulas a partir desse texto.

REFERÊNCIAS

BERTONI, N. E. A Construção do Conhecimento sobre Número Fracionário. **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 21, n. 31, p. 209-237, 2008.

BOCALON, Z. G. **O erro na aprendizagem de frações no Ensino Fundamental:** concepções docentes. Dissertação de Mestrado em Educação. Pontifícia Universidade Católica, Curitiba, 2008.

BRASIL. **Parâmetros curriculares Nacionais**. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: Ministério da Educação, 2018.

CAVALIERI, L. **O Ensino das Frações**. Monografia da especialização em Ensino de Matemática. Universidade Paranaense, Umuarama, 2005.

D'AMBROSIO, U. História da Matemática e Educação. In. **História e Educação Matemática**. Campinas: Papirus, 1996, p. 7-17. Cadernos CEDES 40.

DUVAL, R. **Sémiosis et pensée humaine:** registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Berne: Peter Lang, 1995.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In. **Aprendizagem em matemática:** registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003, p. 21.

DUVAL, R. **Semiosis y pensamiento humano:** registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Santiago de Cali: Peter Lang, 2004.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano:** registros semióticos e aprendizagens intelectuais. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

DUVAL, R. **Ver e ensinar a matemática de outra forma:** entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. São Paulo: PROEM, 2011.

DUVAL, R. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. **Revemat**, Florianópolis, v. 7, n. 1, 2012.

HILLESHEIM, S.; MORETTI, M. Alguns aspectos da noção da congruência semântica presentes no ensino dos números inteiros relativos. **Revista Espaço Pedagógico**, v. 20, n. 1, 2013.

LUDKE, M.; ANDRÉ, M. A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: EPU, 2013.

NÓBRIGA, J. C. C. **Aprendendo Geometria Plana com a Plataforma GeoGebra**. Blumenau: Livre, 2017.

SABEL, Eduardo. **O papel das funções discursivas na análise da produção de alunos na resolução de problemas**. Dissertação (Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, UFSC, Florianópolis, 2021.

SABEL, Eduardo. **Sequência didática: uma organização do conteúdo na perspectiva das teorias de registro de representação semiótica e aprendizagem significativa para a compreensão das frações**. Monografia de Conclusão de Curso, UFSC, 2018.

SABEL, E; SILVEIRA, E. Representações auxiliares na aprendizagem matemática: o caso dos materiais manipulativos no ensino do sistema de numeração decimal. **Revemat**, Florianópolis, v. 18, n. 1, 2023. DOI: <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2023.e93906>

SILVA, F. A. F. **Graus de não congruência semântica nas conversões entre os registros geométrico bidimensional e simbólico fracionário dos números racionais**. Tese de Doutorado em Ensino das Ciências. Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2018.

SILVA, M. J. F. **Sobre a introdução do conceito de números fracionário**. Dissertação de Mestrado em Educação. Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 1997.

SILVA, M. J. F. **Investigando saberes de professores do Ensino Fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série**. Tese de Doutorado em Educação. Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2005.

ZABALA, A. **A Prática Educativa: como ensinar**. Porto Alegre: Artmed, 1998.

FONTE FINANCIADORA

Agrademos ao Programa de Bolsas Universitárias de Santa Catarina – UNIEDU/FUMDES pela bolsa de Doutorado para o primeiro autor.