RECEM
Revista Catarinense de Educação Matemática
ISSN 2965-0267

Sobre o livro "Semiose e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagem intelectual" de Raymond Duval – estudo hermenêutico do Capítulo IV[1]

About the book «Semiosis and human thought: semiotic records and intellectual learning» by Raymond Duval – hermeneutic study of Chapter IV

Sobre el libro «Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales» de Raymond Duval – estudio hermenéutico del Capítulo IV

DOI: 10.37001/recem.v5i6.4692

Recebimento: 08/08/2025
Aprovação: 25/03/2026
Publicação: 06/04/2026

Adalberto CANS
Doutor em Educação Científica e Tecnológica/UFSC
Secretaria de Estado da Educação de Rondônia
Porto Velho, Brasil
Adalbertocns12@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-7580-6373

Adriano MOSER
Mestre em Educação Matemática/UDESC
Secretaria de Estado da Educação de Santa Catarina
Balneário Piçarras, Brasil
moseradrianomtm@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-6440-7801

Méricles T. MORETTI
Doutor em Educação Matemática - Universidade de Estrasburgo, França
Universidade Federal de Santa Catarina
Florianópolis, Brasil
mthmoretti@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-3710-9873

Resumo: O texto que segue resulta de um estudo hermenêutico do Capítulo IV, intitulado "Figuras Geométricas e Discurso Matemático", do livro "*Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissage intellectuels*" de Raymond Duval. Obra publicada inicialmente em francês, em 1995, e republicado em 2004, em sua primeira versão em espanhol. O que se pretendeu foi evidenciar os tratamentos figurais e discursivos necessários à atividade cognitiva requerida na aprendizagem da geometria, à luz teoria semiocognitiva de Duval. A singularidade dos processos em geometria, apontada pelo próprio autor, quando estes são comparados a outras atividades matemáticas, é a base da discussão desse capítulo e a problemática que orientou o estudo. Uma vez que, de fato, a geometria trabalha de forma simultânea e interativa com o registro das figuras e o registro da língua natural.

[1] Este artigo faz parte de um conjunto de textos que estão sendo produzidos acerca da obra "Semiose e Pensamento Humano" de Raymond Duval e serão publicados ao longo desde ano na RECEM. Cada artigo irá discutir um dos capítulos da obra para que juntos possam ser um guia de estudos da teoria de Duval. Estes textos são oriundos do grupo de pesquisa GPEEM/UFSC.

Palavras-chave: Estudo Hermenêutico. Figuras Geométricas. Discurso Matemático. Aprendizagem da Geometria. Aprendizagem da Matemática.

Abstract: The following text is the result of a hermeneutic study of Chapter IV, entitled “Geometric Figures and Mathematical Discourse”, contained in the book “*Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissage intellectuels*” by Raymond Duval. This work was initially published in French in 1995 and republished in 2004, in its first Spanish verson. The aim of this study was to highlight the figural and discursive treatments necessary for the cognitive activity required for learning geometry, according to Duval's semiocognitive theory. The uniqueness of the processes in geometry, pointed out by the author himself, when compared to other mathematical activities, is the basis of this chapter and the problem that guided the study. Since, in fact, geometry works simultaneously and interactively with the recording of figures and the recording of natural language.

Keywords: Hermeneutic Study. Geometric Figures. Mathematical Discouse. Learning Geomettry. Learning Mathematics.

Resumen: El siguiente texto es el resultado de un estudio hermenéutico del Capítulo IV, titulado “Figuras Geométricas y Discurso Matemático”, del libro “*Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissage intellectuels*” de Raymond Duval. Esta obra se publicó inicialmente en francés en 1995 y se republicó en 2004, en su primera versión en español. El objetivo de este estudio fue destacar los tratamientos figurales y discursivos necesarios para la actividad cognitiva requerida para el aprendizaje de la geometría, según la teoría semiocognitiva de Duval. La unicidad de los procesos en geometría, destacada por el propio autor, al compararlos con otras actividades matemáticas es la base de la discución de este capítulo y el problema que guió el estudio. Ya que, de hecho, la geometría trabaja de forma simultánea e interactiva con el registro de figuras y el registro de lenguage natural.

Palabras Clave: Estudio Hermenéutico. Figuras Geométricas. Discurso Matemático. Aprendizaje de Geometría. Aprendizaje de Matemáticas.

INTRODUÇÃO

É da essência ontológica da geometria, o entrelace entre as representações figurais ou figuras geométricas e a linguagem natural ou discurso matemático. Uma dinâmica que exige de quem se dispõe a apreender geometria habilidades específicas, que demandam um treinamento dirigido. Isso deve acontecer para que essas habilidades sejam incorporadas aos gestos cognitivos responsáveis pela expansão do nosso saber. Duval (1995, 2004) em seu livro, “*Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intelectuels*”, traz à reflexão as especificidades da aprendizagem da matemática a partir de uma perspectiva semiocognitiva. Nessa publicação, o autor dedica o Capítulo IV[2] para evidenciar o fato de que a aprendizagem da geometria, de todos os saberes matemáticos, é o de maior custo cognitivo, uma vez que exige atividades semiocognitivas em distintos registros de representação, entre

[2] Capítulo IV, “*Figures géométriques et discours mathématique*”, Duval (1995, p. 173 - 207) versão em francês, e “*Figuras geométricas y discurso matemático*” Duval (2004, p. 155–183), primeira versão em espanhol.

eles podemos citar, principalmente, a linguagem natural e as figuras geométricas. Desta forma, o capítulo sobre a aprendizagem da geometria trata dessa complexidade.

Para o autor a abordagem didática para se ensinar a geometria deve considerar a forte dependência de dois registros semióticos: i) por meio da língua natural enuncia-se as definições, os teoremas, as hipóteses, enfim, este registro semiótico permite reconhecer, mesmo que de forma parcial, os objetos geométricos definidos na proposta didática; ii) por outra parte, o registro das figuras geométricas, através de suas representações figurais, permitem a designação das figuras, o reconhecimento de suas propriedades qualitativas (paralelismo, perpendicularismo, angularidade etc.) e os possíveis tratamentos.

No entanto, Duval (1995, 2004) alerta para as graves rupturas de aprendizagem decorrentes da incompreensão do quanto a dualidade do acesso aos objetos geométricos exige cognitivamente do estudante, quando se contempla um problema de natureza geométrica. De acordo com o autor "a atividade cognitiva que requer a geometria é mais exigente, posto que, os tratamentos efetuados de forma separada e alternativamente em cada um dos registros não são suficientes para que esse processo chegue a algum resultado: é necessário que se efetuem simultaneamente e de maneira interativa transformações figurais e discursivas" (DUVAL, 1995, p. 173; 2004, p. 155). Desse modo as seções deste artigo seguem a estrutura do capítulo estudado.

1 A PRIMEIRA BARREIRA NA APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA

Em geral, a aprendizagem da geometria, por desconhecimento das exigências cognitivas que essa modalidade de conhecimento requer, conduz os tratamentos dos registros semióticos utilizadas no ambiente escolar, sejam eles discursivos ou figurais, pelo mesmo viés cognitivo utilizado de forma natural, ou seja, respectivamente, comunicação direta e percepção visual. De forma alguma, essa conduta comum nas escolas, configurará uma capacidade de compreensão significativa diante de um problema de geometria. Para Duval, o resultado disso é o fenômeno de **falsa proximidade entre os tratamentos** que são naturais em cada um destes dois registros e aqueles que realmente a atividade matemática exige (DUVAL, 1995, p, 174; 2004, p. 156).

De fato, diante de uma figura geométrica, por exemplo, a apreensão visual ou apreensão perceptiva inicial tende a operar segundo os princípios da *Gestalt* ou Teoria da forma[3], buscando de imediato o reconhecimento global da figura e a minimização do esforço cognitivo,

[3] Para estudo, a teoria da *Gestalt* encontra-se detalhada em Gomes Filho, J. **Gestalt do objeto**: sistema de leitura visual da forma. 8 ed. São Paulo: Escrituras, 2008.

reduzindo, consequentemente, a identificação de elementos cruciais, determinantes para o processo de compreensão do problema geométrico que a imagem compõe. De modo semelhante, o registro discursivo, em matemática, embora possua um vocabulário próprio e especializado, é seguidor das mesmas regras da linguagem comum onde algumas expressões matemáticas também são utilizadas para comunicação em outros meios.

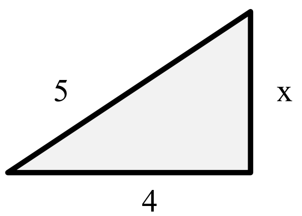
Para Duval (1995, p. 174; 2004, p. 156) essa proximidade entre os tratamentos naturais dos registros semióticos quando utilizados em outras áreas e o modo de utilização requerido no âmbito da aprendizagem matemática – **fenômeno da falsa proximidade**, associado a **necessária coordenação** entre os tratamentos que provém do registro figural e os que provém do registro discursivo, revelam os desafios para se aprender geometria.

Em outras palavras, Duval afirma que as dificuldades de aprendizagem em geometria, originam-se da falta de conhecimento de operações semiocognitivas, enunciadas mais adiante, e que para superá-las é crucial ter consciência de que a interpretação correta de problemas geométricos depende da conversão e coordenação entre os registros figural e discursivo. Falhas nessa sincronização podem levar a soluções equivocadas e sem fundamento conceitual.

Para esclarecer esse ponto, tomemos o problema proposto por Mello (1999, p. 65), um caso clássico de que sem a adequação de nossas habilidades de reconhecimento e gerenciamento das informações inseridas no conjunto enunciado-imagem, o entendimento parcial subsidiará todo o processo resolutivo, acarretando resultados inadequados como no exemplo a seguir.

Calcule os valores possíveis de x, na Figura 1, dados os comprimentos na mesma unidade de medida:

Figura 1 – Triângulo qualquer



Fonte: Mello, 1999, p. 65

É óbvio que a disposição visual da figura é automaticamente indutiva à aplicação do teorema de Pitágoras por parte dos estudantes. A imagem de um triângulo, aparentemente retângulo, com lados horizontal e vertical, em associação com os valores x, 4 e 5 remetendo à tríade pitagórica 3, 4 e 5, exerce forte influência sobre o raciocínio. Em outros termos, a percepção visual da figura, descaracterizando o sincronismo eficiente entre os registros figurais e discursivos, se sobrepõe à análise textual do problema "Calcule os valores **possíveis** de x na figura...", resultando na negligência da resposta à questão proposta, pela maioria dos estudantes.

A decisão por utilizar o teorema de Pitágoras, nesse caso em particular, não caracteriza uma falha conceitual inicialmente, mas se associarmos a motivação pelo uso sendo predominante oriunda somente da percepção do registro figural, não restará dúvida de que:

> entre as principais fontes de dificuldade na aprendizagem da geometria, não vem em primeiro lugar os conceitos, mas sim o parasitismo produzido pela proximidade de tratamentos relevantes e não relevantes praticados no interior de um mesmo registro, bem como da ausência de coordenação entre os tratamentos que provém de registros diferentes (DUVAL, 1995, p. 174; 2004, p. 156).

Com efeito, Duval (1995, 2004) destaca o papel central das representações semióticas no processo de ensino e aprendizagem da matemática e argumenta que, qualquer abordagem para a aprendizagem da geometria demanda a capacidade de tratar um mesmo objeto matemático tanto no interior de um registro quanto entre diferentes registros semióticos. Sob essa perspectiva, torna-se fundamental reconhecer que em cada registro semiótico existem unidades elementares ou unidades significantes, que possibilitam o estabelecimento de conexões conceituais entre os registros figural e discursivo. A explicitação dessas unidades e dos tratamentos que as interligam revela-se crucial para a compreensão do processo de resolução de problemas em geometria.

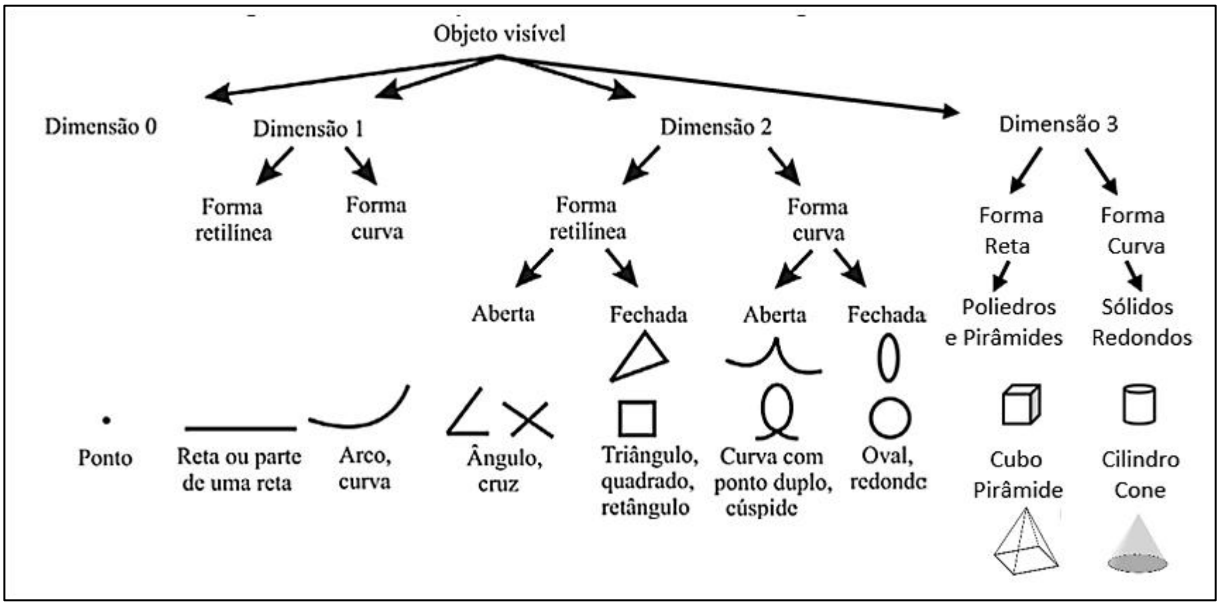
2 AS UNIDADES CONSTITUTIVAS DE UMA FIGURA GEOMÉTRICA

É característico de uma figura geométrica permitir modificações sobre seus elementos constitutivos (pontos, retas e planos) uma característica de grande relevância e que norteia as inferências de tratamento para resolução de problemas no registro figural. Contudo, enxergar essas modificações constitui-se um grande desafio para a percepção visual, uma vez que, somos induzidos a utilizar as leis psicológicas da *Gestalt*, principalmente, da continuidade e do fechamento e, nesse sentido, a figura geométrica é vista de forma icônica, intocável, acarretando uma ação heurística reduzida e muitas vezes insuficiente ou mesmo anulada.

Ao discorrer a respeito do ato de "ver", Duval (2005, 2022)[4] afirma que é preciso executar duas ações totalmente distintas e independentes, todavia, de forma sincrônica, ou seja, cognitivamente a nossa percepção precisa **discriminar as formas geométricas** e **identificar todos os objetos** correspondentes as formas reconhecidas, um retângulo pode ser identificado, por exemplo, por dois triângulos retângulos, por seus lados, suas retas suportes, seus vértices etc. A percepção icônica opera restritivamente no reconhecimento da forma, assim como ocorre com o reconhecimento dos objetos à nossa volta. Assim, um dos fatores necessários para expandir a capacidade interpretativa, a partir de um estímulo visual, é ser capaz de identificar as unidades elementares da figura dentro do contexto geométrico em que ela está inserida.

A seguir, na Figura 2, expomos segundo Duval uma classificação sistemática dessas unidades figurais elementares (0D, 1D e 2D), oportunamente inserimos também modelos tridimensionais.

Figura 2 – Unidade elementares na geometria destacadas de modelos 3D



Fonte: a partir de Duval, 1995, p. 177; 2004, p. 159

Duval afirma que "para criar uma figura ou um gráfico é necessário que haja um contraste sobre um suporte material homogêneo (folha de papel, tela de vídeo ...), para que se destaque algo identificável em tal campo perceptível" (DUVAL, 1995, p. 175; 2004, p. 157). Dito de outro modo, tudo que reconhecemos a partir da percepção visual de uma figura ocorre

[4] Ressaltamos que, além do livro base "*Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissage intellectuels*", Duval complementa sua teoria em outros livros e artigos científicos. Assim, essa hermenêutica procura ver a teoria de Duval por uma lente ampliada em suas produções.

em função da descontinuidade ordenada de estímulos, que modula algumas variações visuais. Para o autor, essas variações permitem definir os elementos constitutivos de uma figura: "toda figura aparece como uma combinação de valores para cada uma das variações visuais destes dois tipos, **dimensional** e **qualitativa**" (DUVAL, 1995, p. 175; 2004, p. 157). Como compilado no Quadro 1.

Quadro 1 – Elementos visuais dimensionais e qualitativos associados ao registro figural

Tipos de variações visuais		
Variação dimensional	Associa-se a dimensão em que o objeto geométrico está definido	Dimensão 0 – ponto Dimensão 1 – linha Dimensão 2 – superfície Dimensão 3 – espaço definido
Variação qualitativa	Vincula-se ao aspecto visual do registro figural	Variação de forma – linha reta, curva ou mista; linha aberta ou fechada; representação estrutural ou maciça de um sólido geométrico Variação de tamanho – maior ou menor, ampliação ou redução Variação de orientação - com relação ao plano frontoparalelo Variação de granulação – linha cheia, pontilhada, tracejada, negrito etc. Variação de cor

Fonte: a partir de Duval, 1995, p. 175; 2004, p. 157

A distinção entre as variações visuais dimensional e qualitativa estabelece os alicerces para a identificação dos elementos constitutivos de uma figura. No entanto, é importante destacar que conceitualmente conhecemos as figuras por sua dimensão, caracterizando assim a forte influência da variação do tipo dimensional, já quanto as variações qualitativas, essas possuem apenas um papel auxiliar no reconhecimento, por exemplo, na perspectiva de um prisma sobre um plano, a variação da espessura ou do tipo de linha (pontilhada, tracejada) assumiria o papel de declarar melhor a ideia de tridimensionalidade em uma superfície plana, assim como uma variação de cor (DUVAL, 1995, 2004).

Além disso, discriminar as unidades geométricas de base a partir de um registro figural e suas possíveis variações visuais (dimensional e qualitativa) exigirá uma conduta treinada do agente, de modo a direcionar o reconhecimento para elementos da imagem que naturalmente seriam negligenciados, visto que, inicialmente nosso sensoriamento visual psicologicamente busca o menor custo cognitivo, lançando-se sobre princípios gestálticos, em particular do fechamento e da continuidade, conduzindo apenas a um reconhecimento global da imagem. “Assim, um quadrado é percebido como uma única figura e não como a reunião de quatro segmento opostos de dois em dois” (DUVAL, 1995, p. 176; 2004, p. 158).

Portanto, nossa percepção visual sobre qualquer imagem de natureza geométrica, além de não ser sensibilizada de imediato por representações de objetos de dimensão 1 ou 0, relevantes para compreensão de seu conteúdo, mostra-se insuficiente para inspirar um raciocínio resolutivo eficaz, dado que, nenhuma imagem pode, por si só, representar um contexto geométrico completo: o simples desenho de um triângulo, por exemplo, não informa se seus lados são congruentes ou se um de seus ângulos é reto, sem um registro discursivo adicional.

O que nos leva a reconhecer o importante papel, muitas vezes negligenciado, do registro discursivo, este por sua vez legenda qualquer ilustração geométrica delatando definições, teoremas e propriedades, em virtude de estar alicerçado, majoritariamente, em unidades geométricas de dimensão 1 ou 0 e suas variações qualitativas. Ou seja, estes registros isoladamente não constituem uma base de entendimento capaz de mobilizar um processo de resolução. Já em sincronia, criam condições que tornam possíveis o reconhecimento das formas de maneira discriminativa, portanto, um pré-requisito para a aprendizagem da geometria (DUVAL, 2022). Quer dizer, a sincronia cria condições para que se extraia o máximo do potencial heurístico de uma figura, ampliando assim a certeza de que a solução identificada possui legitimidade matemática.

3 OS TRATAMENTOS PRÓPRIOS DO REGISTRO DAS FIGURAS GEOMÉTRICAS

Entre estudiosos “é comum admitir que as figuras formam um importante suporte intuitivo para as atividades em geometria: deixam ver muito mais do que os enunciados dizem, permitem explorar, antecipar... Permitem, na resolução de um problema ou na busca de uma demonstração, aquela conduta que Peirce descreveu sob o termo ‘abdução’” (DUVAL, 1995, p. 180; 2004, p. 161). Contudo, o papel semiótico da figura não está associado somente a sua capacidade de sustentar a atenção quando comparada ao registro discursivo que compõe o enunciado, mas também ao seu potencial de revelação heurística. Dito de outro modo, uma figura geométrica instiga a abdução, que consiste em “limitar inicialmente a classe de hipóteses ou de alternativas que devem ser consideradas: portanto, inicialmente, a figura deve evitar a exploração de todos os caminhos possíveis, capitando a atenção somente sobre aqueles suscetíveis a conduzir a uma solução ou sobre aquelas que já levaram a ela" (DUVAL, 1995, p. 180-181; 2004, p. 161).

Tratamentos específicos sobre a representação de um objeto geométrico, podem excluir de forma permanente qualquer possibilidade de a representação figural assumir um papel acessório, além disso, é o processo intelectual de abdução que vai subsidiar, através de uma expansão discursiva a dedução, legitimando a solução encontrada. Contudo, o autor afirma que para compreender como atua a conduta de abdução sobre figuras geométricas, dois níveis de apreensão precisam ser distinguidos:

> um primeiro nível em que se opera o reconhecimento das diferentes unidades figurais discerníveis em uma figura dada, e um segundo nível em que se efetuam as modificações possíveis das relações das partes com o todo (ópticas ou posicionais) das unidades figurais reconhecidas e da figura dada. O primeiro nível corresponde ao que classicamente se entende e se denomina "percepção"; se podia, então, chamar de apreensão gestáltica. O segundo nível corresponde a uma apreensão operatória das figuras (DUVAL, 1995, p. 181-182; 2004, p. 162).

Por outro lado, a maneira de ver e operar sobre uma figura geométrica está relacionada, principalmente, ao tipo de atividade solicitada. Para as tarefas mais simples associadas ao reconhecimento da forma e a identificação de medidas, ou seja, apenas uma percepção global, ocorre a apreensão perceptiva atendendo ao primeiro nível de apreensão sobre a figura, que se configuram a partir dos **olhares icônicos** do botanista e do agrimensor. Já as tarefas que exigem maior interação com o estatuto do objeto geométrico representado, interação essa efetivada por meio de tratamentos sobre o registro figural, correspondem ao segundo nível de apreensão – a apreensão operatória, que se valendo de gestos cognitivos específicos vão subsidiar-se dos **olhares não icônicos** do construtor e do inventor (DUVAL, 1995, 2004, 2022). De forma resumida o autor apresenta, no Quadro 2, esses olhares.

Quadro 2 – Quatro entradas clássicas na geometria

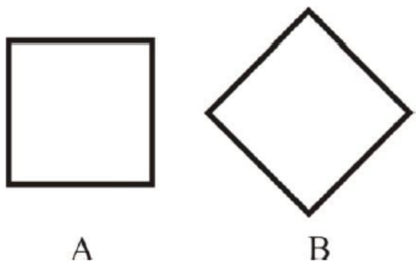
	BOTÂNICO	AGRIMENSOR-geômetra	CONSTRUTOR	INVENTOR-faz-tudo
1. Tipo de operação nas **FORMAS VISUAIS**, exigida para a atividade proposta	Reconhecer as formas a partir das qualificações visuais do contorno: **UMA forma particular é privilegiada como TÍPICA**	Medir as bordas de uma superfície: **em um TERRENO ou em um DESENHO (variação de escala de grandeza e consequentemente do procedimento de medida)**	**Decompor uma forma em traços construtíveis com a ajuda de um instrumento.** É preciso (frequentemente) passar de **TRAÇOS AUXILIARES** que não pertencem a figura “final”.	**Transformar formas, umas em outras.** Deve-se adicionar **TRAÇOS REORGANIZADORES** na figura final para iniciar as transformações
2. Como as **PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS** são mobilizadas **em relação ao tipo de operação**	**Sem ligações entre as diferentes propriedades (não há definição matemática possível)**	As propriedades **são dos critérios de escolha** para as medidas a fazer. Elas só são uteis se remetem a uma fórmula permitindo um cálculo	Como **restrições de uma ordem de construção.** Certas propriedades são obtidas por **uma única operação de traçagem,** as outras exigem várias operações	Implicitamente por enviar a uma rede mais complexa (uma trama de retas para a geometria plana ou uma trama de intersecções de planos ...) que a figura de partida

Fonte: Duval, 2022, p. 07

O olhar do botanista, como denominado no Quadro 2, segue um modelo simples de reconhecimento figural, ao ponto que o autor afirma: “na realidade esse tipo de atividade não tem nada de atividade geométrica. Ela parece geométrica apenas na medida que se refere às formas ditas ‘euclidianas’. Mas o mesmo trabalho de observação poderia (e deveria) ser feito em folhas de árvores” (Duval, 2022, p. 7).

Qualquer figura perante esse olhar se resume a uma imagem estática e destituída de seu potencial heurístico, o que fragiliza o seu reconhecimento. Para não nos furtamos de um exemplo trazemos, na Figura 3, um exemplo do quanto esse olhar pode ser insuficiente.

Figura 3 – Quadrado em duas posições diferentes



Fonte: Moretti, 2013, p. 291

Ao apresentar como exemplo a figura do quadrado tradicionalmente utilizada nos meios didáticos (Figura 3A) e uma representação não tradicional (Figura 3B), Moretti (2013) traz à reflexão o fato de que, embora seja o mesmo objeto representado, o reconhecimento da Figura 3B possui um custo cognitivo muito maior quando comparada a Figura 3A e que, em função da superficialidade com que o olhar botanista contempla a imagem, pode até não se reconhecer nas figuras a representação do mesmo objeto geométrico. Não vamos aqui nos ater aos demais olhares, sugerimos para maiores esclarecimentos a leitura de Duval (2022).

3.1 O reconhecimento das unidades figurais de dimensão 2 em uma figura geométrica

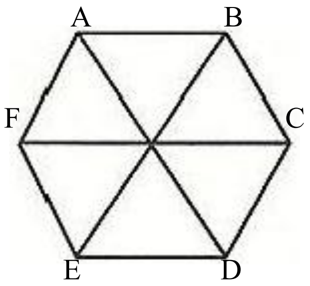
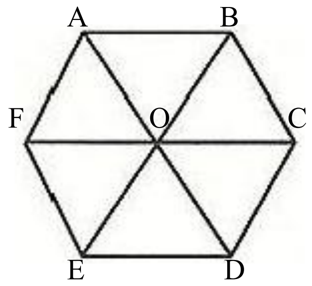
A partir da seção anterior podemos assumir que o raciocínio geométrico tem como inspiração a leitura de uma imagem, construída ou simplesmente mentalizada. Nesse contexto, o registro figural, a depender da exigência da tarefa, pode assumir uma postura estática (icônica) ou dinâmica (não icônica). Dizendo de outra forma, uma imagem pode ser contemplada a partir de uma apreensão perceptiva ou de uma apreensão operatória (DUVAL, 1995, p. 182; 2004, p. 162-163).

Com efeito, ao analisarmos uma figura geométrica, há de fato uma predominância das unidades de dimensão 2 sobre as unidades de dimensões inferiores, explicada pelas leis gestálticas de fechamento ou de continuidade (DUVAL, 1995, p. 175; 2004, p. 158). Quando as unidades figurais de dimensão 2 estão separadas seu reconhecimento traz pouca ou nenhuma dificuldade. No entanto, unidades figurais 2D justapostas ou sobrepostas sobrecarregam o olhar, ou seja, ampliam o desafio, exigindo maior atenção em seu momento de estudo. Para o autor:

> Não é a mesma coisa quando essas unidades estão integradas em uma configuração. E isso, por dois motivos diferentes. Em primeiro lugar, certas unidades figurais de dimensão 2 predominam sobre outras unidades também de dimensão 2, de acordo com a lei gestáltica de fechamento. Em segundo lugar, uma figura geométrica contém, frequentemente, mais unidades figurais elementares do que as necessárias para construí-la (DUVAL, 1995, p. 182; 2004, p. 162-163).

Apresentamos a seguir, na Figura 4, um problema onde se verifica justamente o que se quer dizer: como transformar o hexágono regular *ABCDEF* em um único paralelogramo (Versão 1).

Figura 4 – Sobreposição e justaposição de figuras bidimensionais

Versão 1	Versão 2
	

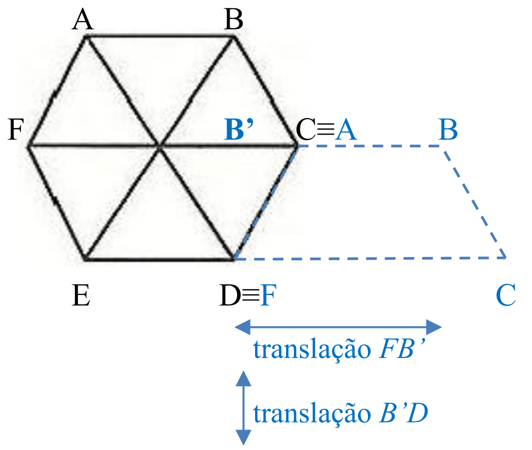
Fonte: os autores

A figura destaca 9 unidades figurais de dimensão 1 (segmentos, 6 lados e 3 diagonais), estas são as unidades que se deve ter em conta para construir a figura. Porém esta figura comporta também, 11 unidades figurais de dimensão 2 (triângulos, paralelogramos, trapézios), além de outras reconfigurações 2D. Estas são as unidades figurais que devem ser tratadas para resolver o problema. Todavia, como se pode observar, estas unidades 2D, pertinentes a resolução do problema, são as menos visíveis em um primeiro golpe de vista.

De fato, em virtude da lei gestáltica de fechamento, esta figura é imediatamente reconhecida como 6 triângulos equiláteros inscritos em um hexágono ou como 6 triângulos equiláteros independentes justapostos. Para se atingir a possibilidade de abdução é necessário neutralizar a organização perceptiva que faz predominar o contorno dos triângulos sobre as demais figuras 2D, e de outra parte, ver unidades figurais separadas que de fato estão parcialmente recobertas pelos triângulos e, portanto, têm partes de seu contorno em comum. Ademais, é pressuposto que o estudante conheça o objeto paralelogramo. Embora pareça óbvio pensar na palavra e no objeto paralelogramo a partir da provocação do enunciado, não se pode considerar que essa coordenação entre os registros língua natural e figuras geométricas seja facilmente alcançada pelo estudante, longe disso (DUVAL, 1995; 2004).

Note que, uma solução possível é o paralelogramo *FBCE*, que se obtém promovendo-se uma translação do trapézio *ABCF* horizontal para direita de módulo *FB’,* seguida de uma translação vertical para baixo de módulo *B’D,* Figura 5.

Figura 5 – Uma solução possível, Versão 1



Fonte: os autores

O mesmo problema pode ser apresentado de outra forma. Por exemplo: considerando *"O"* o centro do hexágono regular *ABCDEF* que incorpora os paralelogramos *ABCO, CDEO* e *EFAO*, transforme o hexágono regular *ABCDEF* em um único paralelogramo (Versão 2).

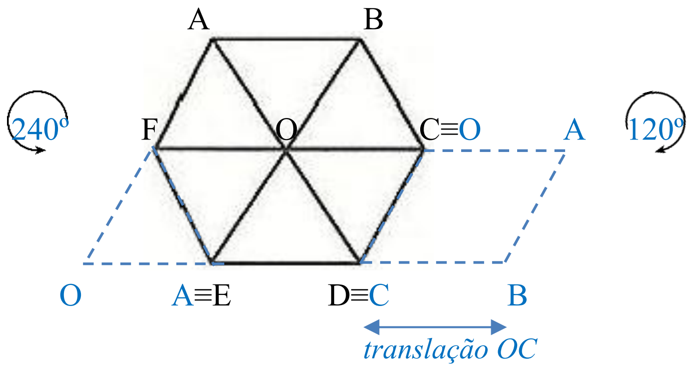
A resolução desta apresentação mobiliza os mesmos conhecimentos exigidos na apresentação anterior. Todavia, se por um lado, destaca-se algumas unidades figurais de dimensão 2 pertinentes a resolução (paralelogramos), que não são imediatamente visíveis, aumentando-se o grau de congruência entre o enunciado e a figura, por outro, não se pode dizer o mesmo dos tratamentos matemáticos que são exigidos para solucionar o problema, posto que, o custo cognitivo para transformar os 3 paralelogramos descritos no enunciado em um único, é muito maior. Quer dizer, a apreensão operatória requisitada para se encontrar uma solução legítima torna-se, do ponto de vista cognitivo, bem mais complexa.

Para reforçar essa conclusão apontamos na Figura 6, em duas etapas, como uma possível solução para a segunda versão do problema, o paralelogramo *FABO* resultante de:

i) uma translação do paralelogramo *ABCO* horizontal para direita de módulo *OC,* seguida de uma rotação horária de 120º sobre o vértice *C;* e

ii) uma rotação anti-horária de 240º do triângulo *AFO* sobre o vértice *F*.

Figura 6 – Uma solução possível para a Versão 2



Fonte: os autores

Como visto, os tratamentos figurais e discursivos são definitivamente importantes para favorecer as descobertas heurísticas, portanto, “não pode haver ensino de geometria que não leve em consideração as diferentes apreensões as quais uma figura dá lugar” (DUVAL, 1995, p. 184; 2004, p. 164).

3.2 A apreensão operatória das modificações possíveis de uma figura geométrica

Quando a intenção é explorar heuristicamente uma configuração geométrica, faz-se necessário um olhar capaz de demonstrar, de forma simultânea, criatividade e legitimidade sobre as modificações realizadas no registro figural. Isto porque, toda figura é geradora de outra, seja por extensão do seu processo de construção ou por reorganização visual das formas já reconhecidas. Ou melhor, toda figura geométrica pode ser decomposta em outra, de forma a reorganizar seu aspecto global, mantendo-se sua originalidade dimensional. Operações como **dividir**, **ampliar, reduzir, movimentar** (por translação ou rotação), são cruciais no trabalho com o registro figural (DUVAL, 1994, 2022).

Qualquer modificação sobre o registro figural, tem sua eficiência alienada ao reconhecimento das formas e dos objetos geométricos que representam, o que implica no reconhecimento simultâneo da teoria exposta no enunciado e dos elementos figurais da imagem, e, nesse instante, a habilidade de **desmontar cognitivamente** a imagem no seu contexto dimensional $(3D \rightarrow 2D \rightarrow 1D \rightarrow 0D)$ é a única forma de justificar as transformações que porventura venham a ser realizadas (DUVAL, 2011).

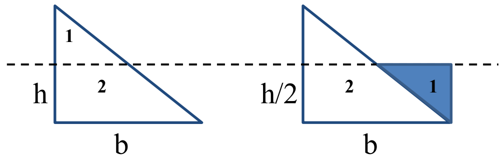
Nesse sentido, Duval aborda, no capítulo aqui interpretado, dois tipos de modificações figurais que subsidiam a apreensão operatória: a **reconfiguração figural** — uma operação que se nutre, majoritariamente, de modificações mereológicas (divisão da figura em subfiguras) que são reorganizadas em outra figura conservando a dimensão original; e a **perspectivação** ou **pôr em perspectiva —** uma operação relacionada a modificações ópticas. Ambas são operações que atuam variando o reconhecimento da configuração geométrica inicial. No entanto, não se pode deixar de abordar outro tipo de modificação figural pertinente a obra de Duval a "**desconstrução dimensional**" — uma operação estritamente cognitiva de suma importância para a aprendizagem da geometria, conforme o próprio autor "ver '*geometricamente'* uma figura é operar uma desconstrução dimensional das formas que reconhecemos imediatamente em outras formas que não enxergamos à primeira vista, e isso sem que nada mude na figura afixada no monitor ou construída no papel" (DUVAL, 2011, p. 87).

A reconfiguração figural consiste na modificação global de uma imagem (figura geométrica) a partir da divisão e reorganização da figura de partida em subfiguras, sem que ocorra mudança dimensional do todo para as partes. Um exemplo didático primoroso é a transformação de um trapézio isósceles em um retângulo, isto é, uma modificação de seu contorno. Essa manipulação é didaticamente mais intuitiva quando o objetivo é a determinação de sua área.

É imperativo destacar, que as modificações figurais que levam a reconfiguração de uma figura podem, inicialmente, parecer um simples jogo de quebra-cabeça, porém, a produtividade heurística proveniente dessas modificações, alcançada a partir do sincronismo com o que enuncia o problema, é fundamental para a aprendizagem da geometria. Historicamente, essa modalidade operacional sobre o registro semiótico das figuras geométricas foi amplamente utilizada como prova para propriedades matemáticas, um exemplo clássico comum aos livros didáticos é a reconfiguração figural aplicada sobre a figura de um quadrado circunscrito a um outro quadrado para a demonstração do teorema de Pitágoras, como pode ser observado em Duval (2011, p. 89, Figura 6).

Outro exemplo simples, mas rico heuristicamente é o cálculo da área de um triângulo de base *b* e altura *h,* a partir da reconfiguração figural mostrada a seguir, considerando conhecida a área do retângulo, Figura 7.

Figura 7 – Aplicação da reconfiguração figural

 $\mathbf{A_T} = A_R = b\ \mathbf{.}\ \mathbf{(}h/2)$	– Operação mereológica, divisão de uma unidade figural 2D convexa (triângulo) em duas unidades figurais 2D (trapézio e triângulo); – Reconfiguração dessas duas unidades em outra unidade figural 2D (retângulo); – Conclusão pela igualdade das áreas.

Fonte: os autores

A segunda operação abordada por Duval é a perspectivação de um cenário geométrico. Essa modificação nos permite julgar a partir de uma superfície plana, a profundidade entre os elementos figurais presentes no desenho, subsidiando a construção de um raciocínio que formaliza uma compreensão geométrica significativa. Contudo, as unidades figurais envolvidas só podem expressar a ideia de proximidade ou de afastamento, se forem de mesma forma e de mesma orientação, podendo variar de tamanho (DUVAL, 1995, p. 186; 2004, p. 166).

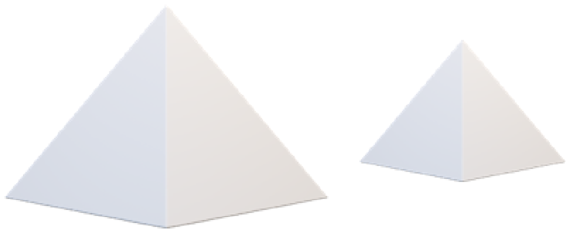
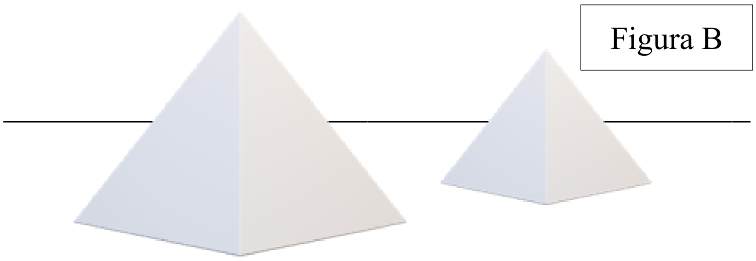
Utilizando os mesmos princípios que regulam nossa percepção imediata, podemos fazer uso da perspectivação em um cenário geométrico, bastando apenas considerarmos uma unidade figural que possa servir como um centro organizador ou podemos dizer, um ponto de fuga, fora do plano do desenho. A definição de um marco perceptível, independentemente do tamanho dos objetos, nos capacita a julgar sua posição relativa em termos de profundidade (DUVAL, 1995, p. 188; 2004, p. 166).

A perspectivação, ao permitir uma percepção aprofundada de uma representação plana, é particularmente útil para a compreensão da homotetia. Trazemos no Quadro 3, um exemplo.

Como em todo contexto geométrico, a narrativa dessa operação quando enunciada em uma situação problema, direcionará a compreensão declarando propriedades e elementos dimensionalmente diferentes daqueles que a percepção visual estimula, em outras palavras, Duval descreve que,

> Esta operação de perspectiva, ou de superposição por profundidade, constitui um tratamento figurativo que orienta a análise matemática da configuração homotética plana, que deve ser lida apenas em termos de relações de pontos e comprimentos de segmentos. Este tratamento figurativo também permite uma execução mais rápida e fornece um meio de controle (DUVAL, 1995, p. 188; 2004, p. 167-168).

Quadro 3 – Perspectivação a partir de duas pirâmides idêntica com tamanhos diferentes

Figura A 	Na ausência de um centro organização (unidade figural definida com essa função), o que contemplamos são unidades geométricas (3D/2D) de tamanhos diferentes.
Figura B 	Ao introduzirmos ao cenário um elemento visual como, por exemplo, uma linha de horizonte, a pirâmide que antes poderia ser considerada menor, agora passa a ser associada como sendo do mesmo tamanho, porém mais distante.

Fonte: os autores

Por outra parte, uma das características do olhar não icônico é sua capacidade de ser criativo diante de uma figura geométrica, visto que, qualquer iniciativa de associá-la a um objeto geométrico, requer sua identificação a partir de propriedades ocultas no desenho (DUVAL, 2011). Mesmo que o registro discursivo as declare, o registro figural precisa atuar heuristicamente, o que demanda o seu “desmonte” com a intenção de acessar as unidades geométricas elementares para que, cognitivamente, sua desconstrução permita revelar todas as propriedades implícitas na imagem.

Sendo assim, a desconstrução dimensional de um objeto geométrico é um gesto totalmente cognitivo, Duval (2022) enfatiza sua importância, bem como traz alguns objetos geométricos euclidianos como exemplos ao afirmar que:

> A maneira matemática de ver figuras consiste em decompô-las não importa qual a forma discriminada, quer dizer reconhecida como uma forma nD/2D, **em unidades figurais de um número de dimensões inferior à esta forma.** Assim a figura de um cubo ou de uma pirâmide (**3D**/2D) é decomposta em uma configuração de quadrados, de triângulos etc. (unidades figurais **2D**/2D). E os polígonos são por sua vez decompostos em segmentos de retas (unidades figurais **1D**/2D). E as retas, ou os segmentos, podem ser decompostos em “pontos” (unidades **0D**/2D). **Nota-se que com os pontos nós sairemos de toda visualização** (DUVAL, 2022, p. 18).

A desconstrução dimensional, exige habilidades específicas que vão além da capacidade visual de reconhecer por exemplo os quatro segmentos congruentes que constituem a figura de um quadrado, segundo o autor “os alunos precisam reconhecer, dentre as representações, aquelas com as quais deve tratar e que se voltam ao conceito matemático a ser assimilado" (DUVAL, 2018, p. 12).

Dada a importância dessa operação geométrica e sua complexidade, não só cognitiva, mas também operacional, visto que as estratégias didáticas em sua grande maioria não contemplam essa modalidade operacional sobre os registros figurais. Trazemos à baila, na Seção 4, Subseção 4.1, Figura 8, um exemplo característico para melhor compreensão.

4 A COORDENAÇÃO ENTRE FIGURA E DISCURSO EM GEOMETRIA

A coordenação entre registros semióticos é um dos fundamentos da teoria semiocognitiva de Duval. Isto é especialmente requerido em geometria, visto que, por mais explícito que a representação figural de um objeto exiba suas propriedades, mesmo recorrendo a sinais de conversão (como para segmentos, ângulos etc.), ainda poderá não ser suficiente, dado que, uma mesma figura geométrica pode representar situações muito diferentes e, por conseguinte, dá margem a diversos raciocínios. Para Duval (1995, p. 189; 2004, p. 168) "não há desenho 'sem legenda'... Isto quer dizer que a introdução de uma figura geométrica é necessariamente discursiva".

Dessa forma, a entrada discursiva (hipóteses, definições, teoremas) auxilia no reconhecimento das propriedades dos elementos figurais, legitimando o objeto matemático estudado e promovendo as conversões entre os registros figural e discursivo. São essas idas e vindas de forma interativa, relacionadas as exigências do problema, que encaminham a descoberta de uma solução. Segundo Duval (1995, p. 189; 2004, p. 168) "deve haver uma interação entre os tratamentos figurais que por abdução guiam a abordagem heurística, e os tratamentos discursivos que por dedução constituem a estratégia relativa aos objetos representados na figura".

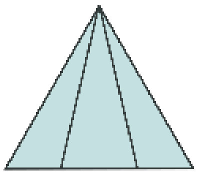
4.1 A entrada discursiva para a figura

De fato, em todo problema de geometria que envolva um registro figural, nossa percepção dará automaticamente destaque a alguns elementos figurais e ocultará outros, além do mais, o que é dito no enunciado pode ou não corresponder ao que está na figura. No entanto, qualquer iniciativa para se compreender um cenário geométrico exige a interação sincrônica entre os registros figural e discursivo, portanto, o baixo nível de congruência entre os registros, pode direcionar, de forma errônea, o gesto de compreensão e incitar o uso de propriedades geométricas que não possuem sustentação teórica com o contexto enunciado (DUVAL, 1995, p. 190; 2004, p. 169). Isto pode ser observado, por exemplo, no problema visto na Figura 4, versão 1, cuja visualização icônica não privilegia o destaque dos trapézios utilizados na solução do problema.

Por outro lado, o reconhecimento quando ocorre sem um custo significativo do gesto atencional, em consequência do elevado nível de congruência entre o que é dito no enunciado e o que a imagem inicialmente revela, pode também representar um obstáculo à resolução do problema, basta que o percurso resolutivo não esteja associado aos elementos que inicialmente foram reconhecidos. Podemos, como exemplo intermediário, tomar o problema descrito na Figura 4, versão 2, em que o aumento do grau de congruência entre o enunciado e a imagem não foram suficientes para simplificar o problema, visto que exigiu exaustivo procedimento matemático de resolução, ou seja, uma apreensão operatória mais complexa.

E mais explicitamente, podemos tomar o problema a seguir que se assemelha aos estudados por Balacheff (1982). Quantos triângulos existem na Figura 8?

Figura 8 – Subdivisão de um triângulo



Fonte: os autores

Observa-se uma forte congruência entre a entrada discursiva e a organização perceptiva da figura. Reconhecemos imediatamente, no máximo, quatro triângulos: um triângulo maior e três menores (figuras 2D). No entanto, o percurso resolutivo exige uma **desconstrução dimensional**, como descrita na subseção 3.2, isto é, é necessário prolongar todos os traços e ver a figura de forma retilínea (dimensão 1) e, mais ainda, perceber as interseções entre estas unidades elementares, permitindo a visualização cognitiva da figura através de pontos (unidades 0D). A partir dessa compreensão, qualquer agrupamento de três pontos não alinhados forma um triângulo. Deste modo, desvinculando-se do descrito no enunciado e mostrado na figura, é possível solucionar o problema, cuja resposta correta são ($C_{5,3} - C_{4,3} = 6$) seis triângulos.

Portanto, como afirma Duval (1995, p. 190; 2004, p. 169), nestes casos, “é necessário esquecer os objetos nomeados no enunciado e mostrado na figura” para a heurística do problema.

4.2 A exploração de uma figura: sequências de subfiguras e sucessão de etapas de raciocínio

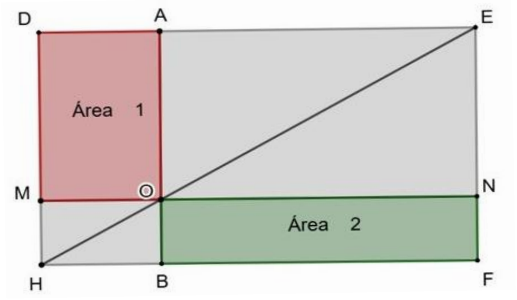
Qualquer cenário que tenha como proposta a compreensão e resolução de um problema de geometria e que contemple inicialmente uma figura geométrica permite, através da apreensão operatória e da capacidade heurística do registro figural, “ver uma variedade de possíveis subfiguras extraídas de uma determinada figura, que não são imediatamente perceptíveis à primeira vista” (DUVAL, 1995, p. 191; 2004, p. 170). Essa percepção denota a importância de reconhecer e diferenciar o papel das unidades figurais elementares na formação das subfiguras, visto que:

> Essas subfiguras são diferentes reorganizações perceptivas que representam algumas (ou todas) as unidades figurais elementares da figura inicial. Assim, embora o acesso a cada subfigura seja independente do acesso a outras e não seja possível a simultaneidade dos diferentes acessos, as subfiguras têm as mesmas unidades figurais de dimensão 2, 1 ou 0 do que a figura inicial. Este fundo comum permite a formação de diferentes sequências de subfiguras (DUVAL, 1995, p. 191; 2004, p. 170).

A apreensão operatória é uma resposta cognitiva em decorrência do desejo de recolher “pistas” heurísticas do problema. Duval (1995, p. 191; 2004, p. 170) afirma que “um problema estabelece, pelos seus dados e pela questão colocada, uma figura de partida e uma subfigura de chegada. Quando estas se identificam, é possível perceber a sequência de subfiguras intermediárias que nos permite passar de uma à outra”. Além disso, “o êxito neste processo vai depender da articulação entre esta apreensão operatória da figura e um manejo discursivo de inferências que mobiliza uma rede de definições e teoremas” (DUVAL, 1995, p. 191; 2004, p. 170).

Esse processo de seguir modificando a figura, de forma coordenada por um vislumbre de determinada subfigura em concordância com o que está enunciado, pode ser observado no exemplo da Figura 9, a seguir.

Figura 9 – Problema cuja heurística exige uma reconfiguração figural



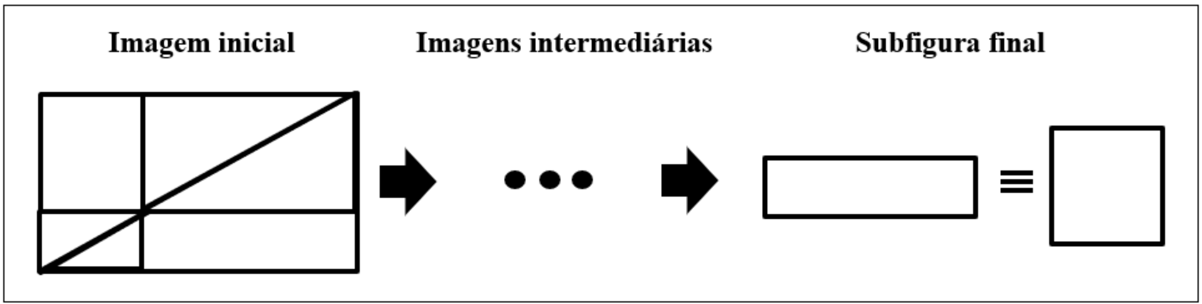
DEFH é um retângulo e, seja *O* um ponto qualquer de sua diagonal *HE*:
AB é paralelo a *DH* passando por *O*;
MN é paralelo a *DE* passando por *O*. Mostre a igualdade das áreas *1* e *2*, qualquer que seja a posição do ponto *O*.

Fonte: Duval, 1995, p. 185; 2004, p. 165

Considerando que *DEFH* é um paralelogramo reto-retângulo e que o segmento *HE* é uma de suas diagonais, implica que, os triângulos *HDE* e *EFH* são congruentes, assim como os pares de triângulos (*OAE* e *ONE*) e (*MOH* e *BOH*).

Partindo dessa figura inicial precisamos mostrar que os retângulos *AOMD* e *NOBF* são congruentes, o que sugere intuitivamente a subfigura final apresentada na Figura 10.

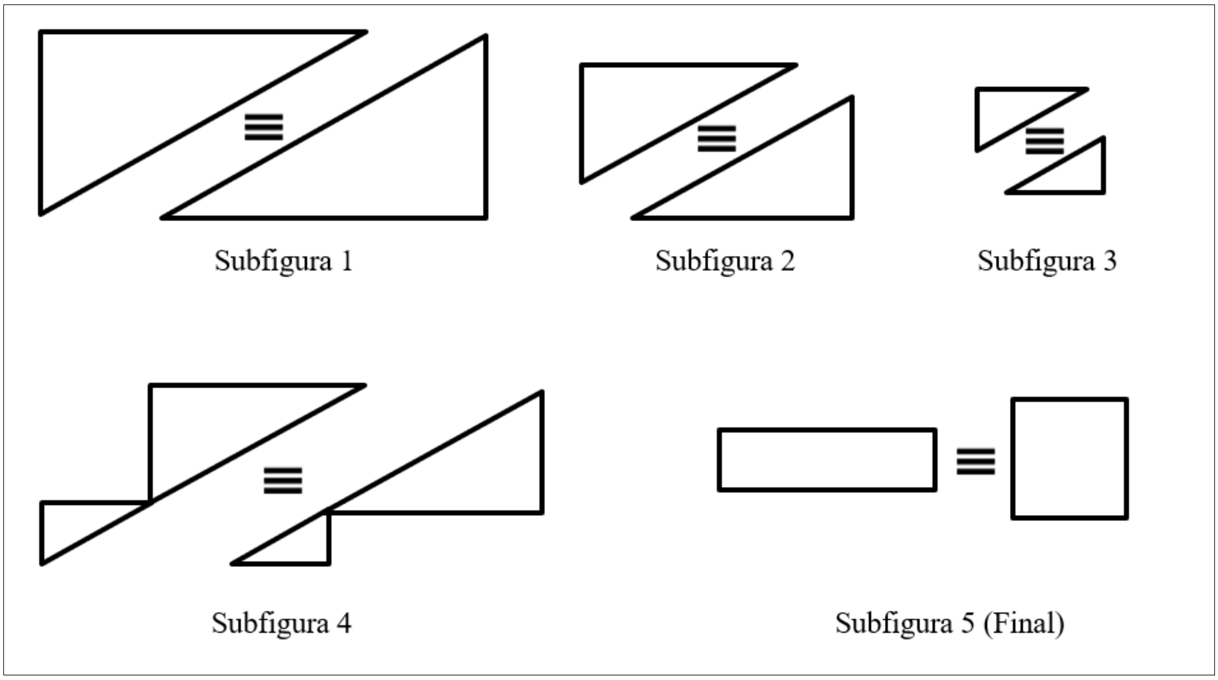
Figura 10 – Figura de partida e figura de chegada



Fonte: a partir de Duval, 1995, p. 185; 2004, p. 165

O êxito no percurso didático exige que a figura de partida exerça sua influência heurística de maneira a compor uma sequência de descobertas que levará à subfigura de chegada, como sugere a Figura 11. Conforme a citação anterior de Duval, está articulação só ocorre na presença de uma interação dinâmica entre as apreensões operatória e discursiva.

Figura 11 – Sequência de subfiguras intermediárias para a identidade das áreas 1 e 2



Fonte: a partir de Duval, 1995, p. 199-202; 2004, p. 177-179

As dificuldades oriundas de manipular o registro figural de forma coordenada com o que é dito discursivamente sobre a imagem, representa o principal desafio tanto para quem ensina quanto para quem aprende. Como dito anteriormente, diante de uma imagem, temos facilidade em reconhecer unidades geométricas de dimensão 2, limites fechados: triângulo, retângulo, losango etc., contudo, temos dificuldade para interagir com objetos de dimensão 1 e dimensão 0, como pares de lados paralelos ou congruentes, vértices, pontos de interseção ou médios inerentes a mesma figura. Por outro lado, o registro discursivo ao descrever o contexto geométrico, privilegia o reconhecimento de unidade geométricas de dimensão 1 ou 0. Sendo assim, transitar cognitivamente entre esses dois registros depende exclusivamente de "reconhecer a correspondência entre certas unidades discursivas de sentido do enunciado (definições, teoremas) e certas unidade figurais da configuração geométrica" (DUVAL, 2018, p. 9).

Esse fenômeno de incongruência dimensional entre a forma com que cada registro contribui para a discriminação e reconhecimento do objeto geométrico envolvido no problema, pode facilmente conduzir o estudante a desistir da busca pela sua solução, ou mais forte ainda, levar a um bloqueio.

Para ativar o potencial heurístico do registro figural, é imperativo que a representação possua uma dimensão superior à das unidades fundamentais para o raciocínio. Conforme destaca Duval (1995, p. 192; 2004, p. 171), isso significa que a dedução de uma subfigura final exige a manipulação intelectual de objetos e suas propriedades em uma dimensão que transcende as unidades geométricas elementares que compõem a imagem.

No caso da tridimensionalidade, quando representada por objetos (3D/3D), tem por vantagem a possibilidade de variar o campo perceptível simplesmente variando o ponto de vista do objeto. O que não é possível quando a tridimensionalidade é representada através da perspectiva (3D/2D). Além do mais, a falta de prática em manipular modelos tridimensionais e o uso comum de imagens (3D/2D) para compor a problematização acabam por agravar o problema de compreensão geométrica no espaço. Duval alerta para duas limitações que essa exposição em perspectiva pode acarretar:

> Em primeiro lugar, a representação em perspectiva exclui qualquer variação de ponto de vista: pressupõe, pelo contrário, que seja privilegiado um determinado ponto de vista, cuja escolha, em geral, faz parte da resolução do problema! A segunda limitação é que a sua leitura, devido à ausência da terceira dimensão, rapidamente se torna ambígua: daí a necessidade de recorrer a variáveis visuais suplementares, como a cor, para aumentar o número de índices de posição no espaço de algumas unidades figurais de dimensão 0, 1 ou 2 (DUVAL, 1995, p. 193; 2004, p. 171-172).

Os fenômenos de não congruência em geometria não se restringem apenas às figuras, mas também estão intrinsecamente ligados à organização dedutiva do discurso. Isso ocorre porque o discurso matemático não se limita a referenciar, mas também a unidades com valor lógico e epistêmico, ou seja, as **proposições**. Além do mais, a dedução, sendo uma estrutura discursiva que opera exclusivamente com proposições, tem seu funcionamento baseado na substituição de uma parte da figura por uma expressão referencial equivalente e quando é preciso, reutiliza proposições para encadear os diferentes passos do raciocínio.

Portanto, não existe um raciocínio geométrico sem a interação sinérgica entre o registro figural e o discursivo, entretanto para Duval:

> A articulação entre figura e discurso, na resolução de um problema de geometria, deve ser realizada nestes dois níveis de funcionamento do raciocínio dedutivo: deve ser realizada, portanto, local e globalmente. A articulação local é a que se realiza nos limites de uma etapa de dedução: baseia-se na correspondência entre unidades figurais de dimensão 0 ou 1 e expressões referenciais. A articulação global é o que diz respeito ao processo de resolução de problemas: baseia-se na correspondência entre a visão de uma sequência de subfiguras e o encadeamento de etapas dedutivas (DUVAL, 1995, p. 193-194; 2004, p. 172).

Nesse sentido, a articulação global entre os registros, representa no contexto educacional a essência da atividade geométrica, uma vez que integra gestos heurísticos e provas em uma atividade intelectual unificada, o que determina o caminho para o domínio e a compreensão profunda dos conceitos e problemas da geometria.

5 APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA E COORDENAÇÃO DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO

A particularidade da geometria não se restringe a trabalhar, de forma simultânea, a coordenação de tratamentos oriundos dos registros semióticos figural e discursivo. Essa especificidade aumenta, posto que os tratamentos espontaneamente praticados em cada um desses registros, estão na contramão dos exigidos para a aprendizagem da matemática. Desse modo, as propostas e estratégias de ensino precisam proporcionar condições para que os estudantes dominem as operações específicas de cada um desses registros, utilizando tratamentos legítimos à atividade matemática. Dito de outra forma:

> Manifesta-se indispensável a aprendizagem em separado das operações demandadas destes dois registros, pelo menos para evitar os impasses de uma falsa proximidade entre os tratamentos pertinentes para uma atividade matemática e os que são comumente efetuados na percepção das figuras, na compreensão dos discursos e em sua produção (DUVAL, p. 194; 2004, p. 173).

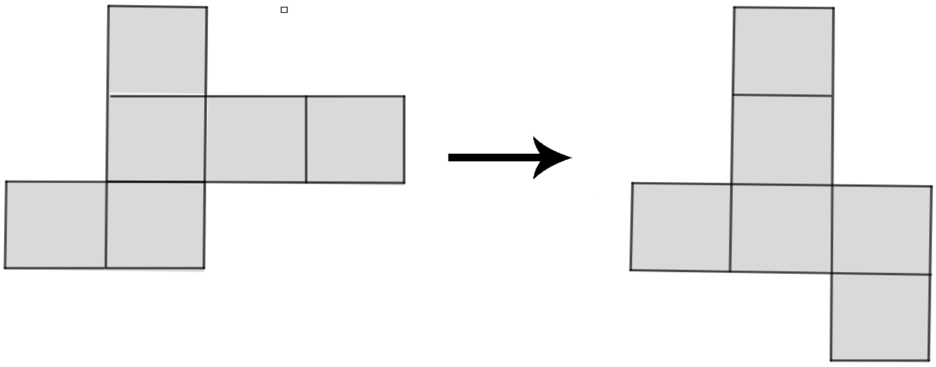
5.1 Reconhecimento perceptível, apreensão operatória e heurística

O fenômeno da incongruência semântica entre os registros figural e discursivo exige um olhar capaz de dinamizar modificações na imagem ao menos mentalmente. Ademais, para que se faça uso da capacidade heurística que toda figura geométrica carrega, é preciso ir além da discriminação dos elementos visuais de uma imagem. O reconhecimento das unidades geométricas tanto no contexto individual quanto no global é o único meio pelo qual é possível estabelecer uma equivalência semântica com o que está sendo dito da imagem (DUVAL, 2022). Todavia, realizar essas modificações na imagem em um contexto geométrico não é uma ação natural, como recorda Duval, “a reconfiguração, a superposição por ajuste de profundidade e outras operações relacionadas com possíveis modificações de uma figura (desconstrução dimensional, por exemplo) são operações que estão longe de ser espontâneas e óbvias” (DUVAL, 1995, p. 195; 2004, p. 173, adendo nosso).

Mesmo nos tratamentos mais simples como as modificações de posição por translação ou por rotação, Duval (1995, p. 195; 2004, p. 173) afirma que “uma simples mudança de orientação de uma unidade figural elementar pode ser um obstáculo para o seu simples reconhecimento", como se observou no problema proposto na Figura 4.

Duval apresenta como exemplo, aplicado por ele, a Figura 12, a seguir.

Figura 12 – Duas representações de um mesmo padrão de um cubo planificado



Fonte: Duval, 1995, p. 195; 2004, p. 173

Onde duas representações de um mesmo cubo planificado diferenciam-se somente pela rotação entre as imagens (horizontal → vertical). Desse modo, expõe a dificuldade de uma turma do Ensino Fundamental em reconhecer que as duas figuras correspondiam a um mesmo cubo, evidenciando que uma simples rotação mental exige treinamento específico, alinhando-se ao que já havia sido afirmado no trabalho de Shepard e Metzler (1971), "o tempo requerido para reconhecer o mesmo objeto em duas figuras planas diferentes, obtidas por rotação de uma das duas, aumenta com o valor do ângulo de rotação". O que também reforça a diferença no grau de dificuldade encontrado para solucionar a versão 1 e a versão 2 do problema apresentado na Figura 4 deste texto.

Na reconfiguração, um dos tratamentos figurais mais antigos da história da geometria, a **apreensão operatória** atua na imagem realizando um rearranjo das partes envolvidas conservando a dimensão da figura original, dito de outra forma, a dinâmica heurística da imagem geométrica agora é semelhante ao jogo de quebra cabeça, precisando remodelar as peças a fim de reconhecer uma subfigura final, o que formalizaria o percurso didático para sua compreensão e solução.

Porém, a dificuldade com que os estudantes realizam essa transformação sobre o registro figural, tem como base elementos dimensionais e qualitativos, o que faz com que o custo cognitivo seja maior quando se busca operacionalizar um objeto tridimensional do que um objeto bidimensional. Há também influência de elementos externos como: fundo base homogêneo ou não, a convexidade ou não de subfiguras, a disposição de elementos figurais relevantes (como o recobrimento parcial), entre outros elementos visuais que podem favorecer ou não a operação de reconfiguração (Duval, 1995, p. 197; 2004, p. 174-175).

Em função da especificidade e exigências cognitivas com que devemos coordenar as ações sobre os registros figural e discursivo, por mais sinais de semelhança que existam entre os tratamentos realizados em um conjunto de elementos geométricos e elementos comuns ao nosso dia a dia, qualquer operação sobre a imagem é definitivamente exclusiva da matemática, função de sua estrutura teórica bem definida e integrada. Fora disso, qualquer proximidade operacional é mera ocasionalidade e sem validade conceitual. A respeito do papel da apreensão operatória Duval conclui pela necessidade de treinamento, visto que, sem ela as figuras não podem cumprir sua função de suporte intuitivo, e enfatiza que, “esta apreensão exige não só a neutralização da organização perceptual espontânea da figura, mas também tem um custo temporal que varia consideravelmente em função do número, da heterogeneidade e das respectivas posições das unidades figurais elementares que a compõem” (DUVAL, 1995, p. 197-198; 2004, p. 175).

5.2 Condições para o desenvolvimento da apreensão operatória

De fato, **a apreensão operatória** é responsável pelas modificações figurais com o objetivo de revelar uma subfigura final, e assim favorecer o percurso didático de resolução. Todavia, esse gesto cognitivo quando ativo, não age sozinho, ao contrário, atua sinergicamente com outras apreensões.

Essas apreensões são gestos interpretativos autônomos estimulados a partir de problemas matemáticos. Especialmente em geometria, além da apreensão operatória, Duval (1994) denomina também outras apreensões: a **apreensão perceptiva** que, como já foi descrito, utiliza-se dos estímulos visuais da imagem para reconhecer os elementos geométricos que a constituem; a **apreensão discursiva** responsável pela correlação termo a termo entre a imagem e o que é dito sobre ela, visto que, a interpretação discursiva da imagem é crucial, e ainda relaciona uma importante rede de hipóteses, definições e teoremas que vão guiar e legitimar a solução do problema; e, por fim, a **apreensão sequencial** que coordena os processos de construção e descrição geométrica das figuras subordinadas as suas definições e proposições, integrando as etapas do raciocínio.

A interação entre essas diferentes apreensões é o que realmente permite a compreensão e a manipulação eficaz de problemas geométricos. Para Moretti (2013, p. 291) “não há uma hierarquia entre estas apreensões, mas uma subordinação de uma à outra dependendo do tipo de problema".

Entretanto, mesmo que a eficiência da apreensão operatória esteja associada a interação com as demais apreensões, uma vez que é preciso inicialmente buscar correspondências entre as unidades do discurso e da figura, Duval (1995, p. 198; 2004, p. 175) afirma que, embora negligenciada, a prática de modificações de uma figura a partir de suas unidades elementares ou subfiguras não é uma operação natural para o estudante e precisa, necessariamente, de treinamento.

Assim sendo, deve-se incialmente reduzir o custo cognitivo dos exercícios que se utilizam dos tratamentos figurais para que ocorra, *a priori,* um treinamento focado simplesmente nas operações sobre a figura geométrica. Nesse sentido, Duval postula três condições para que o professor possa estruturar corretamente sua sequência didática.

> I - A resolução do exercício proposto não deve envolver qualquer atividade de raciocínio que requeira a utilização de definições ou teoremas.
> II - A resolução do exercício proposto não deve implicar qualquer alteração de dimensão na sequência de subfiguras.
> III - O exercício proposto deve ocorrer em uma série organizada de acordo com uma variação sistemática de fatores de visibilidade que facilite ou atrase a apreensão operatória Padilla (1992). Este ponto é essencial para desenvolver o desempenho dos tratamentos figurais em todos os "casos de figura" e reforçar o comportamento da abdução. É precisamente a consideração desta terceira condição que nos permite organizar uma aprendizagem especificamente centrada nos tratamentos próprios do registo das figuras (DUVAL, 1995, p. 198; 2004, p. 176).

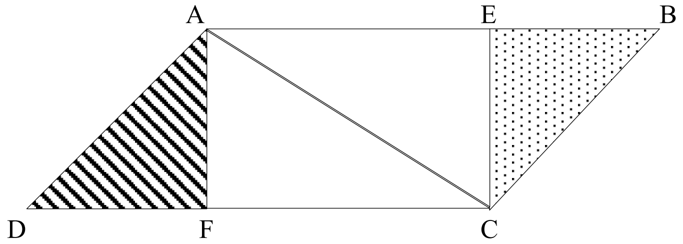
As duas primeiras condições exaltam a importância de se apresentar uma representação figural didaticamente congruente com o enunciado e com o tratamento figural que se deseja praticar, assim, à medida que o exercício vai se desenvolvendo, a apreensão operatória poderá ampliar a capacidade de se associar uma configuração de unidades elementares e suas relações com as operações necessárias para revelar um percurso resolutivo. Nota-se que, os exercícios para os quais a resolução pode ser obtida pela operação de reconfiguração, cumprem perfeitamente essas duas primeiras condições.

Seguir essas condições, não destitui, em hipótese alguma, a ação interpretativa das apreensões, que representam gestos cognitivos autônomos destituídos de uma hierarquia, porém, quando o objetivo norteador é o treinamento das transformações sobre a figura, a redução do custo cognitivo e, portanto, a subordinação menor da apreensão operatória a apreensão perceptiva, constituem um cenário de clareza operacional e de compreensão (MORETTI, 2013).

A fim de explicitar tais condições, vamos explorar dois exemplos: um focado na operação de reconfiguração e o outro na operação da perspectivação.

O primeiro exemplo, segundo Duval, retirado da experiência de Padilla (1992), requer uma reconfiguração e, corresponde a mostrar, a partir da Figura 13, que a área da região hachurada *AFD* é congruente a área da região pontilhada *EBC*. Ou se preferir outro enunciado, *ABCD* é um paralelogramo. Os segmentos *AF* e *EC* são paralelos. Por que se pode dizer que a área hachurada e a área pontilhada são iguais?

Figura 13 – Exercício que exige modificações figurais

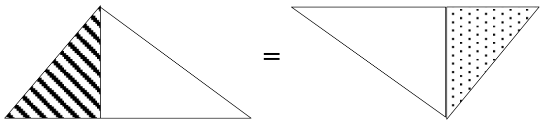
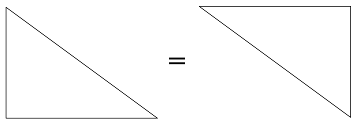
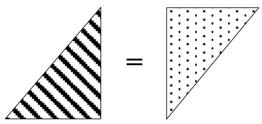


Fonte: Duval, 1995, p. 199; 2004, p. 176

Inicialmente, as condições I e II citadas por Duval são perfeitamente atendidas nessa configuração geométrica, para certificação disso basta tomar o primeiro enunciado. As correlações, sem grande custo cognitivo, entre o que é dito no enunciado, o que a imagem expõe e o que o exercício solicita, é um indicativo de que essa atividade não exige o uso de aporte teórico e nem a necessidade de desconstruir dimensionalmente a figura. Sublinhamos que o uso frequente das condições I e II em atividades de treino, é interessante à medida que ampliam a capacidade de visualizar transformações nas figuras, tendo como víeis didático a variação sistemática dos fatores que estimulam ou retardam um reconhecimento visual.

No caso da reconfiguração figural, o rearranjo das unidades figurais se dá mantendo a dimensão da figura original, sendo assim, no exercício apresentado à Figura 13, a heurística do exercício é imediata e mentalmente de fácil percepção. A congruência das formas destacadas (*ACD* e *ABC, ACF* e *AEC, AFD* e *EBC)* e a possibilidade de sobreposição entre elas se constituem "claramente em critérios semióticos e perceptivos de organização das unidades figurais elementares" (Duval, 1995, p. 200; 2004, p. 177). A resolução de exercícios que contemplem essa mesma dinâmica de relação entre os registros discursivo e figural, atendendo aos critérios I, II e III, constituem um percurso didático capaz de treinar os estudantes tanto no sentido da visualização quanto nas possíveis modificações que uma configuração geométrica predispõe. Segue a resolução, Figura 14.

Figura 14 – Uma solução para o exercício da Figura 13

1 	Note que, a partir do gesto de reconfigurar o quadrilátero original em duas subfiguras semelhantes (triângulos *ACD, ABC*; etapa 1), mentalmente por sobreposição, a equivalência entre as respectivas áreas é facilmente verificada
2 	Segue-se desmontando a figura da etapa 1. A divisão fornece outras duas subfiguras (triângulos *ACF* e *AEC*; etapa 2) e, fazendo uso novamente da sobreposição mental é possível verificar que se trata de triângulos que possuem a mesma área
3 	Por fim, valida-se as etapas 1 e 2. Certamente, os triângulos que possuem suas regiões internas diferenciadas por hachuras e pontos sobrepõem-se completamente, portanto, são congruentes e suas áreas numericamente iguais (etapa 3)

Fonte: a partir de Duval, 1995, p. 200; 2004, p. 177

De fato, a manutenção da congruência semântica, abre espaço para que o professor estimule pontualmente a atuação da apreensão operatória sobre a figura, permitindo que o estudante reconheça nessas subfiguras o caminho para solucionar o problema. É evidente que essa resolução não se confunde com uma demonstração, para uma dedução parte-se de outra operação cognitiva, a desconstrução dimensional, a fim de trazer para visualização elementos geométricos dimensionalmente inferiores, de modo que os tratamentos figurais ocorram sustentados por elementos pertinentes ao aporte teórico do enunciado e da figura geométrica em questão. Dito de outra forma, o uso das propriedades das unidades geométricas contidas no enunciado e reconhecidas no paralelogramo estabeleceria também a igualdade entre as áreas, porém sem o uso da reconfiguração, e sim utilizando-se a operação cognitiva da desconstrução dimensional.

Entretanto, para Duval, mesmo não sendo um caminho dedutivo, encontrar uma justificativa argumentativa relevante baseada na apreensão operatória ocorre sempre em congruência com o registro discursivo (DUVAL, 1995, p. 201; 2004, p. 178).

Nota-se também que, nos exercícios que contemplam os critérios I, II e III elencados por Duval, cujo objetivo central é o treinamento das modificações sobre o registro figural, a apreensão operatória, mesmo que de início demonstre uma atuação mais intensa, está sempre ancorada na apreensão perceptiva.

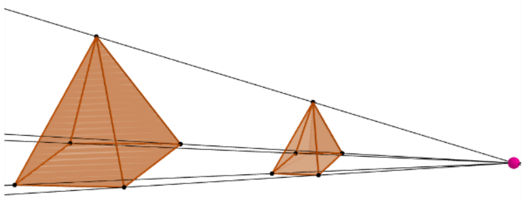
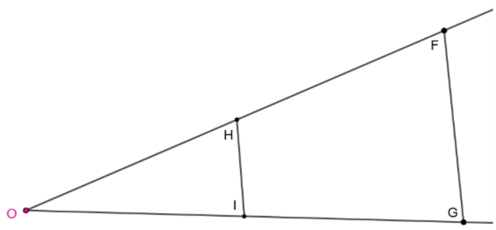
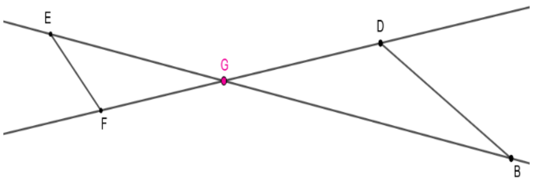
Como segundo exemplo, temos a classificação sistemática de figuras que representam a homotetia no plano. Ou seja, são representações geométricas que mantêm a semelhança no contorno e a mesma orientação em um plano frontoparalelo. Nesse contexto, a definição de um ponto de fuga óptico pode alterar a percepção de tamanho e distância, fazendo um objeto parecer maior ou menor, mais perto ou mais longe.

Assim como na reconfiguração, Duval denota importância a operação de perspectivação e identifica condições que possam contribuir com o professor a fim organizar sua sequência didática de treinamento, oportunizando nos problemas iniciais a congruência semântica entre o que é dito no enunciado com o que a imagem revela inicialmente. De acordo com o autor:

> Para que uma configuração homotética seja percebida em profundidade, duas condições devem ser atendidas:
>
> - Nenhuma reta (linhas que unem os pontos perceptivamente observáveis, por exemplo os vértices) se confunde com os lados da figura objeto ou com os lados da figura imagem.
> - O centro de homotetia é um centro externo. Isto exclui, por exemplo, casos em que a relação homotética é negativa (DUVAL, 1995, p. 203-204; 2004, p. 180).

Estas são as condições para que uma figura sirva para ser colocada em uma operação de perspectivação. Além do mais, na perspectivação de uma configuração homotética, em que a figura objeto (2D/2D) é transformada, a partir de um ponto de fuga, em figura imagem (2D/2D ou 3D/2D), princípios gestálticos atuam bloqueando qualquer unidade figural dimensionalmente inferior inibindo a congruência, o que pode elevar consideravelmente o custo cognitivo para se diferenciar os elementos geométricos que pertencem ao objeto e a sua imagem. Em outras palavras, "quando a figura objeto e a figura imagem estão superpostas, pode ser difícil percebê-las em perspectiva e mais difícil ainda ver os pares de segmentos que devem ser constituídos para relações de igualdade de comprimento, bem como os pontos homólogos (Duval, 1995, p. 202; 2004, p. 179). Como exemplificado na Figura 15.

Figura 15 – Condições favoráveis a perspectivação

	<u>Condições favoráveis à congruência:</u> i. É possível distinguir as linhas que compõe a representação figural do objeto (3D/2D) das linhas que vão formar a representação de sua imagem (3D/2D); ii. O centro de homotetia é um ponto externo.
ΔIOH e ΔGOF 	<u>Condições favoráveis à congruência parcial:</u> i. **<u>Não</u>** é possível distinguir as linhas que compõe a representação figural do objeto (2D/2D) das linhas que vão formar a representação de sua imagem (2D/2D); ii. O centro de homotetia é um ponto externo.
ΔEFG e ΔBDG 	<u>Condições favoráveis a congruência parcial:</u> i. É possível distinguir as linhas que compõe a representação figural do objeto (2D/2D) das linhas que vão formar a representação de sua imagem (2D/2D); ii. O centro de homotetia **<u>não</u>** é um ponto externo (relação homotética negativa).

Fonte: os autores a partir de Duval (1995, 2004)

Assim como na operação de reconfiguração, na perspectivação o nível de congruência entre as unidades geométricas de cada registro semiótico, também deve ser levado em consideração pelo professor, na elaboração de seu percurso didático em que treinar as transformações sobre o registro figural seja o seu objetivo principal. Isto é, a operação de perspectivação (exemplificada na Figura 16), através da relação de homotetia de um objeto geométrico apresentará menor custo cognitivo se atender as duas condições definidas por Duval (1995, p. 203-204; 2004, p. 180), porém, “se a segunda condição não for satisfeita, a configuração homotética resiste a ser colocada em perspectiva” e se “a segunda condição for satisfeita, mas não a primeira, estamos na situação de figuras ‘ambíguas’, isto é, figuras que podem ser vistas de duas maneiras diferentes: em profundidade ou do plano”(p. 180-181).

Estes dois exemplos (Figura 13, Figura 15) deixam claro que, do ponto de vista heurístico, a análise das figuras faz-se a partir de suas modificações figurais, portanto, é essencial compreender os tratamentos subjacentes a cada operação de modificação figural: reconfiguração, perspectivação e desconstrução dimensional. No âmbito da perspectivação, a classificação de figuras com configuração homotética é uma ferramenta analítica que possibilita a distinção precisa entre três grupos: as que se adaptam facilmente a essa transformação, as que lhe são resistentes e as que apresentam instabilidade na percepção de profundidade.

6 A NECESSÁRIA CONSCIETIZAÇÃO SOBRE OS DIFERENTES TIPOS DE FUNCIONAMENTO DA EXPANSÃO DISCURSIVA

A compreensão ativa dos saberes em matemática impõe as mais diversas exigências cognitivas, em particular, aquelas relacionadas a geometria estão associadas ao "reconhecimento imediato de um mesmo objeto em representações cujos conteúdos não possuem nada em comum" (DUVAL, 2018, p. 16).

A conversão entre registros semióticos é, portanto, uma habilidade central para que haja aprendizado em geometria, porém Duval chama atenção para que essa conversão seja "forte". Segundo o autor "o reconhecimento de um mesmo objeto quando se muda de registro de representação deve ser efetuado nos dois sentidos de conversão e não em um só sentido [...]" (DUVAL, 2018, p. 16). Entretanto, na prática de sala de aula, o ensino de geometria privilegia a passagem de um enunciado em língua natural a uma ou várias representações figurais (DUVAL, 1995, 2004).

Isto é, caminha-se naturalmente do que é dito no enunciado para o reconhecimento desses elementos em uma figura geométrica. Ao contrário, identificar e redigir informações partindo de um registro figural, além de pouco praticado, exige habilidades discursivas ou expansões discursivas específicas. Para Duval, expandir um discurso a partir de uma figura, "exige a implementação de situações e restrições extra matemática: comunicação de instruções para que os destinatários possam reconstruir uma figura a partir de uma figura dada, ou de uma figura que se acaba de construir" (DUVAL, 1995, p. 206; 2004, p. 182).

Ademais, o registro figural, por meio de sua capacidade heurística, desempenha um papel fundamental na elaboração da solução de problemas geométricos. Ele não apenas fundamenta as informações do enunciado, mas também expande o campo de certezas por meio de um processo iterativo de compreensão e resolução. Contudo, o simples reconhecimento dessa função não é suficiente à solução, visto que, sua eficácia é condicionada ao domínio de fundamentos teóricos que alicerçam o contexto geométrico do problema.

Com esses argumentos, Duval afirma que "no ensino de geometria é necessário o tipo de conversão inversa (figura-texto) para garantir que os alunos entrem nas restrições do discurso matemático e para favorecer a articulação com o registro das figuras" (DUVAL, 1995, p. 206; 2004, 182). Todavia, como discorrido na seção 3.2, a utilização heurística de uma figura tem como ambiente as operações de modificações figurais, que dependem do nível de apreensão operacional adquirido pelo estudante e, consequentemente, de sua habilidade em trabalhar os tratamentos figurais oriundos das modificações mereológicas, ópticas ou posicionais de uma figura.

Por outro lado, "a utilização heurística de uma figura se manifesta pela conduta de abdução, que de nenhuma maneira pode ser comparado com um procedimento dedutivo" (DUVAL, 1995, p. 207; 2004, p. 183). Porém, como visto no exemplo (Figura 13, Figura 14), a passagem no sentido figura-texto para apresentar o resultado de uma simples apreensão operatória de reconfiguração, podia tomar formas válidas de raciocínios bem diferentes: argumentação, explicação ou demonstração.

De fato, existem diferentes formas de funcionamento cognitivo do raciocínio, algumas delas compatíveis com uma expansão discursiva. Por outra parte, existem diferentes tipos de funcionamento da expansão discursiva, alguns correspondentes a um raciocínio e outros não. Dessa forma, "as conversões efetuadas no sentido figura-texto exigem que os diferentes tipos de funcionamento da expansão discursiva e que as diferentes formas de funcionamento cognitivo do raciocínio se diferenciem claramente" (DUVAL, 1995, p. 207; 2004, p. 183).

Portanto, a falta dessa conscientização pode elevar substancialmente o custo cognitivo da solução de um problema ou mesmo inviabilizar sua heurística. A seguir trazemos mais alguns argumentos quanto necessidade de se diferenciar os tipos de expansão discursiva.

CONSIDERAÇÕES FINAIS: Releitura das apreensões e a expansão discursiva cognitiva figural

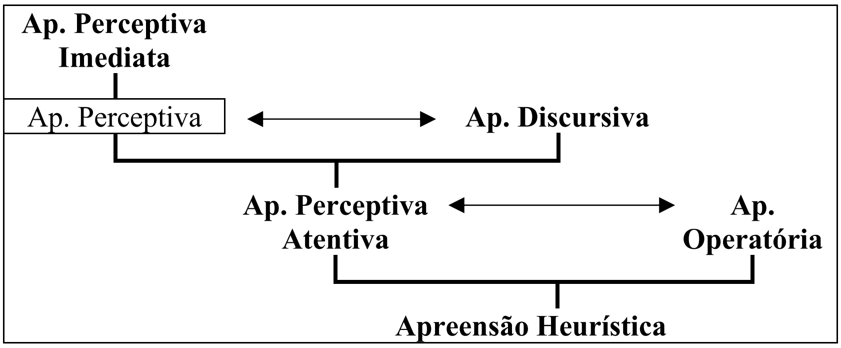
Este aporte busca complementar, ou melhor, explicitar alguns tópicos do Capítulo IV estudado, a partir de artigos mais recentes de Duval assim como das pesquisas de Moretti e Cans (2024), especialmente, no que tange ao contexto das apreensões e da expansão discursiva cognitiva. Por esse prisma, ampliar o entendimento a respeito das **apreensões** é significativamente necessário para orientar o professor quanto a escolha de suas atividades em geometria, de modo a desenvolver no estudante a capacidade de interagir, operar e reagir com raciocínios que possam realizar a coordenação (conversão ida e volta) entre os registros figural e discursivo até o desfecho de uma solução.

Por outra parte, em sua maioria, as soluções em geometria valem-se de inferências discursivas sobre unidades figurais elementares, reconhecidas tanto no enunciado quanto na figura dada no problema, o que denota uma forte participação da figura na produção do discurso, fato observado por Moretti e Cans (2024a), um indicativo de que o papel da **função de expansão discursiva** também possui um viés figural.

No estudo realizado por Moretti e Cans (2024a), a apreensão perceptiva quando atua automaticamente sobre os elementos visuais da figura, apoiando-se restritamente aos princípios gestálticos, é denominada **apreensão perceptiva imediata**. Com efeito, poder-se-ia chamar também apreensão gestáltica. Já quando atua com foco na figura subordinada ao enunciado do problema, um gesto determinante para que o reconhecimento saia do modo automático e amplie o potencial heurístico da imagem, é denominada **apreensão perceptiva atentiva**.

A partir da releitura de como a apreensão perceptiva abordada por Duval (1995, 2012, 2022) pode atuar, e corresponder ou não ao sucesso da compreensão do problema, os autores reconheceram que, sistematicamente, todo percurso eficiente de compreensão e resolução de um problema, tinha como elemento comum, um significativo reconhecimento das subfiguras e suas respectivas relações a partir de transformações do registro figural. Nesse sentido, Moretti e Cans trazem uma nova percepção com relação a habilidade de buscar a solução para um dado problema, dito de outra forma, a interação funcional entre as apreensões "perceptiva atentiva" e "operatória" passou a ser denominada por eles **apreensão heurística** (MORETTI; CANS, 2024a, 2024b). Como se verifica na Figura 16.

Figura 16 – Formação das apreensões que atuam em problemas de geometria



Fonte: Moretti, 2024b, p. 133

Em suma, a sinergia entre as apreensões dá origem a apreensão heurística, que reúne as condições para encaminhar uma solução para um problema. No entanto, a partir de um certo momento da resolução entra em cena as **funções discursivas**[5]: referencial (designa objetos); apofântica (relaciona objetos designados sob a forma de uma proposição); de expansão discursiva (vincula proposições de uma forma coerente); e de reflexividade discursiva (propõe

[5] Ver Capítulo II em Duval (1995; 2004).

o valor, o modo ou o código social a uma proposição enunciada por parte de quem a enuncia), sem as quais, o problema poderia não ter um desfecho final (CANS, 2024, p. 77–86).

As funções discursivas abordadas por Duval (1995, 2004) referem-se aos registros semióticos de modo geral. Portanto, mesmo que o título contenha o termo ‘discursivo’, elas também são aplicadas aos registros não discursivos, como é o caso do registro das figuras geométricas. Por exemplo, quando em um triângulo designa-se por *G* o ponto de encontro de suas medianas (baricentro), fez-se uso da **função discursiva referencial,** que tem o papel de designar objetos. No entanto, essa designação se valeu de um elemento discursivo dentro de um contexto figural.

No que concerne a resolução de problemas de geometria, as funções discursivas são operações semiocognitivas importantes, sendo que, as três primeiras têm uma relação mais convergente com essa atividade, e mais agudamente atua a expansão discursiva para promover a continuidade do discurso matemático. O próprio autor já afirmou ser esta, entre todas as funções discursivas, definitivamente, a mais importante (DUVAL, 1995, p. 97; 2004, p. 94). Contudo, a compreensão e a continuidade de um discurso matemático exigem que se vá além das inferências. De fato, as abduções são importantes como raciocínios produtores de ideias, mas devem ser validadas por leis matemáticas para que se transformem em deduções.

Por exemplo, as frases sucessivas: ‘se eu fosse rico. Eu seria feliz’, são duas unidades apofânticas cuja proximidade favorece uma inferência que não está explicita em nenhuma das frases. A palavra ‘dinheiro’, implícita em ambas as frases, sugere imediatamente uma vinculação, uma expansão discursiva — ‘se eu fosse rico teria dinheiro e quem tem dinheiro é feliz’ —. Este tipo de conclusão, subordinada apenas ao conhecimento sociocultural dos interlocutores, está longe de uma dedução, e classifica-se como **expansão discursiva natural** segundo Tabela 3 em Duval (1995, p. 129; 2004, p. 117).

Com efeito, observa-se que isso é apenas uma possibilidade, uma inferência ou uma abdução nas palavras de Peirce (2017), ou seja, não há uma relação segura de causa e efeito entre riqueza e felicidade. Essa ligação não tem a marca inequívoca de verdadeiro ou falso, certo ou errado etc. (CANS, 2024, p. 148).

Por outro lado, a vizinhança entre as frases: ‘se um polígono é um triângulo. Apenas um de seus ângulos internos pode ser reto’, permite inferências ou raciocínios diversos. Por exemplo, vamos supor, por redução ao absurdo, que dois ângulos internos de um triângulo sejam retos. Neste caso, a soma das medidas desses dois ângulos seria 180º.

Baseando-se no teorema de Euclides, que estabelece: “a soma dos três ângulos internos de um triângulo é igual a 180°”, teríamos, por conseguinte, que a medida do terceiro ângulo desse triângulo seria zero. Um absurdo! Portanto, ‘em um triângulo apenas um de seus ângulos internos pode ser reto’.

Diferentemente do caso das frases anteriores, em que a expansão discursiva natural ocorreu, uma vez que, conhecimentos da língua e do contexto social eram suficientes, esse tipo de expansão é uma dedução e pode ser classificada como **expansão discursiva cognitiva**, dado que “exige o conhecimento de definições, regras ou leis para um domínio de objetos” (DUVAL, 1995, p. 126: 2004, p. 117).

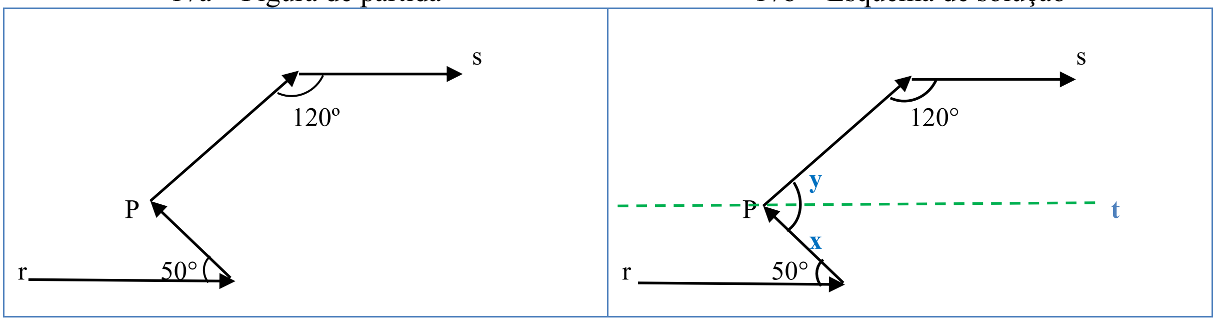
Para a matemática, que se estabelece por axiomas, propriedades, teoremas etc., e, especialmente, para a heurística de problemas de geometria com figuras, os estudos de Moretti e Cans (2024a) denominaram essa operação semiocognitiva de **expansão discursiva cognitiva figural**, obviamente por, neste caso, esta expansão valer-se de elementos figurais.

Conforme Moretti e Cans (2024a, p. 305), “na maioria das vezes, a resolução de problemas em geometria segue um duplo papel da apreensão heurística: realizar operações sobre a figura e identificar elementos geométricos que essa operação revela”. Para consolidar o entendimento apresentamos, a seguir, um exemplo pragmático da atuação sinérgica entre as apreensões e a expansão cognitiva figural.

Exemplo: o navegador de uma equipe de rali recebeu o mapa do percurso de uma das provas da competição, e parte dele, que liga duas estradas paralelas *r* e *s,* por meio de trechos de ruas retas, está representado no croqui da Figura 17. Nesse percurso o ponto *P* representa uma curva que deve ser feita durante o percurso da prova. Com os dados da figura, determine a medida do menor ângulo de vértice *P*.

Figura 17 – Croqui representativo de pequeno trecho de rali

17a – Figura de partida | 17b – Esquema de solução



Fonte: adaptado de Leal *et al.*, 2020, p. 148 | Fonte: Cans, 2024, p. 154

— Conceitos básicos da teoria semiocognitiva de Duval:

- ✓ o problema envolve vários registros semióticos: língua natural, figuras geométricas, numérico e algébrico;

- ✓ o enunciado refere-se a uma atividade sociocultural, as informações são bastante claras na Figura 17a. Logo, figura e enunciado são semanticamente congruentes e referencialmente equivalentes, ou seja, um problema de fácil compreensão.

Portanto, a dificuldade fica por conta dos procedimentos matemáticos de resolução, que exigem modificações na figura como, por exemplo, a solução apresentada a seguir.

— Solução – operações com fins heurísticos:

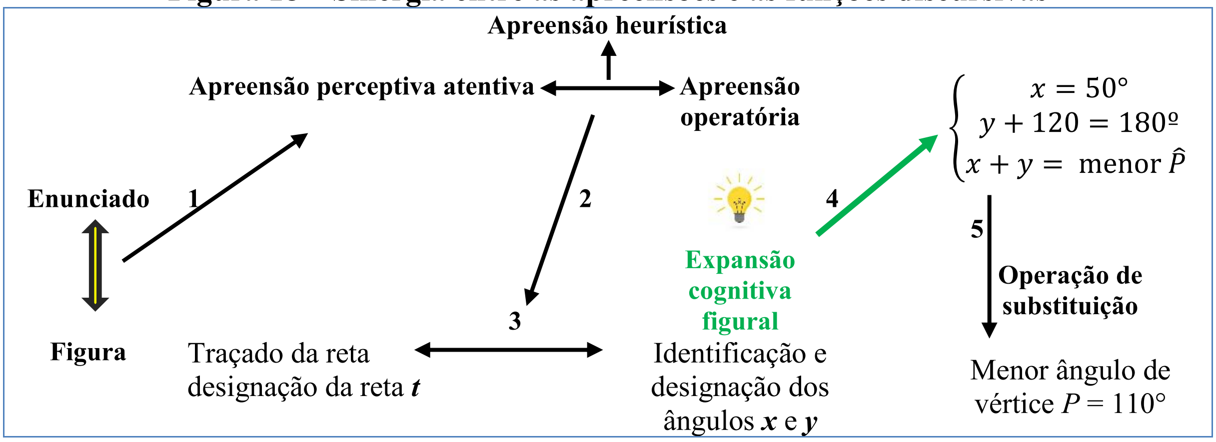
- ✓ na Figura 17b, traçou-se por *P* uma paralela as retas *r* e *s* (operação de reconfiguração ao inserir a linha tracejada);
- ✓ visualização e designação da reta e dos dois ângulos, respectivamente, pelas letras *t, x* e *y* (função referencial – operação de designação pura).

Essas modificações na figura ocorrem em busca de uma solução para o problema (inferências, abduções). Note que, os procedimentos matemáticos agora ficam bem mais aparentes. Na Figura 17b, tem-se:

- ✓ $x = 50°$, designação funcional (ângulos alternos internos são congruentes, dedução);
- ✓ $y + 120° = 180°$, designação funcional (ângulos colaterais internos são suplementares, dedução); e
- ✓ $x + y$ = menor ângulo de vértice *P,* (conclusão visual, $(x + y)$ é o ângulo de vértice *P* menor que o seu replemento, dedução).

A partir desses dados, por tratamentos algébricos e substituições adequadas conclui-se que, o menor ângulo de vértice *P* é igual a *110°.* É relevante destacar, que os procedimentos matemáticos só se tornaram evidentes após as modificações figurais (traçado da reta, designação da reta *t* e dos ângulos *x* e *y*), que permitiram as deduções. Mas, o que favoreceu essa descoberta? O esquema da Figura 18, mostra que a resposta a essa pergunta é a **expansão cognitiva figural**.

Figura 18 – Sinergia entre as apreensões e as funções discursivas



Fonte: os autores a partir de Cans, 2024, p. 155

A partir da leitura do problema (enunciado e figura, seta 1) revela-se uma apreensão perceptiva atentiva, que leva a visualizar na figura uma possibilidade de tratamento, essa visualização, através do olhar não icônico, provoca a ação de uma apreensão operatória (seta 2). Esta, leva a uma reconfiguração executando o traçado da paralela as retas *r* e *s*. Após o traço pontilhado, Figura 17b, a apreensão operatória continua atuando para identificar e designar a reta *t* e os ângulos *x* e *y* (papel da função referencial). Percebe-se que se está em meio a uma apreensão heurística, fusão da sinergia entre as apreensões perceptiva atentiva e operatória.

— A seta 3, que indica a atuação da função referencial, aponta tanto para o traçado e designação da reta *t* quanto para a identificação e designação dos ângulos *x* e *y*, para deixar claro que, neste momento de atuação da apreensão heurística, não se sabe o que veio primeiro: o traçado da reta pode ocorrer aleatoriamente em busca de uma saída para solucionar o problema, ou, contrariamente, os ângulos foram identificados apenas pelo olhar não icônico e o traçado da reta *t* serviu apenas de constatação (inferências, abduções).

Após todo esse processo, sem dúvida, acontece algo interessante. As expansões cognitivas figurais (seta 4) ocorrem para que se estabeleça as deduções:

a) o ângulo *x* e o ângulo *50º* são alternos internos (frases ou unidades apofânticas), portanto, são congruentes (expansão cognitiva figural – dedução), $x = 50º$;

b) o ângulo *y* e o ângulo *120º* são colaterais internos (unidades apofânticas), portanto, são suplementares (expansão cognitiva figural – dedução), $y + 120° = 180°$; e

c) *(x + y)* é o ângulo de vértice *P* menor que o seu replemento (unidades apofânticas), então, *(x + y)* é o menor ângulo de vértice *P* (expansão cognitiva figural – dedução).

Esse tipo de expansão pode ser classificado como **expansão cognitiva figural por similitudes semântica e externa,** vide Duval (1995, p. 135; 2004, p. 119), uma vez que, exigiu, neste caso, propriedades de um feixe de retas paralelas coplanares cortadas por uma transversal e a definição de ângulos replementares. Importante destacar ainda que, essa expansão ocorreu pela **operação de substituição** (seta 5), para os cálculos algébricos que levam a resposta *110°,* conforme classificação de Duval (1995, p. 129; 2004, p. 113).

Ressalta-se ainda que, ao traçar a reta *t* realiza-se uma mudança de dimensão, introduzindo uma reta (elemento 1D) em uma figura 2D, vide Figura 17b. No entanto, o que se deve considerar são as subfiguras que se formam, mantidas em 2D, que são os ângulos *x* e *y*, neste caso, caracterizando a operação de reconfiguração.

RUDIMENTOS CONCLUSIVOS

Este estudo hermenêutico do Capítulo IV, da obra de Duval, aponta que a aprendizagem da geometria decorre, fundamentalmente, da capacidade do estudante em coordenar, de forma simultânea e interativa, os registros semióticos figural e discursivo. A análise revela que um forte obstáculo a essa aprendizagem é o fenômeno da "falsa proximidade", no qual os tratamentos espontâneos advindos da apreensão perceptiva e da linguagem comum se mostram inadequados e insuficientes para a atividade matemática exigida.

Para superar tal barreira, o capítulo detalha a necessidade de desenvolver, através de percursos metodológicos focados na transformação do registro figural, a apreensão operatória das figuras, que transcende a percepção imediata. O que significa romper a visualização icônica e eliminar ou minimizar os obstáculos epistemológicos que dificultem a modificação da imagem, como por exemplo, a incongruência na conversão entre os registros semióticos. Para materializar estas modificações, que assumem as formas mereológicas, ópticas ou posicionais, são sugeridos tratamentos figurais específicos como a reconfiguração, a perspectivação e a desconstrução dimensional, que ampliam e permitem a utilização do potencial heurístico das figuras.

O autor no decorrer de seu trabalho traz à baila o papel nuclear do olhar, mais especificamente do olhar matemático, que não só é capaz de reconhecer e ampliar a capacidade heurística da representação figural, como também atua gerenciando o sincronismo entre os registros, tendo como ferramenta cognitiva as diversas apreensões, gestos cognitivos que foram renomeadas por Moretti e Cans seguindo indicativos do próprio Duval.

Também é evidente na obra de Duval, reforçada ao final do Capítulo IV, a preocupação quanto a tomada de consciência das funções discursivas, principalmente da função de expansão discursiva, que, em resposta, demandou a pesquisa de Cans (2025) particularizando este tipo de expansão e denominando-a expansão discursiva cognitiva figural, especialmente, para solução de problemas em geometria com figuras.

Conclui-se, por fim, que o raciocínio geométrico não emerge do tratamento isolado de um dos registros, mas da articulação sinérgica entre a heurística figural, capacidade de "ver" e manipular mentalmente as figuras, e a capacidade de levar o discurso matemático das abduções as deduções, sustentadas pela expansão discursiva cognitiva. Portanto, a obra de Duval, conforme discorrido neste estudo, advoga em favor de uma pedagogia que promova o treinamento explícito dessas operações semiocognitivas enfatizando a coordenação, conversão nos dois sentidos (figura-texto e texto-figura), como condição essencial para a construção do pensamento geométrico.

REFERÊNCIAS

BALACHEFF, N. Preuve et démonstration em mathématiques au collège. Recherches em Didactique des mathématiques, 3.3, 262-306, 1982.

CANS, Adalberto. O Momento Eureka – Expansão Discursiva Cognitiva Figural: gesto intelectual essencial à heurística de problemas de geometria à luz da teoria semiocognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval. São Paulo: Dialética, 2025.

DUVAL, Raymond. Les differents fonctionnements d'une figure dans une démarche geometrique. *Répères*. Pont-à-Mousson, Topiques éditions, n. 17, p. 121-138, 1994.

DUVAL, Raymond. Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Berné: Peter Lang, 1995.

DUVAL, Raymond. Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Trad. RESTREPO, M. V. Santiago de Cali: Universidad del Valle, 2004.

DUVAL, Raymond. Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives, n. 10, p. 5-53, 2005.

DUVAL, Raymond. Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registos de representações semióticas. Org. de: CAMPOS, Tânia M. M., Trad. de: DIAS, Marlene A., 1 ed., São Paulo: PROEM, 2011.

DUVAL, Raymond. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Trad. de: MORETTI, M. T., REVEMAT, v. 7, n. 2, p. 266–297, Florianópolis: UFSC/MTM/PPGECT, 2012. Disponível em: http://www.periodicos.ufsc.br/index.php/revemat.

DUVAL, Raymond. Como Analisar a Questão Crucial da Compreensão em Matemática? Trad. de: MORETTI, Méricles T., REVEMAT, v. 13, n. 2, p. 1–27, Florianópolis: UFSC/MTM/PPGECT, 2018. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2018v13n2p1

DUVAL, Raymond. As condições cognitivas da aprendizagem da geometria: Desenvolvimento da visualização, diferenciação dos raciocínios e coordenação de seus funcionamentos. [Tradução Cleide Ribeiro Mota Arinos; José Luiz Magalhães de Freitas; Méricles Thadeu Moretti]. REVEMAT, v. 17, p. 1–52, jan./dez. Florianópolis: UFSC/MTM/PPGECT, 2022. Disponível em: https://doi.org/10.5007/1981-1322.2020.e85937

LEAL, Felipe *et al*. Sistema de Ensino Anglo. Ensino médio, Multidisciplinar, Itinerários formativos. Caderno 2 – 1ª série, 1. ed., São Paulo: SOMOS, 2020.

MELLO, Elizabeth Gervazoni S. de. Demonstração: uma sequência didática para a introdução de seu aprendizado no ensino da geometria. Dissertação de mestrado, PUC-SP, 1999.

MORETTI, Méricles T. Semiosfera do olhar: um espaço possível para a aprendizagem da geometria. *Acta Scientiae*, v.15, n.2, p. 289-303, maio/ago., 2013.

MORETTI, Méricles T.; CANS, Adalberto. Releitura das Apreensões em Geometria e a Ideia de Expansão Figural a Partir dos Estudo de Raymond Duval. Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática – JIEEM, v. 16, n. 3, p. 303–310, 2024a. Disponível em: https://jieem.pgsscogna.com.br/jieem/article/view/10789.

MORETTI, Méricles T.; CANS, Adalberto. La mirada en geometría: relectura de las aprehensiones figurales diseñadas por Raymond Duval para el aprendizaje de la Geometría. *In*: MORETTI, Méricles. T. (org.). Florilegium de investigaciones que envuelven la teoría semiocognitiva de aprendizaje matemático de Raymond Duval – parte 3. Florianópolis: REVEMAT/UFSC, cap. V, p. 118–148, 2024b.

PADILLA, V. L'influence d'une acquisition de traitements purement figuraux por l'apprentissage des mathématiques. Thèse U.L.P.: Strasbourg, 1992.

PEIRCE, C. S. Semiótica. Trad. de: COELHO NETO, J. T., 4 ed., São Paulo: Perspectivas, 2017.

SHEPARD, R. N.; METZLER, J. Mental rotation of three dimensionnal objects. Science, 171, 701-703, 1971.

NOTAS DA OBRA

Título da Obra
Sobre o livro "Semiose e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagem intelectual" de Raymond Duval – estudo hermenêutico do Capítulo IV

Adalberto CANS
Doutor em Educação Científica e Tecnológica/UFSC
Secretaria de Estado da Educação de Rondônia
Porto Velho, Brasil
Adalbertocns12@gmail.com

https://orcid.org/0000-0001-7580-6373

Adriano MOSER
Mestre em Educação Matemática/UDESC
Secretaria de Estado da Educação de Santa Catarina
Balneário Piçarras, Brasil
moseradrianomtm@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-6440-7801

Méricles T. MORETTI
Doutor em Educação Matemática - Universidade de Estrasburgo, França
Universidade Federal de Santa Catarina
Florianópolis, Brasil
mthmoretti@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-3710-9873

Agradecimentos
CNPq

Publisher
Sociedade Brasileira de Educação Matemática, Regional de Santa Catarina (SBEM/SC). As ideias expressadas neste artigo são de responsabilidade de seus autores, não representando, necessariamente, a opinião dos editores ou da universidade.