



## EFEITOS DO REGISTRO DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA NA RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES POR ESTUDANTES DO ENSINO MÉDIO: ANÁLISE PRAGMÁTICO-COGNITIVA

### EFFECTS OF SEMIOTIC REPRESENTATION REGISTERS ON THE SOLVING OF LINEAR SYSTEMS BY HIGH SCHOOL STUDENTS: A PRAGMATIC-COGNITIVE ANALYSIS

Guilherme Rossi de Melo<sup>1</sup>  
Fábio José Rauen<sup>2</sup>

**Resumo:** Analisamos neste artigo, a partir de uma abordagem pragmático-cognitiva, efeitos dos registros algébrico, linguístico e pictórico na ordem e na mobilização de estratégias de resolução de sistemas lineares possíveis e determinados. Usando as noções teóricas de registros de representação semiótica, relevância e conciliação de metas, realizamos um experimento de caráter exploratório, propondo que estudantes do primeiro ano do ensino médio resolvessem três sistemas nesses registros e, em seguida, aplicando um protocolo verbal para investigar a ordem e os métodos de resolução. As evidências sugerem predileção pelos registros pictórico e linguístico, desempenho superior nesses registros, ainda que insuficiente, e mobilização abduativa de estratégias menos que formais com diferentes níveis de desempenho de conhecimentos matemáticos, incluindo soluções criativas *ad hoc*.

**Palavras-chave:** Pragmática Cognitiva. Conciliação de Metas. Relevância. Registros de Representação Semiótica. Sistemas Lineares.

**Abstract:** We analyze in this article, taking a pragmatic-cognitive approach, the effects of algebraic, linguistic, and pictorial registers on the order and mobilization of strategies for solving possible and determinate linear systems. Employing theoretical notions of semiotic representation registers, relevance, and goal-conciliation, we ran an exploratory experiment wherein we proposed that first-year high school students solve three systems in these representation formats and applied a verbal protocol to investigate the order and resolution methods. The evidence suggests a preference for pictorial and linguistic representations, with relatively superior performance in these registers, albeit insufficient. We also observed the abductive mobilization of less-than-formal strategies with varying levels of mathematical knowledge proficiency, including *ad hoc* creative solutions.

**Keywords:** Cognitive Pragmatics. Goal Conciliation. Relevance. Registers of Semiotic Representation. Linear systems.

---

<sup>1</sup> Mestre e doutorando em Ciências da Linguagem pela Universidade do Sul de Santa Catarina (UNISUL); Docente do Campus de Tubarão do Instituto Federal de Santa Catarina (IFSC); Tubarão, Santa Catarina, e-mail: [guilhermerossimelo@gmail.com](mailto:guilhermerossimelo@gmail.com).

<sup>2</sup> Doutor em Letras/Linguística pela Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC); Docente e Coordenador do Programa de Pós-graduação em Ciências da Linguagem da Universidade do Sul de Santa Catarina (UNISUL); Bolsista de Produtividade do Instituto Ânima; Tubarão, Santa Catarina, e-mail: [fabio.rauen@gmail.com](mailto:fabio.rauen@gmail.com).

## 1. INTRODUÇÃO

Sistemas lineares pictóricos possíveis e determinados, em geral contendo armadilhas, são desafios de entretenimento amplamente comentados e compartilhados nas redes sociais. Admitindo que diferentes registros de representação iluminam aspectos distintos dos objetos matemáticos, a potência com a qual o registro pictográfico promove esse engajamento na internet fez-nos questionar quais seriam os impactos da forma pictórica, linguística (língua natural) ou algébrica de apresentação desses sistemas na ordem e nas respectivas estratégias de resolução entre estudantes do primeiro ano do ensino médio.

Para tanto, assumimos neste estudo que essas estratégias de resolução funcionam como hipóteses abduativas antefactuais em direção à consecução de metas nos termos da teoria de conciliação de metas (RAUEN, 2014). Assim, considerando a meta de resolver os sistemas em diferentes registros, os estudantes mobilizariam estratégias de consecução a serem executadas e checadas, encerrando o processamento quando as respostas se conciliassem com o estado de meta projetado. Ademais, coerente com a teoria da relevância (SPERBER; WILSON, 1986, 1995), essas estratégias consistiriam num equilíbrio ótimo de efeitos cognitivos maximizados e esforços de processamento minimizados. Posto isso, ingressantes do ensino médio deveriam ser capazes de tratar sistemas lineares por um dos três métodos formais de resolução – adição, comparação e substituição – superando estratégias *ad hoc* entre as quais a de tentativa e erro. Logo, deveriam estar aptos a converter sistemas pictográficos e linguísticos numa formulação algébrica, mobilizando adequadamente esses registros (DUVAL, 2003, 2009, 2012).

Admitindo que estudantes operam com resoluções formais, em igualdade de condições, o registro algébrico deveria ser escolhido, pois essa representação requereria apenas tratamento, enquanto as demais requereriam conversões seguidas de tratamentos. Entretanto, parte do sucesso de versões pictóricas na internet se explica pelo nível das questões, uma vez que elas demandam por tratamentos mais simples favorecendo estratégias *ad hoc* com diferentes graus de criatividade, entre as quais as de tentativa e erro. Assim, a conversão dos sistemas para o registro algébrico não ocorreria, entre outras razões, porque os estudantes não mobilizariam métodos formais de resolução. Se esse é o caso, a ordem da resolução pode ser outra e mesmo favorecer os registros pictórico e linguístico mais relevantes nesses contextos.

Para verificar quais dessas hipóteses prevalece, realizamos um estudo com trinta estudantes do primeiro ano do ensino médio no qual propusemos aos estudantes a resolução de três sistemas lineares apresentados em registro algébrico, linguístico e pictórico e, em seguida investigamos a ordem e os métodos de resolução a partir da perspectiva dos estudantes.

Consideradas essas questões introdutórias, apresentamos breves apontamentos teóricos na próxima seção para, em seguida, apresentar a metodologia, e analisar e discutir os resultados.

## 2 BREVES APONTAMENTOS TEÓRICOS

Este estudo integra a linha de pesquisa “Pragmática Cognitiva e Ensino de Matemática e Ciências” do “Grupo de Pesquisa em Pragmática Cognitiva” (GPPC) do Programa de Pós-Graduação em Ciências da Linguagem (UNISUL). Em comum, os trabalhos do grupo aplicam sinergicamente as teorias de conciliação de metas (RAUEN, 2014), de relevância (SPERBER; WILSON, 1986, 1995) e de registros de representação matemática (DUVAL, 2003, 2009, 2012) para descrever e explicar processamentos cognitivos envolvidos na resolução de problemas.

A teoria de conciliação de metas modela a ação humana em planos de ação intencional com quatro estágios (os três primeiros abduativos, os três últimos dedutivos): projeção de meta  $Q$  [1], e formulação [2], execução [3] e checagem [4] de ao menos hipótese abduativa antifactual ótima  $PQ$ , conectando uma ação antecedente  $P$  em direção à consecução  $Q'$  desse estado consequente projetado. Assim, há auto ou heteroconciliação ativa ou passiva de metas quando o estado  $Q'$  obtido satisfaz a meta  $Q$  projetada e inconciliação de metas inversamente. Ademais, a teoria fornece diferentes graus de expectativas para eficácia das hipóteses abduativas antifactuais (de categóricas a tautológicas, passando por bicondicionais, condicionais e habilitadoras). Por exemplo, a escolha do método da adição para a resolução de um sistema linear poderia ser modelada como uma hipótese abduativa antifactual habilitadora, posto que a ação antecedente é necessária, mas não suficiente para a consecução dessa atividade (figura 1).

**Figura 1 – Arquitetura abduativo-dedutiva da teoria de conciliação de metas**

Abdução	[1]	$Q$		Resolver o sistema linear, estudante
Dedução	[2]	$P$ $Q$	Aplicar o método da adição, estudante	Resolver o sistema linear, estudante
	[3]	$P$	O estudante aplica o método da adição	
	[4]	$Q'$		O estudante resolve o sistema linear

Fonte: Elaboração nossa

A teoria da relevância, por sua vez, é uma abordagem pragmático-cognitiva organizada a partir do *princípio cognitivo de relevância* de que a mente humana maximiza os *inputs* cognitivos que processa e do *princípio comunicativo de relevância* de que enunciados geram expectativas precisas de relevância ótima. Desse modo, *inputs* cognitivos são relevantes quando seus efeitos cognitivos positivos compensam os esforços cognitivos para obtê-los, fortalecendo

suposições cognitivas prévias, contradizendo e, por vezes, eliminando suposições cognitivas prévias, ou gerando implicações novas ao interagir com suposições cognitivas prévias.

Conforme o *princípio comunicativo de relevância*, estímulos ostensivos (em nosso caso linguísticos, pictóricos ou algébricos) são presumidos como otimamente relevantes. Isso ocorre quando eles são (a) ao menos relevantes o suficiente para valer o esforço de processamento do ouvinte, e (b) os mais relevantes possíveis dadas as habilidades e preferências do falante. Segue dessa *presunção de relevância ótima*, um *procedimento de compreensão orientado pela noção teórica de relevância*, segundo o qual o ouvinte segue um caminho de esforço mínimo para computar efeitos cognitivos (a) considerando interpretações em ordem de acessibilidade e (b) encerrando o processamento quando sua expectativa de relevância ótima é satisfeita.

Posto isso, dado que conforme a teoria de registros de representação semiótica os conceitos matemáticos somente são parcialmente acessíveis por diferentes registros de representação semiótica, cada qual com suas unidades significativas próprias, a resolução de certos problemas pode demandar tratamentos em registros diversos daqueles de partida, impondo a conversão, muitas vezes não congruente, dessas unidades. Assim, por exemplo, a resolução de um sistema pictórico ou em língua natural pode demandar conversão para formulações algébricas. Por conseguinte, nossa hipótese de trabalho é a de que o procedimento de compreensão orientado pela relevância desempenha um papel central desde a interpretação dos estímulos ostensivos dos sistemas lineares até a avaliação de suas resoluções, de modo que a presunção e a satisfação da expectativa de relevância ótima orientam cada passo dos respectivos planos de ação intencional, inclusive a mobilização de diferentes registros de representação, sempre que pertinentes.

Consideradas, as teorias que embasam o estudo, ainda que em linhas muito breves, apresentamos na próxima seção os materiais e métodos.

## 2. MATERIAIS E MÉTODOS

Para a coleta de evidências, projetamos um aplicativo com dez telas<sup>3</sup>. A tela 1 contém um campo de identificação<sup>4</sup> e um botão de início com o qual o sistema aciona um cronômetro. Na tela 2, há o comando para escolher as atividades e um botão de ação CONTINUAR. Na tela 3,

---

<sup>3</sup> Essa providência se justifica pelas funcionalidades de um programa especificamente dimensionado para a tarefa. O aplicativo permitiu contabilizar o tempo despendido em cada tela, viabilizou a aleatoriedade na disposição das atividades nos três registros escolhidos e organizou os dados para análise.

<sup>4</sup> Os nomes foram correlacionados com um código de identificação, viabilizando o anonimato do participante.

(figura 2) apresentam-se três sistemas aleatoriamente distribuídos: um sistema pictórico com bananas e estrelas, um sistema em língua natural sobre contagem de galinhas e coelhos em um quintal (DANTE, 2018, p. 139), e o sistema algébrico  $\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 4x + y = 11 \end{cases}$ . Abaixo de cada sistema há o botão ESCOLHER com o qual o participante decide qual deles resolverá primeiro. A tela conta também com o botão DESISTIR. Se o participante desiste, abre-se uma janela de confirmação com a qual a atividade se encerra.

**Figura 2 – Tela 3 do Aplicativo**



Fonte: Melo (2020, p. 66).

Arbitrando que o participante escolhe o sistema pictórico, ele é conduzido para a tela 4, com uma réplica ampliada do sistema e duas caixas de entrada para digitar a resposta para as incógnitas “banana” e “estrela”<sup>5</sup>. Abaixo dessas caixas, há dois botões de ação: o botão FINALIZAR, que se habilita quando o participante preenche as respostas, e o botão DESISTIR, com o qual ele deixa de responder a esse sistema, mas segue às demais atividades.

Independentemente da ação, o participante segue para a tela 5, que é idêntica à tela 2. Ao clicar em CONTINUAR, o participante segue para a tela 6, em tudo equivalente à tela 3, salvo que a atividade previamente escolhida deixa de estar disponível. As duas atividades restantes são apresentadas em ordem aleatória e acompanhadas pelo botão de ação ESCOLHER. Abaixo de ambas as atividades, há um botão DESISTIR com as mesmas funcionalidades da tela 3.

Arbitrando que o participante escolhe o sistema em língua natural, ele segue para a tela 7. Essa tela apresenta a atividade escolhida com as respectivas caixas de respostas para as incógnitas “galinha” e “coelho”, e os botões de ação FINALIZAR e DESISTIR com as mesmas funcionalidades da tela 4.

<sup>5</sup> Nesse momento, o participante tem à disposição folhas brancas, lápis e borracha para resolver o sistema. Os registros grafados nessas folhas foram catalogados e arquivados para análise.

Independentemente do botão escolhido, o participante segue para a tela 8, com a frase de comando RESOLVA A PRÓXIMA QUESTÃO acompanhada pelo botão de ação CONTINUAR, que o conduz à tela 9. Em nossa sequência arbitrária, a tela 9 contém o sistema em registro algébrico, as respectivas caixas de respostas para as incógnitas “ $x$ ” e “ $y$ ” e os botões de ação FINALIZAR e DESISTIR. Independentemente da escolha, o participante segue para a última tela.

A tela 10 informa a finalização da atividade e agradece a participação. No instante em que o aplicativo apresenta a tela, o relógio interno para, e os dados são consolidados em uma planilha. Essa planilha informa quanto tempo o participante ficou em cada tela, quais foram as respostas em cada sistema e se houve alguma desistência.

Uma vez testado o aplicativo com auxílio de voluntários, nossa preocupação se direcionou à obtenção de evidências discursivas sobre o processamento cognitivo dos sistemas. Dado que precisávamos validar qualitativamente os resultados obtidos na primeira etapa, optamos por utilizar o *protocolo verbal retrospectivo imediato*. Segundo Jaspers et al. (2004, p. 783), em diversas situações, o método *think aloud* – pensar em voz alta ou verbalizar o pensamento – é fonte única sobre a cognição. O método consiste em obter evidências mediante verbalização oral para modelar processos cognitivos utilizados na resolução de sistemas. Ericsson e Simon (1993) foram precursores desses protocolos, classificando-os como concorrentes ou retrospectivos, de modo que nos últimos o indivíduo relata o processo cognitivo que foi realizado anteriormente. Posto isso, o protocolo verbal retrospectivo foi projetado para ser aplicado imediatamente após a finalização da atividade no computador. Nessa atividade, elaboramos perguntas abertas sobre a ordenação e sobre técnicas e estratégias utilizadas para a resolução dos sistemas apresentados.

Uma vez consolidado o aplicativo de coleta das informações e o protocolo verbal, procedemos aos contatos formais com a escola e à tramitação do estudo no Comitê de Ética. No dia do experimento, conduzimos cada estudante à sala de informática, onde dispusemos uma mesa com um notebook ligado na tela de inicialização do aplicativo. Explicada a atividade, os estudantes interagiram com o aplicativo, resolvendo sem qualquer auxílio do aplicador os sistemas individualmente, utilizando lápis, borracha e folhas brancas sempre que necessário. Em seguida, o pesquisador iniciou o protocolo verbal retrospectivo sobre a ordem de escolha e sobre procedimentos de resolução, gravando as respostas em áudio.

Executada a pesquisa, os resultados são apresentados na próxima seção.

### 3. RESULTADOS

Conforme nossas hipóteses, ou os estudantes privilegiariam o registro algébrico e tenderiam a resolver os sistemas por métodos formais, ou privilegiariam os demais registros e tenderiam a resolvê-los por métodos alternativos. Para verificá-las, solicitamos que eles escolhessem o sistema nas telas 2 e 5. O resultado pode ser resumido na tabela 1, a seguir:

**Tabela 1 – Ordem de resolução das atividades**

<i>Ordem de resolução das atividades</i>	<i>f</i>	<i>%</i>
Pictórico, Linguístico e Algébrico	12	40,00
Pictórico, Algébrico e Linguístico	4	13,33
Linguístico, Pictórico e Algébrico	7	23,33
Linguístico, Algébrico e Pictórico	3	10,00
Algébrico, Pictórico e Linguístico	3	10,00
Algébrico, Linguístico e Pictórico	1	3,33
<b>Total</b>	<b>30</b>	<b>100,00</b>

Fonte: Elaboração nossa.

Em direção à corroboração da hipótese alternativa, constatamos que dezesseis estudantes preferiram iniciar as resoluções com o sistema pictórico e outros dez com o sistema em língua natural, totalizando 26 casos (86,66%), de modo que somente quatro estudantes iniciaram as resoluções com versão algébrica. Além disso, constatamos que dezenove estudantes (63,33%) deixaram o sistema em registro algébrico como última opção, priorizando os demais registros como primeira ou segunda escolha.

Obtidas as evidências de predileção, seguem algumas justificativas apresentadas pelos estudantes no protocolo verbal retrospectivo. Para 14 estudantes (46,67%), o sistema em registro pictórico aparentava ser mais fácil, sugerindo que avaliações intuitivas de custo de processamento entram em cena nessa escolha. Destaque-se que três estudantes consideraram o sistema pictórico mais fácil justamente porque ele se assemelha a desafios de internet.

E<sub>69</sub><sup>6</sup> – Porque tipo, é como aqueles joguinhos que aparecem de vez em quando na internet. Quantas coisas tem, daí multiplica, até no grupo da família às vezes a gente brinca.

E<sub>81</sub> – Porque as vezes eu vejo algumas brincadeiras assim em redes sociais, eu sempre gosto de fazer esses negócios. Ai sempre que aparece uma eu sempre tento resolver e eu sempre consigo.

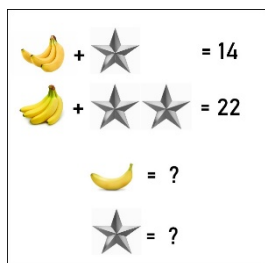
<sup>6</sup> O software atribuía uma identificação única para cada participante, numerados de 50 e 90.

Observada a ordem de resolução, analisamos as estratégias utilizadas pelos estudantes, verificando se era possível associar a predileção por sistemas pictóricos/textuais e o uso de métodos menos formais. Para isso, apresentamos as evidências em três subseções destinadas, respectivamente, à resolução do sistema pictórico, linguístico e algébrico.

### 3.1 Sistema apresentado em registro pictórico

Para analisar o desempenho dos estudantes, vale compará-los com a solução formal pelo método da adição segundo a qual uma banana vale três unidades e uma estrela cinco unidades.

**Figura 3 – Resolução do sistema pictórico**



$$\begin{cases} 3x + y = 14 \\ 4x + 2y = 22 \\ -6x - 2y = -28 \\ 4x + 2y = 22 \\ -2x + 0y = -6 \\ -2x = -6 \\ x = 3 \\ 3x + y = 14 \\ 3 \cdot (3) + y = 14 \\ 9 + y = 14 \\ y = 5 \end{cases}$$

Fonte: Elaboração nossa.

Com relação a esse sistema, quatro estudantes (13,33%) acertaram o resultado, 24 estudantes (80%) erraram e dois estudantes (6,66%) desistiram.

Dentre as respostas erradas, onze estudantes (36,66%) consideraram que uma banana valia seis e uma estrela oito unidades. O protocolo verbal sugere pistas desse desempenho.

E<sub>73</sub> – Eu vi que na **primeira** a gente tem **uma banana** e uma estrela. E no **segundo uma banana** e duas estrelas. Então a diferença dos valores era o valor de uma estrela. Porque só foi acrescentado uma estrela, então a alteração de valor é o valor daquela estrela (grifos nossos).

Pelo que podemos depreender, esses estudantes interpretaram como variável-alvo os cachos de bananas em vez das frutas isoladamente nas duas primeiras linhas do sistema. Esse comportamento sugere a decisiva intercorrência de variáveis culturais na interpretação, uma vez que é usual comprarmos cachos de bananas em vez de bananas isoladamente. Dado que essa interpretação foi consistente com a *presunção de relevância ótima* para esses onze estudantes, ela prevaleceu, a despeito de se questionar o valor de cada banana na terceira linha.



Independentemente disso, todos os estudantes se valeram do método de tentativa e erro, abduzindo os valores para as incógnitas e validando o par escolhido nas duas equações.

$E_{81}$  – Eu fiz como eu sempre fiz os outros, contando quanto cada banana vale e tentando com valores. **Eu tentei com 2 e depois com 3 e conforme eu fui tentando, chegou uma hora que deu certo** (grifos nossos).

Assim, diante da meta  $Q$  de resolver o sistema pictográfico [1], os estudantes abduziram a hipótese  $P$  de usar o método da tentativa e erro [2], executaram o método quantas vezes fosse necessário [3] até que fosse encontrado o par que satisfizesse ambas as equações [4].

**Figura 4 – Plano de ação intencional**

[1]	$Q$		Resolver o sistema pictográfico, estudante
[2]	$P$	$Q$	Aplicar método de tentativa e erro, estudante
[3]	$P$		O estudante aplica o método de tentativa e erro
[4]	$Q'$		O estudante resolve o sistema pictográfico

Fonte: Elaboração nossa.

Outra estratégia que merece ser destacada foi a do estudante  $E_{85}$ .

$E_{85}$  – Se tem duas coisas valendo um valor, você geral faz uma média do que vale cada um.

Aqui o estudante abduz a hipótese de utilizar a média aritmética. Além de considerar como unidades significativas os cachos de bananas e não as bananas isoladamente, ele considerou que duas incógnitas somadas deveriam obrigatoriamente ter o mesmo valor.

O tratamento mobilizado por estudantes que não interpretaram cada banana como unidade significativa é similar ao método de adição. A hipótese abduzida de subtrair as linhas para obter o valor de uma estrela tem traços semelhantes aos métodos formais, mas o desempenho sofrível que segue sugere que eles não os dominam.

$E_{73}$  – Eu vi que na primeira a gente tem uma banana e uma estrela. E no segundo uma banana e duas estrelas. Então a **diferença dos valores era o valor de uma estrela**. Porque só foi acrescentado uma estrela, então a alteração de valor é o valor daquela estrela. (grifos nossos).

Vários estudantes que interpretaram corretamente o sistema, isto é, identificando haver três e quatro bananas nas duas primeiras linhas, ainda assim erraram a questão. Mesmo adotando valores-tentativa, eles cometem erros de atribuição.

E<sub>69</sub> – Eu vi que na primeira questão tinha 3 bananas, aí na segunda já tinha 4. Aí como na primeira bateu, eu fiquei em dúvida na segunda, mas a primeira bateu certinho. **Contei 4 como cada uma das bananas, aí a estrela valia duas.** Aí depois bateu. (grifos nossos).

O estudante E<sub>69</sub>, por exemplo, encontrou um par  $x = 4; y = 2$ , que funciona na primeira linha do sistema linear. Contudo, ele não testou o resultado na segunda linha, sugerindo que a solução da primeira linha satisfaz sua expectativa de relevância ótima.

**Figura 5 – Plano de ação intencional**

[1]	Q		Resolver o sistema pictográfico, estudante
[2]	P	Q	Encontrar uma solução para a primeira equação, estudante
[3]	P		O estudante encontra uma solução para a primeira equação
[4]	Q'		O estudante resolve o sistema pictográfico

Fonte: Elaboração nossa.

Em geral, todos os estudantes que erraram a solução abduziram estratégias de tentativa e erro. Ao testar os valores, todavia, demonstraram que o conceito mesmo de sistema linear não está internalizado, pois ao encontrar um par como solução em qualquer das linhas, os estudantes o consideravam como solução final do sistema.

### 3.2 Sistema apresentado em registro linguístico

Para analisar o desempenho dos estudantes na resolução do sistema apresentado em língua natural, vale comparar os resultados produzidos por eles com a solução formal pelo método da substituição segundo a qual há três galinhas e quatro coelhos no quintal.

**Figura 6 – Resolução do sistema linguístico**

Em um quintal há galinhas e coelhos.	$\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + 4y = 22 \end{cases}$	$\begin{cases} x + y = 7 \\ x + 4 = 7 \end{cases}$
Há 7 cabeças e 22 patas.	$x = 7 - y$	$x = 3$
Quantas são as galinhas e quantos são os coelhos.	$2(7 - y) + 4y = 22$	
(DANTE, 2018, p. 139).	$14 - 2y + 4y = 22$	
	$2y = 8$	
	$y = 4$	

Fonte: Elaboração nossa.

Com relação a esse sistema, apenas quinze estudantes (50%) acertaram o resultado do sistema linear, quatorze estudantes (47%) erraram e um estudante (3%) desistiu.

Analisando as evidências, constatamos que os estudantes não tratam formalmente o sistema. Além de estratégias de tentativa e erro, doze estudantes abduziram a utilização de estratégias de distribuição. A seguir, destacamos três excertos.

E<sub>59</sub> – Eu **coloquei 7 cabeças e depois eu fui separando as 22 patas para cada uma** é duas patas. Aí eu botei coelho, acho que tem 4 né. 4 coelhos e 2 para galinhas.

E<sub>73</sub> – Usando uma folha de rascunho eu **desenhei 7 símbolos como 7 cabeças e coloquei primeiro 2 pernas em cada um**. E aí fui acrescentando e tendo cuidado com o resultado. Aí fui somando... aqui é um coelho com 4 patas, um coelho, um coelho... e fui indo. Aí eu vi que sobrou patas, então eu tirei um coelho e botei uma galinha. Aí eu vi que fechou o número de coelhos com o número de galinhas com as 4 patas e 2 patas. Primeiro eu montei certinho e fui acrescentando patas.

E<sub>77</sub> – O sistema fala que tem 7 cabeças e 22 patas, então se a galinha tem 2 patas e o coelho tem 4, tinha que fazer **7 vezes 2 pois daria duas patas para cada um e o que sobrasse iria dar para os coelhos**. Daí eu resolvi. (grifos nossos).

Conforme destacamos, eles distribuíram patas em cabeças desenhadas na folha que disponibilizamos para as resoluções. Os estudantes distribuíram inicialmente duas patas para todos os 7 animais e, em seguida, distribuíram as patas remanescentes até se esgotarem as possibilidades. Para tanto, observe-se que houve uma conversão da sequência lexical “em um quintal há galinhas e coelhos” para o registro pictórico de apoio, sugerindo a mobilização de alguma forma de pensamento algébrico, ainda que incipiente.

Vejamos a análise dessa estratégia à luz da teoria de conciliação de metas.

### Figura 7 – Plano de ação intencional

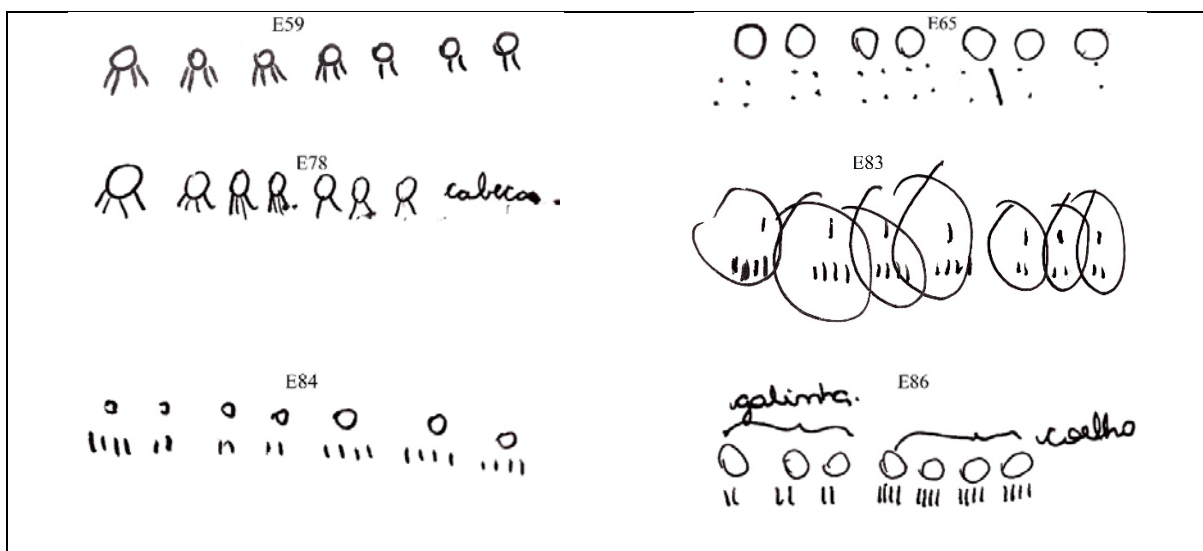
[1]	<i>Q</i>		Resolver o sistema em língua natural, estudante
[2]	<i>P</i>	<i>Q</i>	Distribuir patas a todos os animais, estudante
[3]	<i>P</i>		O estudante distribui patas a todos os animais
[4]	<i>Q'</i>		O estudante resolve o sistema em língua natural

Fonte: Elaboração nossa.

As hipóteses abduativas para distribuir as patas variaram entre os estudantes. Os estudantes E<sub>59</sub>, E<sub>65</sub>, E<sub>78</sub>, E<sub>83</sub>, E<sub>84</sub> e E<sub>86</sub>, por exemplo, desenharam as cabeças, distribuindo pares de patas até se esgotarem as opções, considerando coelhos todas as cabeças com quatro patas e galinhas todas as cabeças com duas patas (ver figura 8, mais adiante).

E<sub>77</sub> optou por quatro operações básicas: multiplicar todas as cabeças por dois, obtendo quatorze patas; diminuir o resultado dessa multiplicação do total de patas, obtendo oito patas residuais; dividir o número de patas residuais por dois, obtendo a quantidade de coelhos; e, implicitamente, diminuir a quantidade de coelhos da quantidade total de cabeças, obtendo a quantidade de galinhas.

**Figura 8 – Resoluções dos estudantes E<sub>59</sub>, E<sub>65</sub>, E<sub>78</sub>, E<sub>83</sub>, E<sub>84</sub> e E<sub>86</sub>**



Fonte: Anotações dos estudantes.

O estudante E<sub>76</sub>, por sua vez, interpreta o sistema de forma singular.

E<sub>76</sub> – Olha, na verdade eu pensei em uma coisa bem aleatória. Sei lá, eu vi que **galinhas não tinha patas e tinha pés**, alguma coisa assim. E daí eu só, foi mais um chute.

Pesquisador – Está, mas você considerou que as galinhas não estavam nas contas das patas, é isso?

E<sub>76</sub> – É isso (grifos nossos).

A relembrar, obtivemos esse sistema de um livro didático que desconsidera a distinção entre “pernas de galinhas” e “patas de coelhos”. E<sub>76</sub> observou esse descuido e considerou que havia uma armadilha na questão, considerando o sistema impossível de ser resolvido.

Analisando as informações dos quatorze estudantes que erraram o sistema, constatamos que houve dificuldades no tratamento aritmético, na interpretação da quantidade de patas de cada galinha e na quantidade de animais no quintal.

Vejamos o caso do estudante E<sub>81</sub> para ilustrar essas situações (figura 9, mais adiante). E<sub>81</sub> fez sucessivas subtrações do valor do total de patas pelos valores relacionados à quantidade de patas em cada galinha ou coelho. Na penúltima operação, considerou que  $8 - 4 = 2$ , bastando então subtrair um par de patas de galinhas na última operação. Esse erro trivial custou-lhe a questão, pois ele resolveria o sistema corretamente caso operasse  $8 - 4 = 4$  e, por fim, subtraísse o último par de patas de coelhos. Mesmo errando a última subtração, E<sub>81</sub> obteve um total de sete animais, de modo que, potencialmente, sua expectativa de obtenção de uma resposta relevante foi satisfeita.

**Figura 9 – Resolução do sistema linguístico pelo estudante E<sub>81</sub>**

Fonte: Anotações dos estudantes.

A resposta de E<sub>80</sub> também é peculiar. Sua solução, 5 coelhos e 2 galinhas, é válida somente se considerarmos que galinhas têm somente uma perna. As evidências, contudo, não nos permitem verificar se esse equívoco deriva de questões conceituais, operacionais ou decorre meramente de um descuido de atenção.

Conhecidas as resoluções do sistema em língua natural, passamos a considerar a resolução do sistema em registro algébrico.

### 3.3 Sistema apresentado em registro algébrico

Para analisar o desempenho dos estudantes na resolução do sistema em registro algébrico, vale comparar os resultados produzidos por eles com a solução formal pelo método da substituição segundo a qual  $x$  é igual a 2 e  $y$  é igual a 3.

**Figura 10 – Resolução do sistema algébrico**

$$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 4x + y = 11 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{8-x}{2} = 11 - 4x \\ 8-x = 22 - 8x \\ 8x - x = 22 - 8 \\ 7x = 14 \\ x = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x + y = 11 \\ 4(2) + y = 11 \\ y = 11 - 8 \\ y = 3 \end{cases}$$

Fonte: Elaboração nossa.

O desempenho dos estudantes na resolução do sistema algébrico é mais uma evidência em direção à dificuldade da emergência de resoluções formais como hipóteses abduativas

antefactuais ótimas. Somente 3 estudantes (10%) acertaram o resultado do sistema, 15 estudantes erraram (50%) e 12 estudantes desistiram (40%).

Nos excertos a seguir, relativos a entrevistas com estudantes que acertaram o sistema, percebemos que todos abduziram estratégias de tentativa e erro.

E<sub>66</sub> – Eu fui tentando achar o X e o Y escolhendo alguns números até chegar ao resultado certo, que caiba nos dois.

E<sub>74</sub> – Eu também chutei valores...

E<sub>81</sub> – Basicamente foi a mesma estratégia que eu fiz no da banana. Tentei por tentativa e erro e uma hora eu acertei.

Somente o estudante E<sub>55</sub> tentou usar um método formal.

**Figura 11 – Resolução do sistema algébrico pelo estudante E<sub>55</sub>**

$$\begin{cases} x + 2y = 8 & (-4) \\ 4x + y = 11 & (-2) \end{cases}$$
~~$$-4x - 8y = -32$$~~

$$-8x + (-2y) = -22$$

$$-8x - 2y = -22$$

$$-8x = -22$$

$$x = \frac{-22}{8}$$

$$x =$$

Fonte: Anotações dos estudantes.

E<sub>55</sub> desiste do sistema, mas podemos identificar que há traços que remetem ao método formal de adição. Multiplicar a primeira linha por  $(-4)$  é uma boa opção para eliminar a incógnita  $x$  após a adição das equações. De forma análoga, multiplicar a segunda linha por  $(-2)$  também é uma boa opção, mas eliminaríamos a incógnita  $y$  após a adição nessa situação. Efetuar as duas opções simultaneamente, portanto, não concorre para a resolução do sistema. Ademais, ao multiplicar a primeira linha por  $(-4)$ , E<sub>55</sub> deixou de operar corretamente com o monômio  $2y$ , somente invertendo seu sinal e considerando que  $(-2y)$  mais  $(-2y)$  é igual a zero.

Outros dois estudantes apresentaram pistas de que tentaram usar uma equação polinomial do segundo grau (*Método* ou *Fórmula de Bhaskara*). E<sub>54</sub> tentou utilizar o formato mais usual do método, enquanto E<sub>65</sub> preferiu uma variante e apresentou um esboço do método de *soma e produto*. Todavia, ambos os métodos são ineficazes para resolver o sistema.

**Figura 12 – Resolução do sistema algébrico pelos estudantes E55 e E65**

<p>Q1) E54</p> $a = 1$ $b = 2$ $c = 8$ $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8$ $\Delta = 4 - 32$ $\Delta = -28$ <p>b) <math>a = 4</math></p> $b = 1$ $c = 11$ $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 4 \cdot 11$ $\Delta = 1 - 176$ $\Delta = -175$	<p>E65</p> $\Delta = -4.0.0$ $\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 4x + y = 11 \end{cases}$ $-2x + \sqrt{\Delta}$ $2y = 8 + x$ $S \square \square = 8$ $P \square \square = 11$
---	--

Fonte: Anotações dos estudantes.

Ciente que quinze estudantes erraram a solução do sistema em registro algébrico, identificamos que sete deles responderam como solução o par ordenado (6,7), ou seja, que  $x$  valeria seis unidades e  $y$  valeria sete unidades. E, destacando somente o valor de  $y$ , onze estudantes responderam que essa incógnita valeria sete unidades.

Para analisar o possível caminho tomado por esses estudantes, pois não há pistas nas entrevistas ou no material utilizado por eles para tanto, apresentamos novamente o sistema:

$$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 4x + y = 11 \end{cases}$$

Um teste rápido de substituição das incógnitas pelo par (6,7) resulta em duas desigualdades.

$$\begin{cases} 6 + 2 \cdot (7) = 8 \\ 4 \cdot (6) + 7 = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6 + 14 = 8 \\ 24 + 7 = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 20 = 8 \\ 31 = 11 \end{cases}$$

Portanto, a mera substituição é uma hipótese fraca sobre o método utilizado. Nossa hipótese é a de que os estudantes desconsideraram a unidade significativa  $y$  da primeira linha do sistema e a unidade significativa  $x$  da segunda linha do sistema.

$$\begin{cases} x + 2 = 8 \\ 4 + y = 11 \end{cases}$$

Nessa situação, a solução do sistema linear é obtida de forma quase trivial, porque, através da eliminação das incógnitas, esse novo sistema tem como solução o par ordenado (6,7). Podemos relacionar essa interpretação das unidades significativas em prol da redução da complexidade do sistema com a situação já discutida no sistema em registro pictórico, em que os estudantes consideraram a unidade significativa banana como um cacho e reduziram assim o nível de dificuldade do sistema.

Finalmente, o desempenho de E<sub>66</sub> nos chamou atenção. Além de resolver corretamente os três exercícios, E<sub>66</sub> constatou que os sistemas consistiam em sistemas lineares cada qual em um registro, afirmando que as três questões apresentadas eram conceitualmente iguais.

Pesquisador – Qual foi a primeira frase que tu disseste quando você se deparou com os 3 sistemas?

E<sub>66</sub> – Que os 3 são iguais.

Pesquisador – Iguais no quê?

E<sub>66</sub> – Todos tem a mesma forma de resolver.

Após a gravação da entrevista, E<sub>66</sub> afirmou que preferiu utilizar o método de tentativa e erro, pois acreditava que obteria rapidamente os resultados. Indagado sobre qual estratégia ele utilizaria caso não obtivesse sucesso com esse método, afirmou que utilizaria “as regras de sistemas lineares”. O estudante afirmou que o método de tentativa e erro foi escolhido, porque ele presumiu que as questões e as opções de solução eram simples, de forma que não “valeria a pena” – leia-se, não era relevante – mobilizar recursos e técnicas mais complexas.

Gabaritando as questões e resolvendo-as do registro em língua natural ao pictórico, esse comportamento é digno de nota, porque revela que ele está consciente não somente da possibilidade de um mesmo sistema poder ser expresso em diferentes registros, mas também da pertinência de operar com métodos mais potentes apenas se o nível de dificuldade do sistema exigisse, fornecendo um contraponto com todos os demais colegas.

Analisadas as evidências, seguimos para as considerações finais de nosso trabalho.



#### 4. DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Motivados pelo sucesso como desafios envolvendo sistemas lineares possíveis e determinados se disseminam na internet, analisamos os efeitos dos registros algébrico, pictórico e linguístico nas estratégias de resolução desses sistemas por estudantes do primeiro ano do Ensino Médio. Para isso, mobilizando as noções teóricas de registros de representação semiótica, relevância e conciliação de metas, elaboramos um estudo exploratório em duas etapas. Na primeira etapa, os estudantes resolveram três sistemas apresentados nesses diferentes registros em um aplicativo especialmente projetado para esse fim. Em seguida, rodamos um protocolo verbal retrospectivo com o qual solicitamos a verbalização dos processos cognitivos e das razões de preferências por determinada ordem de resolução.

O estudo lançou duas hipóteses concorrentes. Conforme a primeira hipótese, assumindo que os estudantes estão habilitados a operar com métodos formais de resolução, eles deveriam preferir resolver primeiro o sistema em registro algébrico, visto que não demandaria por conversão. Dado que essa hipótese presume a mobilização de métodos formais e isso não parece ser o caso em soluções espontâneas de sistemas similares na internet, a hipótese rival foi a de que eles resolveriam primeiro os sistemas pictográfico e linguístico.

Em síntese, as evidências sugerem predileção pelos registros pictórico e linguístico, desempenho superior nesses registros, ainda que insuficiente, e mobilização abdução de estratégias menos que formais com diferentes níveis de desempenho de conhecimentos matemáticos, incluindo soluções *ad hoc* criativas. Ademais, conforme a noção de relevância ótima, não apenas a compreensão de sistemas é afetada por preferências e habilidades do intérprete, mas, sobretudo, a mobilização proativa de hipóteses de solução.

A despeito de sistemas “pictóricos” não serem exclusivamente pictóricos, pois mimetizam sistemas de equações, os resultados sugerem que interpretar quantidades de figuras com algum conteúdo semântico/pragmático é supostamente mais fácil do que interpretar quantidades de variáveis sintáticas. Contudo, dada a presença expressiva de erros que encontramos, isso não redundou em acertos. Sistemas no mapeamento de unidades significativas foram especialmente sentidos na interpretação do sistema pictórico que selecionamos. Alguns estudantes mapearam bananas como “cachos de bananas”, reduzindo a complexidade do sistema linear em pauta. Como essa interpretação prevaleceu sobre a interpretação-alvo, acabamos por prover uma armadilha involuntária nesse sistema.

O sistema apresentado em língua natural apresentou alta adesão nas escolhas primária e secundária. Se, de um lado, trata-se de uma forma comum de apresentar sistemas na escola,

pois a tentativa de contextualizar sistemas com pequenos textos é uma estratégia comum desde os anos iniciais do Ensino Fundamental; de outro, essa forma de exposição das questões demanda por conversão para ser parametrizada num sistema de equações, diminuindo sua relevância. As evidências sugerem que, a despeito dos custos de interpretação, o sistema nesse tipo de registro foi preferido e a frequência de acertos foi maior. Parte desse sucesso se explica porque o sistema em língua natural favoreceu estratégia *ad hoc* criativa de desenhar cabeças representando os animais do quintal e distribuir pares de patas até serem definidos o número de coelhos e galinhas. Essa estratégia, como argumentamos, demandou por uma conversão exitosa da língua natural para uma representação pictórica.

Marcus (2010) defende que, diante de desafios, os seres humanos geram kluges<sup>7</sup> ou soluções criativas que acabam por esmaecer soluções alternativas. A noção de relevância explica como ocorre esse processo, pois a primeira suposição que satisfaz a presunção de relevância ótima é a que prevalece, impedindo a emergência de suposições rivais.

Os resultados do sistema algébrico sugerem ausência de métodos formais de resolução como hipótese abductiva antifactual ótima nos planos de ação intencional de estudantes que, em tese, seriam capazes de mobilizá-los. Somente três estudantes resolvem corretamente esse sistema, todos mobilizando estratégias de tentativa e erro.

Em síntese, prevaleceu na resolução de todos os sistemas a mobilização de estratégias de tentativa e erro com as quais os estudantes propunham sucessivas hipóteses de valores para uma das incógnitas, descobriam o valor da outra incógnita e checavam se esses valores satisfaziam as duas equações (por vezes, somente uma delas, sugerindo problemas com o conceito mesmo de sistema de equações). Em outras palavras, diante sistemas matemáticos que demandariam por conversões para o registro algébrico para um tratamento ótimo, os estudantes abduziram estratégias *ad hoc* que priorizavam tratamentos não formais.

Apesar da consistência desses resultados, vale mencionar que eles devem ser tomados no contexto de um estudo qualitativo exploratório com uma série de condições e limitações. O estudo contém sistemas similares àqueles encontrados na internet, salvo no que diz respeito a armadilhas de difícil conversão para os demais registros. Assim, os sistemas requerem soluções mais simples que podem ter favorecido estratégias *ad hoc* e, entre elas, as de tentativa e erro. A presença de uma versão linguística certamente moderou a escolha dos registros. Ademais, a comparação ficou restrita a três sistemas embora similares, diferentes. Certamente, outros seriam os resultados, se comparássemos três trios de sistemas idênticos. Assim, reconhecemos

---

<sup>7</sup> Em português as expressões mais aproximadas seriam “quebra-galho” ou “gambiarra”. Marcus (2010, p.13) considera *kluges* como soluções desajeitadas e deselegantes, ainda que eficazes, para um sistema.

que os sistemas escolhidos condicionaram os comportamentos. De fato, estratégias distributivas aumentaram o desempenho dos estudantes no sistema em língua natural, e a ambiguidade entre bananas individuais e cachos de bananas diminuiu o desempenho dos estudantes na versão pictórica. Por hipótese, sendo maiores as quantidades de sistemas e de escolhas, menores seriam as intercorrências de aspectos semânticos e pragmáticos específicos de cada sistema nos resultados. Enfim, quaisquer que fossem as mudanças no desenho do estudo, outros aspectos poderiam ser explorados e outras perguntas poderiam ser lançadas. Finalmente, cabe ressaltar que os resultados obtidos no estudo são condicionados aos critérios de escolha do público-alvo. Presumivelmente, dado que cada critério de escolha ilumina distintas características a serem analisadas, outros públicos poderiam demonstrar predileções distintas e utilizar outros recursos.

Sejam quais forem os encaminhamentos, vale reconhecer do ponto de vista metodológico que esse estudo reforça a pertinência da interface entre os conceitos de registros de representação semiótica, relevância e conciliação de metas para descrever e explicar fenômenos pragmático-cognitivos de interpretação no ensino e aprendizagem de matemática.

## REFERÊNCIAS

DANTE, L. R. **Teláris matemática**. 8º ano: ensino fundamental, anos finais. 3. ed. São Paulo: Ática, 2018.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (org.). **Aprendizagem da compreensão em matemática**: registros de representação semiótica. 4. ed. Campinas: Papirus, 2003. p. 11-33.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano**: registros semióticos e aprendizagens intelectuais. Trad. de Lênio Fernandes Levy. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

DUVAL, R. **Ver e ensinar a matemática de outra forma**: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. São Paulo: PROEM, 2011.

DUVAL, R.; MORETTI, M. T. (Trad.). Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Registes de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. **Revemat**: Revista Eletrônica de Educação Matemática, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266-297, dez. 2012. Disponível em: <https://bit.ly/2ZjytzE>. Acesso em: 1 jun. 2019.

ERICSSON, K. A.; SIMON, H. A. **Protocol Analysis**: Verbal Reports as Data. Cambridge: MIT Press, 1993.

JASPERS, M. W. M.; STEEN, T.; VAN DEN BOS, C.; GEENEN, M. The think aloud method: a guide to user interface design. **International Journal of Medical Informatics**, v. 73, p. 781-795, 2004.

MARCUS, G. **Kluge**: a construção desordenada da mente humana. Campinas: Ed. da Unicamp, 2010.

MELO, G. R. de. **Análise pragmático-cognitiva de efeitos do registro de representação semiótica na resolução de sistemas lineares por estudantes do ensino médio**. 2020. 120 f. Dissertação (Mestrado em Ciências da Linguagem) – Universidade do Sul de Santa Catarina. Tubarão, 2020.

RAUEN, F. J. For a Goal Conciliation Theory: Ante-Factual Abductive Hypotheses and Proactive Modelling. **Linguagem em (Dis)curso**, Tubarão, v. 14, n. 13, p. 188-204, set./dez. 2014.

RAUEN, F. J. **Roteiros de iniciação científica**: os primeiros passos da pesquisa científica, desde a concepção, até a produção e a apresentação. Palhoça: Ed. da Unisul, 2015.

SPERBER, D.; WILSON, D. **Relevance**: Communication & Cognition. 2nd. ed. Oxford: Blackwell, 1995. [1st. ed. 1986].

## **FONTES FINANCIADORAS**

Guilherme Rossi de Melo agradece ao Instituto Federal de Santa Catarina, pela dispensa das atividades para realização de seu mestrado e à Fundação de Pessoal do Ensino Superior pela concessão de bolsa PROSUC. Fábio José Rauen agradece ao Instituto Ânima pela Bolsa de Produtividade em Pesquisa.