

Sobre o livro “*Sémiosis e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagem intelectual*” de Raymond Duval - estudo hermenêutico do capítulo III

About the book "Semiosis and human thought: semiotic registers and intellectual learning" by Raymond Duval - hermeneutic study of chapter III

Sobre el libro "Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizaje intelectual" de Raymond Duval - estudio hermenéutico del capítulo III

DOI: 10.37001/recem.v4i5.4727

Recebimento: 02/09/2025

Aprovação: 05/12/2025

Publicação: 13/12/2025



Saddo Ag ALMOULOU

Doutor em Matemática e aplicações

Universidade Federal do Pará, Belém, Brasil

saddoag@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0002-8391-7054>

Resumo: O texto que segue resulta de um estudo hermenêutico do capítulo III “Língua natural e língua formal” do livro “*Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissage intellectuels*” de Raymond publicado em 1995 em francês, e em 2004 na primeira versão em espanhol. O que se pretendeu neste estudo foi depreender os elementos teóricos da língua natural e da língua formal que impactam os processos de ensino e aprendizagem de conceitos matemático.

Palavras-chave: Estudo Hermenêutico; Língua natural, língua formal; Aprendizagem Matemática.

Abstract: The following text is the result of a hermeneutic study of chapter III "Natural language and formal language" of "*Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissage intellectuels*" by Raymond published in 1995 in French, and in 2004 in the first version in Spanish. The aim of this study was to infer the theoretical elements of natural language and formal language that impact the teaching and learning processes of mathematical concepts.

Keywords: Hermeneutic Study; Natural language, Formal language; Mathematical Learning.

Resumen: El siguiente texto es el resultado de un estudio hermenéutico del capítulo III "Lenguaje natural y lenguaje formal" de "*Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissage intellectuels*" de Raymond publicado en 1995 en francés, y en 2004a en la primera versión en español. El objetivo de este estudio fue inferir los elementos teóricos del lenguaje natural y el lenguaje formal que impactan en los procesos de enseñanza y aprendizaje de conceptos matemáticos.

Palabras Clave: Estudio hermenéutico; Lenguaje natural, Lenguaje formal; Aprendizaje matemático.

1. INTRODUÇÃO

Neste texto, são revisadas as ideias de Duval (1995) expostas no capítulo III “Língua natural e língua formal” do livro “Sémiosis et pensée humaine”.¹ O estudo parte da observação do aumento do simbolismo científico, do desenvolvimento das linguagens formais e da crescente distinção entre diferentes usos da língua natural, como o uso cotidiano nas interações, o uso especializado em áreas do conhecimento e o uso literário. De acordo com o autor, esses aspectos indicam a necessidade de analisar a língua sob uma perspectiva teórica e didática. Ele destaca que questões relacionadas à natureza da língua, ao seu papel nos processos de pensamento e ao seu ensino devem considerar a diversidade de discursos e usos da língua natural, bem como a presença de símbolos das linguagens formais.

Duval (1995) afirma **que** a escrita simbólica utilizada na lógica, cuja origem está relacionada à escrita conceitual de Frege, é composta por quatro tipos de unidades elementares: letras que representam funções proposicionais, símbolos quantificadores, letras para variáveis (ligadas ou livres) e símbolos de operadores ou conectores proposicionais. Essas unidades pertencem a diferentes segmentos do cálculo lógico. O cálculo proposicional opera separadamente do cálculo dos predicados e utiliza apenas os símbolos de conectores e as letras das proposições. A escrita própria do cálculo proposicional pode ser considerada suficiente para certas funções discursivas, como a função apofântica e a função de expansão discursiva. No entanto, para que esse registro também desempenhe uma função referencial, é necessário utilizar um sistema de notação semelhante ao do cálculo de predicados. Dessa forma, obtém-se uma escrita capaz de realizar três funções discursivas, podendo ser classificada como língua. Com essas três funções, é possível expressar, desenvolver ou controlar conhecimentos. Por esse motivo, a escrita que integra conectores proposicionais, predicados, variáveis e quantificadores é adotada em áreas como matemática e linguística (Ducrot, 1972, apud Duval, 1995). Tal abordagem caracteriza o protótipo das linguagens formais². Embora uma língua formal possa desempenhar funções discursivas semelhantes às da língua natural, sua estrutura não possui equivalência estrutural com as linguagens naturais (Duval, 1995, 2004).

¹ Este artigo faz parte de um conjunto de textos que estão sendo produzidos acerca da obra “Semiose e Pensamento Humano” de Raymond Duval e serão publicados ao longo deste ano na RECEM. Cada artigo irá discutir um dos capítulos da obra para que juntos possam ser um guia de estudos da teoria de Duval.

² É possível conceber linguagens formais mais complexas, por exemplo, operadores como o $\vdash$ de Hilbert, ou um sinal que marca a identidade entre as variáveis (Quine, 1950, p. 238). Mas, embora isso ofereça novas possibilidades no registro formal para melhor levar em conta certos pressupostos do uso das línguas naturais (existência e unicidade), isso não altera o problema da articulação entre os dois registros, tal como aparece com o cálculo dos predicados e das proposições.

O autor afirma que a língua formal carece de um léxico sistemático ou associativo capaz de atender à função referencial. Não existe um conjunto definido de símbolos nominativos para predicados primitivos que permita nomear demais elementos por meio de combinações ou associações. Dessa forma, não é possível identificar objetos de forma individual por categorização, descrição ou mesmo construção, como ocorre na notação posicional dos números inteiros naturais. Para viabilizar sua aplicação em matemática ou outros campos do conhecimento, a língua formal exige a complementação por um simbolismo característico ou por um léxico sistemático.

A estrutura rêmica e a funcional de uma proposição apresentam heterogeneidade, acentuada pelo uso dos chamados conectores proposicionais em línguas formais. Diferente das conjunções naturais, esses conectores representam funções de verdade, designando partições específicas de pares de valores de verdade, e devem ser lidos como listas de casos aceitos ou excluídos, não como palavras em uma frase. (Duval, 1995, 2004).

O autor afirma que uma língua formal permite apenas substituição para expandir o discurso, ao contrário das línguas naturais, que aceitam acumulação. Ainda acrescenta:

Vemos, portanto, os obstáculos estruturais inerentes à passagem de um registro linguístico para outro para cada uma dessas três funções discursivas. Os mais sérios dizem respeito, evidentemente, às funções referencial e apofântica, uma vez que a função de expansão discursiva abrange os tratamentos internos a cada registro. Nessas condições, como converter a expressão de um enunciado em língua natural em uma expressão “equivalente” da língua formal? (Duval, 1995, p.138-139, 2004, p.126)

O autor ainda assevera que, embora essa questão possa inicialmente parecer secundária diante da autonomia dos procedimentos próprios de cada um dos dois registros, seu papel torna-se relevante no contexto do ensino de lógica e da interpretação das expressões e operações realizadas entre esses registros. Nesses cenários, torna-se imprescindível articular ambos os registros, seja para evitar confusões que comprometem a correta abordagem da língua formal, seja para atribuir significado ou controlar o alcance dos procedimentos empregados em cada registro.

Duval (1995, 2004) examina os obstáculos associados a essa articulação, especialmente aqueles vinculados à função referencial, limitando-se a explicar por que sua aprendizagem deve ocorrer em articulação com um registro distinto do da língua natural.

2. FORMAS ASSOCIADAS ÀS FUNÇÕES REFERENCIAL E APOFÂNTICA EM UMA LÍNGUA FORMAL

Na ausência de léxico, a operação diretamente associada à função referencial é a designação, caracterizada pelo uso arbitrário de caracteres para predicados. Essa operação, no entanto, não se mostra suficiente. A ausência de mecanismos de categorização e descrição nas linguagens formais é compensada pela utilização da predicação, realizada por meio de quantificadores que conectam as variáveis dos argumentos livres do predicado. Assim, *a função referencial em uma língua formal é executada por meio da função apofântica*. Isso ocorre independentemente de a língua formal ser enriquecida ou não com um léxico sistematizado. A subordinação da função referencial à função apofântica acarreta dificuldades, como a incongruência na conversão de uma expressão em língua natural, já que as formas de expressão referencial coincidem com aquelas associadas à função apofântica. (Duval, 1995, 2004)

As formas de expressão associadas à função apofântica possuem uma estrutura de função proposicional e apresentam quantidade limitada. É possível enumerá-las exaustivamente considerando o elemento comum que organiza todas as variações da forma apofântica: o predicado. As variações importantes são:

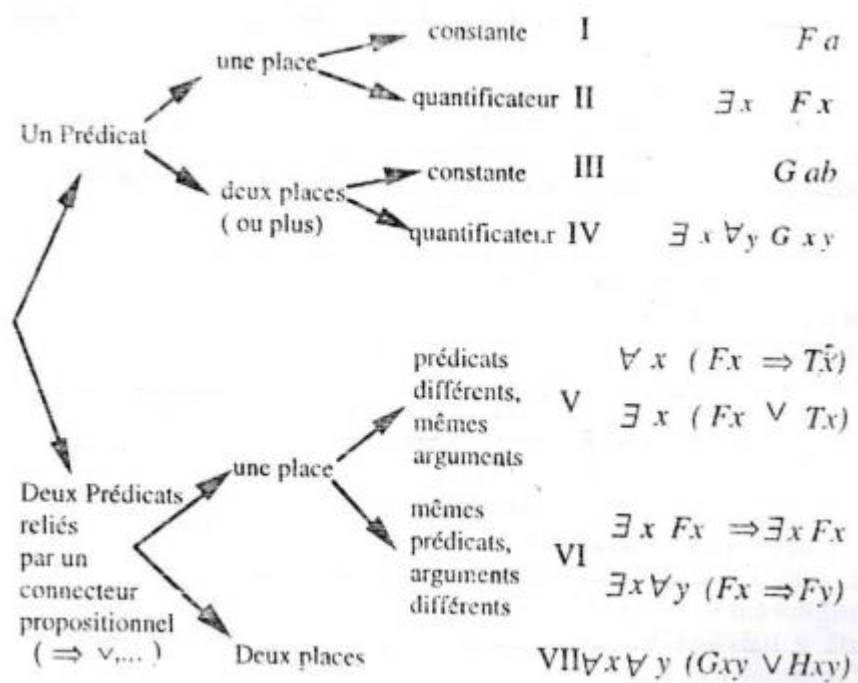
- a presença de um único predicado ou de vários ligados entre si por conectores de forma a constituir uma única unidade apofântica
- o número de lugares livres do predicado.
- a presença ou ausência de quantificadores. Quando há apenas uma ocorrência de um predicado,
- a ocorrência dos mesmos argumentos ou de argumentos diferentes, quando há duas ocorrências de predicado em um lugar. (Duval, 1995, p. 140, 2004. p.164)

O autor ainda afirma que a articulação dessas distintas variações possibilita a preservação de sete formas apofânticas fundamentais, conforme ilustrado na Figura 1. Cabe ressaltar que as expressões com variáveis livres não são consideradas, pois não podem ser associadas à função apofântica. As estruturas em que um conector relaciona um predicado de um lugar a outro de dois lugares podem ser simplificadas para a ligação entre dois predicados de dois lugares. Ademais, a alteração do conector não modifica o tipo de estrutura funcional da forma de expressão.

As expressões referenciais e apofânticas da língua natural podem ser traduzidas para a língua formal utilizando uma das sete formas básicas (Figura 1) ou suas combinações. A correspondência entre essas formas básicas e as expressões da língua natural apresenta desafios, não apenas pela variedade de formas das expressões referenciais e apofânticas na língua natural,

mas também pelas possíveis diferenças de significado, mesmo quando as estruturas são semelhantes. Existem, na língua natural, enunciados temáticos cuja organização interna se assemelha à das formas básicas de estrutura funcional, conforme exemplificado na lista abaixo. (Duval, 1995, 2004)

Figura 1 - As formas apofânticas funcionais de base



Fonte: Duval (1995, p.141, 2004, p. 167)

- (1) Luís XIV é careca.
- (2) O rei da França era careca (Russel 1905, p.483).
- (3) Romeu ama Julieta.
- (4) Há alguém que todos amam (Kleene 1967, p.82).
- (5) Há um quadro n' e que todos os críticos admiram (Quine, 1950, p. 150).
- (6) Todos aqueles que traçam um círculo traçam uma figura (Quine, 1950, p. 150) (Duval, 1995, p.140, 2004, p.166).

O autor assevera que, ao converter essas declarações para uma língua formal, é possível estabelecer duas constatações principais: enunciados similares, como (1) e (2) ou (4) e (5), não podem ser traduzidos por estruturas pertencentes às mesmas formas apofânticas básicas. Para certos enunciados, pode ser viável realizar uma correspondência termo a termo entre os elementos da expressão em língua natural e aqueles presentes na língua formal. Contudo, para outros casos, essa correspondência direta se mostra inviável. Assim, a transposição de um registro de expressão para outro frequentemente exige a utilização de uma representação intermediária.

Essas constatações feitas por Duval (1995, 2004) evidenciam a dificuldade de unir língua natural e formal. A proximidade das expressões em língua natural dificulta sua tradução para o registro formal, pois faltam referências claras. Além disso, não há método definido para criar uma representação intermediária quando necessário.

A passagem em sentido inverso é comumente percebida como menos complexa; contudo, observa-se que, na maioria das situações, tal percepção não se confirma, uma vez que resulta em uma combinação pouco eficiente dos dois registros. Nesta perspectiva,

Pode-se então realmente relacionar a variação das formas apofânticas básicas na língua formal com a variação das formas referencial e apofântica na língua natural? A possibilidade de uma decompartimentalização cognitiva dos dois registros de representação depende da resposta a essa pergunta. Ora, sem uma decompartimentalização cognitiva desses dois registros, o aprendizado da lógica tem poucas chances de sucesso e, em todo caso, revelar-se-á sem interesse para outros aprendizados em matemática ou em português. (Duval, 1995, p.142, 2004, p. 168, tradução nossa)

O autor faz uma pergunta à luz dessa citação: “É então possível relacionar a variação das formas apofânticas básicas na língua formal com a das formas referencial e apofântica na língua natural?” (Duval, 1995, p. 142) e assevera que a possibilidade de ocorrer uma decompartimentalização cognitiva entre os dois registros de representação está relacionada à resposta dessa questão. Caso não haja essa decompartimentalização cognitiva, o aprendizado da lógica tende a apresentar baixa eficácia e relevância para outros processos de aprendizagem em matemática ou língua portuguesa. Assim,

Para identificar a possibilidade de relacionar formas de expressão nos dois registros, precisamos partir novamente do elemento comum a todas as formas apofânticas básicas na língua formal, o predicado. O primeiro problema a resolver é, portanto, o seguinte: com que elemento(s) de uma unidade apofântica da língua natural, ou seja, com que parte do discurso ou com que categoria de palavras em uma frase, um predicado pode ser colocado em correspondência? (Duval, 1995, p.142, 2004, p. 168, tradução nossa).

Para o autor, adjetivos e substantivos como atributos correspondem a predicados de uma posição, enquanto verbos relacionais correspondem a predicados com duas ou três posições, estabelecendo uma regra simples de codificação lexical. Substantivos em posição referencial ou como complementos de verbos de relação podem ser vistos como argumentos e, por isso, devem ser codificados por uma letra constante ou um quantificador que vincula uma variável. Essa abordagem foi adotada por Kintsch ao representar textos em língua natural exclusivamente por meio da notação do cálculo de predicados, a fim de modelar o processo de compreensão

textual (Kintsch, 1972,1974, 1978; Kintsch e van Dijk, 1978 apud Duval, 1995) nas línguas formais. De fato, considerando que a função referencial só pode ser satisfeita pela função apofântica, há a necessidade de se estabelecer uma correspondência entre substantivos e predicados (Duval, 1995, 2004).

Esta segunda regra de codificação lexical é necessária se quisermos relacionar enunciados em língua natural com proposições em língua formal. Mas esta segunda regra introduz um importante fator de não congruência entre as expressões dos dois registros: um substantivo acompanhado por um determinante será reduzido por uma proposição de existência (Duval, 1995, p. 143, 2004, p.168).

A transição de um registro para outro tem início com a aplicação das duas regras de codificação lexical. A utilização dessas duas regras possibilita a classificação das expressões em língua natural em dois grupos distintos: o primeiro abrange aquelas cuja conversão demanda apenas a primeira regra, enquanto o segundo compreende as que exigem também a segunda regra. (Duval, 1995, 2004).

Pode-se então constatar que a simples aplicação dessas duas regras orienta para formas apofânticas básicas muito diferentes na língua formal para enunciados muito próximos na língua natural.

A aplicação dessas regras faz com que as formas I e V da Figura 1 correspondam às expressões (1) e (2), respectivamente. A não congruência resultante dessas codificações lexicais, aparentemente simples, será analisada a seguir.

3. ESCOLHA DAS CORRESPONDÊNCIAS INICIAIS ENTRE A LÍNGUA NATURAL E A LÍNGUA FORMAL

3.1. Congruência da primeira regra

Duval (1995, 2004) ressalta que a primeira regra é suficiente para converter enunciados compostos exclusivamente por nomes próprios e um único verbo. Esse procedimento aplica-se aos enunciados (1) e (3) mencionados anteriormente. O autor afirma que

O verbo “amar” corresponde à função proposicional “...ama...”; “Romeu ama Julieta”, “Julieta ama Romeu”... Transcrevendo-o pela letra predicativa A e dando às letras r e j o status de “variáveis livres mantidas constantes” (Kleene, 1967, p. 111), obtemos as seguintes unidades apofânticas (forma básica III):

Romeu ama Julieta → (Arj)

Julieta ama Romeu → (Ajr)

Romeu e Julieta s’ amam → {(Arj).(Ajr)} (Duval, 1995, p.144, 2004, p.169).

Nesses casos, a mudança de registro é simples e há congruência entre língua natural e escrita formal. Os termos e suas ordens se correspondem, e o uso de conectores proposicionais para adaptar afirmações é natural nesse contexto. A congruência desta primeira regra explica-se pelo fato de que ela leva em consideração, em cada um dos dois registros, apenas os elementos relevantes para a operação de predicação. E essa operação é comum aos dois registros (cap. II, tabela 2, p. 114) (Duval, 1995, 2004).

3.2. A não congruência induzida pela segunda regra

A questão sobre transformar substantivos atualizados por determinantes ou complementos determinativos em entidades existentes foi discutida por Russell. O debate consiste em saber se afirmações com expressões referenciais sem objeto existente são falsas ou apenas absurdas, ou seja, se possuem valor de verdade ou apenas valor epistêmico (Duval, 1995, 2004). O autor afirma que

Frege defendia que as afirmações declarativas cujas expressões em posição referencial não designavam nenhum objeto existente eram absurdas. Ora, a armadilha de tal tese é que ela leva a confundir afirmações verossímeis, mas falsas, com afirmações absurdas. Isso equivale a rejeitar o valor epistêmico “verossímil” e, consequentemente, reduzir o possível não realizado ao impossível. (Duval, 1995, p. 145, 2004, p. 170, tradução nossa).

Russell (1905 apud Duval, 2005, 2004) sugeriu converter expressões referenciais em proposições de existência, para evitar consequências paradoxais. Uma afirmação atributiva, como a afirmação (2), é convertida em uma proposição de existência que utiliza um predicado formado pela coordenação de dois predicados. Ao transcrever a descrição “rei da França” por R e “ser careca” por C, obtém-se a seguinte forma apofântica (forma básica ou tipo V da Fig. 1) para o enunciado (2’).

$$(2') \exists x \{R x. Cx\} \text{ (Duval, 1995, p. 145, 2004, p. 170)}$$

Esta transcrição (2') oferece a vantagem de demonstrar que a afirmação (2) não corresponde aos fatos. Entretanto, é possível observar de imediato dois pontos relevantes. Primeiramente, a conversão de um substantivo em predicado envolve, de forma automática, o uso de variáveis vinculadas por um quantificador (Duval, 1995, 2004). Portanto, o autor assevera que essa transcrição exclui o uso de constantes, pois

A expressão em posição referencial na afirmação (2) não pode ser traduzida por uma forma do tipo I (como a afirmação (1), que se transcreve como $Ca(1')$, sendo a designando Luís XIV) ou do tipo III (como a afirmação (4)), mas apenas por uma forma do tipo I ou IV. Vemos, portanto, a diferença de natureza entre a conversão de um substantivo ao qual se atribui uma unidade apofântica e a conversão de um verbo ou adjetivo ao qual se atribui uma letra de predicado. (Duval, 1995, p. 145, 2004 p. 170).

Em segundo lugar, a forma do tipo $H(3x Ra)$ não deve ser traduzida para a língua natural como uma afirmação de existência, mas sim por meio de um substantivo atualizado ou de uma descrição definida. É reconhecidamente complexo estabelecer uma correspondência direta entre uma afirmação da língua natural e uma estrutura do tipo II. Leituras comumente utilizadas, tais como “existe pelo menos um rei da França”, apresentam características de expressão mista. Essas leituras tendem a reforçar e ocultar o fenômeno da não congruência, o qual gerou debates quanto à adequação dessa correspondência entre substantivo ou descrição e predicado. A equivalência traçada entre uma unidade referencial na língua natural e uma unidade apofântica na língua formal resulta em uma inversão de prioridade entre as duas condições necessárias para que uma expressão designe um objeto sem ambiguidade: a existência desse objeto e sua unicidade no universo do discurso, independentemente de esse universo estar restrito ao contexto imediato ou incluir um conjunto ampliado de objetos possíveis. (Duval, 1995, 2004)

O autor acrescenta que, em uma expressão de língua natural, os substantivos atualizados pressupõem a existência e singularidade do objeto ou dos objetos que nomeiam. Essas duas premissas correspondem à identificação do referente da frase, o que possibilita, em uma segunda expressão, a referência por meio de pronomes pessoais, relativos ou demonstrativos. Nesse uso da função referencial, a questão da existência do referente tem relevância secundária.

O nome atua não como uma designação de propriedade atribuída a determinado indivíduo, mas como a identificação de uma classe sobre a qual se realiza a quantificação, sendo assim parte do universo considerado no discurso. Dessa forma, o uso desse nome implica que o interlocutor reconheça a existência dessa classe, isto é, que ela não seja vazia. (Ducrot, 1972, apud Duval, 1995, 2004).

A questão da existência do referente sobre o qual se faz uma afirmação ou negação e que se relaciona apenas ao valor de verdade de cada enunciado considerado isoladamente é colocada em segundo plano em função do desenvolvimento do discurso. O pressuposto de unicidade é fundamental para a estruturação discursiva, pois possibilita a designação e identificação de objetos (Ducrot, 1972, apud Duval, 1995, 2004). Além disso, permite estabelecer um sistema de referências e qualificações distintas que contribuem para a coerência temática e a continuidade do discurso (Charolles, 1978, apud Duval, 1995). O uso substantivo

do nome estabelece, no contexto dialógico, um universo de objetos, determinando um objeto (ou grupo de objetos) específico que passa a ser o tema central do discurso. Essa determinação ocorre por meio de “redução contextual” ou “redução de extensão” (Ducrot, 1972, apud Duval, 1995) que Duval (1995, p.147) denominou de “*unicidade de ancoragem*”. No entanto,

[...] quando passamos para o registro da língua formal, a situação é completamente diferente. Podemos ver, na passagem da afirmação (2) para a proposição (2'), que *apenas a suposição de existência foi mantida*:

$\exists x$ (há pelo menos um ...)

Em contrapartida, a unicidade deve ser objeto de uma proposição explícita que imita o quantificador existencial, como em:

$\exists x \forall y (Ry \Rightarrow x = y)$ ("há pelo menos um e no máximo um")

Em outras palavras, *o agrupamento por uma variável muda de um quantificador existencial e uma letra de predicado não nomeia um objeto. Não permite designá-lo e, por consequência, identificá-lo*. Para ver bem esse contraste das condições de referência entre os dois registros, basta considerar a seguinte afirmação: (5) Há um quadro que todos os críticos admiram. (Duval, 1995, p. 147, 2004, p. 172)

O autor afirma que duas interpretações podem ser consideradas. A primeira aborda a “unicidade de ancoragem”: o enunciado refere-se a um quadro específico que pode ser identificado por quem o enuncia, sendo entendido como uma afirmação e levando à pergunta "qual?". A segunda interpretação considera a suposição de existência: nesse caso, o enunciador não designa um quadro específico, mas descarta a possibilidade de desacordo entre os críticos sobre um ou mais quadros. Assim, a afirmação é compreendida como uma exclamação: "há mesmo um quadro que todos os críticos admiram!". Na ausência de indicações específicas do contexto, como entonação ou enunciados anteriores, a primeira interpretação tende a ser mais imediata, enquanto a segunda necessita de marcas adicionais de entonação, que reforcem a forma representativa ("há um... que..."). Por esse motivo, quando a unicidade não é possível, o pressuposto existencial precisa ser explicitado por meio de uma estrutura representativa.

A inversão de prioridade entre as condições estabelecidas por uma referência contribui para o aumento da não congruência ligada à subordinação da função referencial à função apofântica. Além disso, há outro elemento que potencializa essa discrepância na conversão de enunciados da língua natural para a língua formal: a organização não sintagmática da sequência linear dos símbolos (Duval, 1995, 2004).

4. NÃO CONGRUÊNCIA ENTRE A ORGANIZAÇÃO SINTAGMÁTICA DE UMA SÉRIE DE PALAVRAS E A ORGANIZAÇÃO NÃO SINTAGMÁTICA DE UMA SÉRIE DE SÍMBOLOS

Duval (1995, 2004) assevera que a compreensão de uma expressão ocorre ao agrupar sinais em unidades de significado, ao invés de analisar cada símbolo individualmente. Na língua natural, esses agrupamentos, chamados de “sintagmas”, geralmente envolvem símbolos consecutivos (formas básicas do tipo IV). Já na língua formal, os símbolos a serem agrupados podem não ser consecutivos, tornando o processo mais complexo, pois um simples percurso linear não basta para identificá-los. Esse aspecto não sintagmático é comum em formas básicas do tipo V ou VI (formas compostas por pelo menos dois predicados), gerando uma não congruência estrutural.

4.1. Um entrecruzamento de agrupamentos de símbolos

O contraste entre o enunciado “todos aqueles que traçam um círculo traçam uma figura” e sua formulação em língua formal é característico desse fenômeno. O verbo “traçar” ocorre duas vezes com o mesmo sujeito, justificando o uso repetido do mesmo predicado binário e dos mesmos argumentos na tradução formal. Denotamos por “ Tyx ” a função proposicional “...traçam...”. (Duval, 1995, p. 149, 2004, p. 173)

O autor destaca que a notação do substantivo atualizado “um círculo” exige o emprego de três elementos distintos: uma letra de predicado C , que representa o conjunto de objetos com a propriedade de ser um círculo; um quantificador $\exists$, responsável por assegurar que esse conjunto não seja vazio; e uma letra de variável repetida, utilizada para conectar a posição livre do predicado ao quantificador. Isso dá: $\exists x Cx$.

O mesmo procedimento pode ser seguido para indicar “uma figura”: $\exists x Fx$. Essas duas formas apofânticas, do tipo II, traduzem dois substantivos atualizados e serão os argumentos, respectivamente, das duas ocorrências de Tyx . Notemos, finalmente, $\forall y$ para traduzir “todos aqueles”. A afirmação (6) assume então a seguinte forma:

$$(6') \forall y \{ \exists x (Cx.Tyx) \Rightarrow \exists x (Fx.Tyx) \}$$

Um fenômeno próprio dessa escrita e que contraria as regras de funcionamento próprias da língua francesa aparece então: a ocorrência da letra x na segunda ocorrência de Tyx não se refere aos mesmos objetos que a ocorrência da letra x na primeira ocorrência de Tyx ! Isso se deve ao fato de que a letra x tem, aqui, um papel de “variável muda”. Semioticamente, a letra x funciona como um arco ligando os caracteres $\exists$, F , T , cujo agrupamento é o único que pode dar uma expressão

interpretável na língua natural: (aqueles que traçam um círculo). Após o sinal de implicação, a variável muda x agrupa os caracteres $\exists$, F , T , para formar outro agrupamento: “ceux qui tracent une figure” (aqueles que traçam uma figura). (Duval, 1995, p. 149, 2004, p. 173-174).

Ainda observa que, em vez da letra x , poder-se-ia usar outra letra e evitar essa repetição enganosa.

Mas isso não altera o fenômeno essencial. *O registro da escrita de uma língua formal é caracterizado por essa função de variável muda atribuída a um certo tipo de elemento, enquanto nem as expressões da língua natural, nem as expressões da álgebra elementar admitem a possibilidade de tal função para um de seus elementos constituintes.* (Duval, 1995, p. 150, 2004, p. 174, destaque do autor).

Por fim, o fato de os conteúdos desses dois agrupamentos terem uma determinação semântica comum, ou seja, o conjunto de indivíduos a que os dois sujeitos gramaticais se referem, é indicado pela variável muda y , que agrupa símbolos pertencentes à proposição antecedente e à proposição consequente da implicação.

A organização sintática de uma expressão em língua formal resulta na combinação de símbolos pertencentes a diferentes agrupamentos. Esse processo difere do encaixe observado na língua natural, que ocorre quando um sintagma está incluído em outro sintagma do qual faz parte, como nas frases relativas cujo antecessor se encontra na posição de sujeito gramatical. Esse tipo de entrelaçamento pode dificultar a identificação dos agrupamentos. Enquanto nas línguas naturais a estrutura da frase pode ser determinada pela leitura linear dos símbolos, na proposição (6') essa abordagem não permite decifrar sua organização. É necessário realizar retrocessos e saltos para distinguir os agrupamentos dos dois tipos de unidades: quantificadores e predicados. “*É necessário, portanto, um percurso não linear do que se apresenta como uma sequência linear análoga à de uma frase em língua natural*” (Duval, 1995, p. 150, 2004, p. 175).

Para o autor, a compreensão das formas básicas requer um estudo específico, que não pode ser alcançado apenas por orientações iniciais em uma aula de lógica; é necessário considerar ambos os registros da língua.

4.2. Duas ordens independentes de ocorrência das unidades correspondentes, para uma mesma unidade apofântica, nas expressões de cada registro

Todos os termos que expressam relações, sejam verbos ou adjetivos empregados com o verbo "ser", são representados por predicados de dois ou mais lugares. As variáveis desses predicados só podem ser vinculadas por meio de uma combinação de quantificadores. Especificamente para predicados de dois lugares, resultam quatro sequências distintas de símbolos para um mesmo predicado, utilizando os dois quantificadores $\forall$ e $\exists$. Essas quatro sequências refletem um cruzamento entre as posições dos quantificadores e das variáveis na ordem em que aparecem. Para ler uma forma do tipo IV, é necessário considerar duas ordens de símbolos, pois cada sequência expressa proposições distintas. A troca desses elementos pode mudar o valor de verdade da proposição e seu significado. (Duval, 1995).

Duval (1995, p. 151, 2004, p. 175-176) apresenta

[...] por exemplo, a afirmação “todo mundo ama alguém”. Notando A o predicado de dois lugares “... ama ...”, e tomando a expressão “todo mundo” num sentido distributivo, a proposição correspondente em língua formal é (Kleene, 1967, p. 82):
 $\forall x \exists y (Axy)$

Essa proposta não deve, evidentemente, ser confundida, nos planos semântico e lógico, com as outras três propostas que se obtêm pela permutação dos quantificadores, das variáveis ou de ambos. Mas também não deve, no plano da identificação perceptiva. Pois a permutação dá formas que apresentam estritamente a mesma sucessão categorial de símbolos (quantificador-variável-quantificador-variável e predicado-variável-variável) e o mesmo conjunto de símbolos $\{\forall, \exists, A, x, y\}$. *As semelhanças semióticas de organização prevalecem, portanto, sobre as diferenças.* (destaque do autor, tradução nossa)

O autor ainda afirma que para distinguir as formas obtidas por permutação, é necessário comparar a ordem de ocorrência das variáveis após os quantificadores com sua ordem após o predicado. Nas expressões correspondentes da língua natural, não há risco de confusão em relação à identificação e discriminação (Tabela 1). As expressões não são transformadas umas nas outras pelo mesmo procedimento. No registro formal, a mesma variação é alcançada através de quatro procedimentos distintos: inversão gramatical entre sujeito e complemento, transformação antonímia de adjetivos e uso de locuções representativas. As diferenças entre as quatro expressões na língua natural refletem formas diversas.

Tabela 1 - Não-congruência das formas que base envolvendo predicados de dois lugares com enunciado em língua natural

Escrita simbólica	Leitura misturando os dois registros	Língua natural
1. $\forall x \exists y (Axy)$	Qualquer que seja x, existe pelo menos um y tal que x ama y.	Todo mundo ama alguém
2. $\forall y \exists x (Axy)$	Qualquer que seja y, existe pelo menos um x tal que x ama y.	Todo mundo é amado por alguém
3. $\exists y \forall x (Axy)$	Existe pelo menos um y tal que, para todo x, x ama y.	Há alguém que todo mundo ama (Há alguém que é amado por todo mundo)
4. $\exists x \forall y (Axy)$	Existe pelo menos um x, tal que, para todo y, x ama y	Há alguém que ama todo mundo

Fonte: Duval, 1995, p. 152, 2004, p. 176.

O autor assevera que uma permutação dos símbolos de uma forma básica do tipo IV (fig. 1) resulta em quatro proposições distintas. Essas variações geram proposições que correspondem a diferentes enunciados na língua natural. Cada um desses enunciados pode ser obtido por meio de uma variação sistemática no registro da língua natural.

Ainda afirma que o procedimento de variação na língua natural gera um conjunto de frases superior ao número de proposições resultantes da simples permutação de símbolos. Algumas dessas frases, que descrevem a mesma situação, apresentam o mesmo valor lógico. Cabe destacar que não existe correspondência direta na ordenação das unidades combinadas entre a expressão formal e a expressão natural, o que pode acarretar riscos de equívocos durante a transição entre esses registros. Apenas a exploração analítica das variações entre as duas abordagens possibilita um aprendizado lógico capaz de minimizar tais riscos e promover a coordenação adequada entre os dois domínios.

Se compararmos agora as expressões das afirmações nos dois registros, podemos observar que:

- Os enunciados 1 e 4 expressam relações diretas, e as afirmações 2 e 3 expressam as respectivas inversões. A passagem de uma relação direta para a sua inversão é marcada, na língua formal, pela inversão da ordem de ocorrência das variáveis silenciosas após os quantificadores e, na língua natural, por uma transformação passiva.
- Os enunciados 1 e 4 expressam duas determinações diferentes do conjunto inicial e do conjunto final para a mesma relação “... gosta de...” . Isso é marcado, na língua formal, pela inversão da ordem dos quantificadores e, na língua natural, pela inversão dos termos na posição de sujeito gramatical e complemento, bem como por uma formulação representativa que explicita o pressuposto existencial (Duval, 1995, p. 153, 2004, p. 177).

O autor observa que os procedimentos parecem semelhantes nos dois registros, mas o efeito do sentido é totalmente diferente, como pode ser evidenciado no exemplo que segue:

Enunciado 1		Enunciado 4	
$\forall x$	$\exists y$	$\exists x$	$\forall y$
Todo mundo	alguém	alguém	todo mundo

Duval (1995, 2004) observa que a expressão “**todo mundo**” corresponde ao único símbolo “ $\forall$ ” e o pronome indefinido “*alguém*” ao único símbolo “ $\exists$ ”. Ele reforça que

A leitura da expressão em língua formal obriga a agrupar o símbolo do quantificador com uma letra variável, de modo que formem uma unidade. A mesma expressão “todo mundo” é traduzida por dois sintagmas diferentes nas frases 1 e 2: $\forall x$ e $\forall y$. Às vezes, essa ruptura é invocada para denunciar as ambiguidades da língua natural e afirmar as vantagens de uma língua formal. Mas há menos alunos ou estudantes que correm o risco de confundir semanticamente as afirmações 1 e 4 se elas forem expressas em língua natural do que se fossem expressas em língua formal! O risco de confusão semântica, na língua natural, só aparece quando há inversão do sujeito sem forma representativa, como nos enunciados 1 e 3. (Duval, 1995, p.153, 2004, p. 177-178).

Ainda acrescenta que os enunciados 1 e 3, quando expressas em língua natural, apresentam uma similaridade: o pronome “alguém” figura como objeto na disposição sintática de 1, introduzido por “há...”, mantendo seu posicionamento na sequência da frase. A inversão observada decorre exclusivamente da estrutura representativa, porém acarreta um impacto sutil sobre a referência do pronome. O termo “alguém” pode designar diferentes indivíduos, dependendo do contexto. Essa distinção é evidenciada em língua formal pela inversão dos pares “ $\forall x$ ” e “ $\forall y$ ”. De modo semelhante, observa-se analogia entre os enunciados 2 e 4, nas quais “alguém” atua como agente do verbo “amar”. Tal correlação não ocorre ao acaso, mas reflete efetivamente as duas relações de implicação que articulam essas estruturas linguísticas: $(4) \rightarrow (2)$ e $(3) \rightarrow (1)$. (Duval, 1995, p. 154, 2004, p. 178)

Por exemplo, usando a relação $\leq$ nos números inteiros (Fuchs e Reeb, p. 150), inverter a ordem das variáveis equivale a trocar os termos “grande” e “pequeno”. Assim, ao posicionar (Pxy) para a relação $\leq$, temos:

$\exists x \forall y (Pxy)$: Existe um inteiro menor que todos os demais.
 $\exists x \forall y (Axy)$: Existe um inteiro superior a todos os demais.
 $\forall x \exists y (Axy)$: Para qualquer número inteiro, existe sempre outro inteiro maior.
 $\forall x \exists y (Pxy)$: Para todo número inteiro, existe um número inteiro que é menor ou igual a ele. (Duval, 1995, p. 154, 2004, p. 178).

O autor ainda afirma que a análise dessas afirmações revela fenômenos idênticos aos encontrados em conteúdos não matemáticos. Didaticamente, isso mostra que um aluno

difícilmente distinguirá essas formas de expressão sem compará-las diretamente com variações na língua natural. Sem essa comparação, a identificação permanece difícil e compromete uma compreensão mais ampla dos conteúdos em que estão inseridas. Ainda acrescenta:

No entanto, um trabalho de comparação não é suficiente por si só. Quando nos deparamos com fenômenos de não congruência tão fortes quanto os que acabamos de analisar, a passagem de um registro para outro não pode ser feita diretamente. É necessário, pelo menos em um primeiro momento, passar por um terceiro registro que permita obter uma representação intermediária. A representação do registro inicial é então convertida em uma representação desse terceiro registro e, a representação assim obtida é então convertida em uma representação do registro final. Que tipo de representação é capaz de estabelecer uma “ponte” entre unidades apofânticas próprias de cada um dos dois registros da língua? (Duval, 1995, p. 155, 2004, p.179).

Na próxima seção, o autor tece reflexões no intuito de propor respostas à questão anterior.

5. QUE REPRESENTAÇÃO INTERMEDIÁRIA?

Uma representação não atua como intermediária entre dois registros de representação que conecta. De modo geral, distinguem-se dois tipos de representações intermediárias: a expressão denominada “mista” (ver coluna central da Tabela 1) e os esquemas (Duval, 1995, 2004).

5.1. As expressões mistas obtidas pela mistura dos dois registros

Para Duval (1995, 2004), embora sejam comuns e fáceis de criar, as expressões mistas não funcionam como representações intermediárias e, do ponto de vista semiótico, podem gerar dificuldades no ensino, pois as expressões mistas combinam elementos característicos de um registro específico com atributos típicos de outro registro.

O autor assevera que a mistura consiste em utilizar os nomes dos símbolos, ou as expressões que os representam, para enumerar a sequência de símbolos, seguindo as regras sintáticas da língua natural. Dessa forma, obtém-se uma enunciação semelhante a uma enunciação em língua natural. Esse tipo de leitura costuma ser empregado na relação entre língua formal e língua natural. Contudo, observa-se que a frase gerada não corresponde à estrutura não sintagmática da fórmula, tampouco resulta em uma sentença francesa

compreensível sem necessidade de retradução. As expressões que deveriam desempenhar a função referencial apresentam-se ambíguas. Além disso,

As expressões mistas não podem, aliás, ser utilizadas como tal. 'Por um lado, são difíceis de repetir após uma única leitura rápida e não suscitam uma resposta imediata, como faria a expressão francesa original, na qual é necessário traduzi-las novamente ("Não,...!", "Se,...", "Sim,..."). Portanto, não oferecem nenhum meio de decifrar e interpretar as proposições da língua formal. 'Por outro lado, elas não são utilizáveis como tais: para realizar processamentos, é necessário voltar ao registro da escrita formalizada, onde se pode aplicar esquemas válidos, ou passar realmente para o da língua natural, que, ativando incessantemente um jogo de associações, permite recuperar rapidamente os conhecimentos pertinentes sobre o que é enunciado. De maneira mais geral, as expressões mistas não pertencem a um registro que tenha ao mesmo tempo suas regras de formação e suas regras de tratamento. Para perceber isso, basta considerar a passagem inversa da língua formal para a língua natural. (Duval, 1995, p. 156, 2004, p. 179).

A passagem do enunciado em língua natural para a expressão formal geralmente se dá por paráfrases que incorporam quantificadores. No entanto, isso só é eficaz se o usuário já conhecer as regras da língua formal. Mesmo assim, podem ocorrer proposições bem formadas que não refletem o significado original, tornando o processo sujeito a erros sem garantias contra desvios semióticos ou semânticos (Duval, 1995, 2004).

5.2. Os esquemas

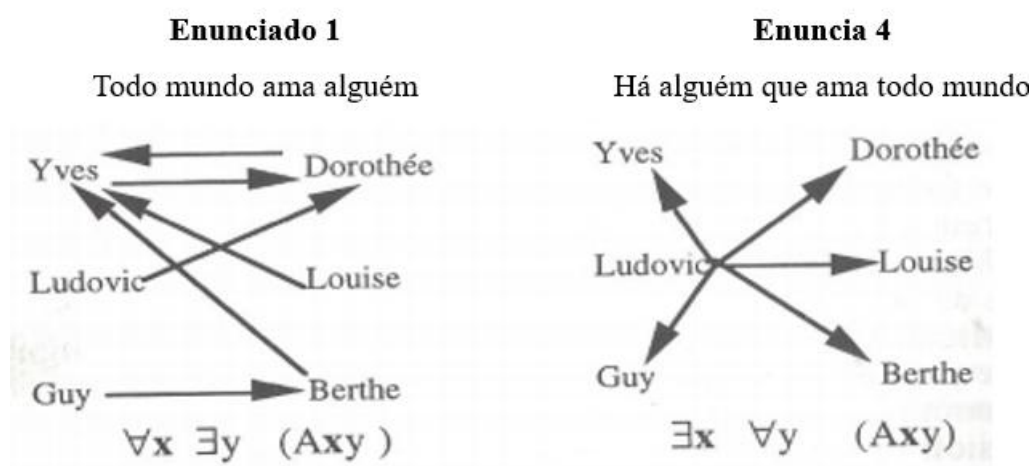
Os predicados de dois lugares correspondem a relações, e os esquemas sagitais são recursos frequentemente utilizados para representar essas relações. Essas representações não discursivas podem funcionar como uma ponte entre a língua natural e a língua formal (Duval, 1995, 2004).

Retomando as afirmações 1 e 4 (Tabela 1), já comparadas em diferentes registros linguísticos, cada situação pode ser representada por um esquema sagital. A regra de conversão define que o sujeito ativo inicia a seta ("gosta de...") e, na voz passiva, é posicionado no final ("é amado por..."); assim, ilustram-se frases em francês considerando seis indivíduos do discurso (Figura 2). Esse procedimento facilita a objetivação e possibilita revisar a compreensão das afirmações apresentadas. (Duval, 1995).

Após a elaboração dos esquemas, estes podem ser apresentados utilizando o registro da língua formal. Os dados do esquema pertinentes para essa apresentação são os pontos de partida e de chegada das setas. A análise desses pontos é que permitirá selecionar aqueles equivalentes às afirmações em francês.

Um esquema sagital é, portanto, construído para representar a situação descrita pela expressão em francês, e esse esquema construído é descrito por meio de expressões da língua formal. A passagem de um registro para outro por meio de uma representação intermediária equivale, do ponto de vista das tarefas a serem realizadas, a uma sequência de duas descrições independentes entre si em seus dados de referência e em seus meios semióticos. Em seguida, pode-se fazer uma comparação com base nas variações concomitantes entre as expressões do registro de partida e as representações do registro de chegada. (Duval, 1995, p. 158, 2004, p. 181).

Figura 2 -Esquemas sagitais representando uma situação descrita por uma expressão em língua natural e que podem ser descritos por uma expressão em língua formal.



Fonte: Duval (1995, p.158, 2004, p. 181)

Nesta figura, Duval (1995, 2004) considera somente a representação mais simples dos esquemas. Adicionar setas (por exemplo, de Berthe para Guy) não mudaria o papel de ligação entre os registros, apenas tornaria a interpretação formal inicial menos imediata. Ao focar nas formas puras, destacamos facilmente as modificações relevantes em outros registros. Inverter as setas no esquema à direita resulta na representação de e' e no enunciado 3. : “Há alguém que todos amam” $\exists y \forall x (Axy)$. A passagem da designação coletiva “todos” para uma enumeração individual constitui uma instanciação (Duval, 1995).

O ponto importante é que o desvio por uma representação intermediária desse tipo *exclui qualquer análise da expressão francesa em função dos critérios semânticos ou sintáticos de outra língua, mesmo que formal*. Além disso, a produção da proposição formal correspondente aparece como uma **tarefa de descrição de uma situação representada esquematicamente e não já descrita discursivamente**. Concretamente, basta descrever o que é relevante no esquema sagital. A descrição de uma representação não discursiva (esquema de uma relação, gráfico proposicional etc.) que se construiu é talvez a tarefa por excelência para se apropriar de um funcionamento discursivo. Isso foi observado, aliás, para a compreensão do funcionamento do raciocínio dedutivo e para sua expressão no registro da língua natural (Duval, 1995, p. 159, 2004, p. 182, destaque do autor, tradução nossa).

O autor afirma que o esquema sagital funciona como representação intermediária, servindo de ponte entre língua formal e língua natural. Ele ilustra a situação descrita na proposição e pode ser resumido em um enunciado em língua natural.

O esquema sagital serve para ilustrar afirmações em língua natural ou proposições lógicas, permitindo diversas variações quanto ao número de elementos e disposição das setas, desde que respeite o tema da afirmação. Por exemplo, no enunciado 4 da Figura 2, deve haver pelo menos um nome próprio apontando para cada outro nome próprio. A variedade de esquemas possíveis revela seu caráter ilustrativo. O autor assevera que

Cada um dos esquemas realizados aparece então como uma instância da afirmação. Em pesquisas anteriores, pudemos observar que ultrapassar esse status de ilustração constituía um limiar importante no desempenho geral de um questionário: havia alunos que eram capazes de fornecer dois exemplos diferentes e havia aqueles que não conseguiam (Duval e Pluvineau, 1977, apud Duval, 1995, p. 159, 2004, p. 182).

Os esquemas sagitais são representações não discursivas úteis para converter unidades discursivas com função apofântica, diferenciando-se das redes semânticas por sua simplicidade. Enquanto as redes representam determinações semânticas das unidades de designação, os esquemas sagitais destacam ancoragem e quantificação, aspectos definidos pela predicação e inseparáveis da proposição afirmada (Duval, 1995, 2004).

Portanto,

Não esqueçamos, no entanto, que os esquemas sagitais têm uma memória sinistra. Pelo menos para os alunos que, entre 1970 e 1976, foram cobaias do “Maths Modernes”. Mas, nos programas desse período, os esquemas sagitais não eram usados como representação intermediária entre enunciados de dois registros da língua: eram apenas um material para uma classificação geral das relações em função de suas propriedades (reflexividade, simetria, antissimétrica, transitividade...). (Duval, 1995, p. 160, 2004, p. 183).

O objetivo, de Duval (1995, 2004) nesta parte, era categorizar diferentes esquemas sagitais, sem que estes funcionassem como instrumentos para interpretar ou converter a expressão linguística de uma situação. Neste contexto, os esquemas sagitais são considerados apenas como um registro de representação, entre outros possíveis, sendo independentes do sistema de lógica das relações e da lógica dos conjuntos, ao qual foram associados entre 1970 e 1976. É relevante evitar a confusão gerada naquele período. O uso de esquemas sagitais dentro da coordenação de registros não tem como finalidade reintroduzir no ensino elementos de uma tradição “lógico-matemática”.

5.3. Tabelas e listas

O recurso a uma representação intermédia não discursiva não se aplica apenas a todas as proposições que contêm predicados de dois lugares. É igualmente necessário, pelo menos numa primeira fase, para os conectores proposicionais. A introdução dos conectores não pode ser feita sem a articulação de três registos: o da língua natural, o das notações simbólicas e o de uma representação não discursiva que permite articulá-los. Para demonstrar isso, nos contentaremos em analisar o exemplo protótipo, tal como apareceu em um dos textos fundadores da lógica matemática.

A representação intermediária não discursiva é necessária tanto para proposições com predicados de dois lugares quanto para conectores proposicionais. Sua introdução exige relacionar três registos: língua natural, notação simbólica e uma representação não discursiva que as articule. Para ilustrar este fato, Duval (1995, 2004) analisa um exemplo clássico da lógica matemática.

Frege, em *Begriffsschrift* (p. 13-14), introduz assim a implicação (material) $B \Rightarrow A$: Se A e B representam conteúdos suscetíveis de se tornarem julgamentos (proposições assertivas), há quatro possibilidades seguintes:

- (1) A é afirmado e B é afirmado
- (2) A é afirmado e B é negado
- (3) A é negado e B é afirmado
- (4) A é negado e B é negado.

Agora



representa o julgamento de que a terceira dessas possibilidades não ocorre, mas apenas as outras três. (Duval, 1952, p. 161, 2004, p. 183-184).

Uma simples análise desta apresentação permite distinguir as três características seguintes:

Primeiramente, a lista das quatro possibilidades é apresentada no formato das tabelas de verdade. As abordagens relacionadas a esse tipo de representação foram desenvolvidas por Wittgenstein. Em seguida, a definição de refere-se à descrição de uma das partições dos quatro pares dessa lista, exibida na forma de tabela. Essa descrição pode ser realizada de duas maneiras distintas. A primeira considera os pares como unidades, ou seja, as linhas da tabela.

Enumeramos assim:

- aqueles que são aceitos $\{(A \text{ e } B) \text{ ou } (A \text{ e não } B) \text{ ou } (\text{não } A \text{ e não } B)\}$
- - aqueles que são recusados $(\text{não } A \text{ e } B)$.

É esta primeira forma que Frege adota em sua definição. A segunda forma consiste em tomar como unidades os termos dos pares. Enumeramos:

- aqueles que são aceitos $(A \text{ ou não } B)$
- aqueles que são recusados. (Duval, 1995, p. 161, 2004, p. 184)

Esta segunda abordagem é mais complexa: consiste em analisar a tabela em colunas para identificar os termos comuns aos pares aceitos, conforme Frege apresenta no restante do texto:

1. A deve ser afirmado... Só então os dois primeiros dos quatro casos mencionados são possíveis. Não é necessário que exista uma relação causal entre os dois (A e B).
2. B deve ser negado... Só então o segundo e o quarto dos quatro casos são possíveis. Não é necessário que exista uma relação causal entre os dois. (Duval, 1995, p. 162, 2004, p. 184).

O autor assevera que é esta segunda forma de ler a partição que permite distinguir entre condição necessária (A) e condição suficiente (B). Além disso, foi proposta uma notação (bidimensional) para designar ou nomear a partitura descrita. Posteriormente, foram as notações unidimensionais que se impuseram. Em vez de



Escreve-se atualmente $B \Rightarrow A$. (Duval, 1995, p.162, 2004, p. 185)

A designação não deve ser confundida com a descrição, pois são atos discursivos distintos. Apenas a descrição, através de disjunção e conjunção, pode ser vinculada diretamente à tabela dos quatro pares. Qualquer tradução na língua natural usando "se... então..." já é uma forma de designação e expressa uma relação de dependência entre as proposições. (Duval, 1995).

O autor ainda reforça que este fato favorece a consideração dos dois valores possíveis da proposição antecedente. Observa-se, assim, a distinção entre a expressão "se... então...", que indica uma relação de dependência com apenas duas possibilidades para o antecedente, e o símbolo de implicação, que representa uma partição entre quatro casos possíveis, sem pressupor relação de dependência entre os valores das duas proposições. Esse símbolo refere-se à exclusão de um caso e aceitação dos outros três. A expressão " $B \rightarrow A$ " funciona como uma abreviação para classificar as combinações de valores das proposições consideradas de maneira independente, não como uma ligação sintagmática entre as duas. Quando " $B \rightarrow A$ " é interpretada como uma ligação sintagmática, isso sugere uma relação de dependência entre ambas, e as variações são restritas ao antecedente B, diferente do conseqüente. Assim, a

expressão " $B \rightarrow A$ " pode ser compreendida como "se ... então ...", que na língua natural opera como uma equivalência (Ducrot, 1972, apud Duval, 1995, p. 163, 2004, p. 185).

As primeiras transições entre a expressão em língua natural e a designação simbólica da relação de implicação requerem uma etapa intermediária por meio de uma representação não discursiva. Por exemplo, a introdução da implicação, equivalência ou disjunção geralmente começa pelo domínio das tarefas de descrever listas completas de casos favoráveis e desfavoráveis. Essas descrições são inicialmente apresentadas em língua natural e posteriormente resumidas em uma única proposição, conforme exemplificado no texto de Frege. (Duval, 1995, p. 163, 2004, p. 186).

Sem essas tarefas descritivas, a proposição "não A e B" não pode ser imediata e definitivamente percebida como a negação da proposição " $A \rightarrow B$ ", e a contraposição "não $B \rightarrow$ não A" não pode ser imediatamente reconhecida como uma afirmação equivalente à de " $A \rightarrow B$ ". Sem um trabalho tão preliminar que mobilize vários registros e seja centrado em atividades cognitivas de conversão, há pouca chance de que a maioria dos alunos e estudantes ultrapasse o estágio de pseudo-sinonímia entre duas designações equívocas no uso do envolvimento.

Estas observações são relevantes para fins didáticos. A introdução à lógica baseada apenas em leituras mistas e expressões naturais levam a impasses. O ideal é focar na coordenação entre registros, alcançada por meio de prática sistemática das variações permitidas em cada registro, alternando-os como ponto de partida.

6. OS TRATAMENTOS POR NEGAÇÃO

Duval (1995) observa que cada registro possui tratamentos próprios ou comuns, sendo os comuns geralmente mais econômicos. Por isso, mudar de registro pode ser vantajoso, já que não existem tratamentos idênticos em registros diferentes, exceto no caso dos registros de língua. Neles, a negação é essencial para definir a língua. Comparar os tratamentos de negação em registros distintos é fundamental para coordená-los.

Uma análise comparativa dos tratamentos por negação requer que se distingam dois níveis. O primeiro é constituído pelas operações elementares que permitem opor as afirmações entre si. O segundo nível é formado pela combinação das operações elementares. Nesse estágio, é possível estabelecer regras para transformar um enunciado em outro, conservando seu valor de verdade ou tornando-os contraditórios. Apenas neste segundo nível que ocorre o tratamento discursivo ou lógico por meio da negação (Duval, 1995).

6.1. As operações elementares de oposição

Duval (1995) identifica cinco operações (Tabela 2) fundamentais de oposição aplicáveis aos constituintes de uma unidade apofântica, enunciado ou proposição: duas correspondem a operações computacionais realizadas sobre um dos termos do enunciado, enquanto as outras três envolvem o emprego do operador unário de negação (“não” ou símbolo equivalente) sobre os quantificadores, termos predicativos ou verbos.

Tabela 2 – Tratamentos por oposição podendo ser efetuados nos constituintes de uma unidade apofântica

Operações	Língua natural	Língua formal
I. Comunicação extensional	Todos $\rightarrow$ alguns, ou $\rightarrow$ um Alguns ou um $\rightarrow$ todos	$\forall \rightarrow \exists$ $\exists \rightarrow \forall$
II. Comunicação antonímica	grande $\rightarrow$ pequeno preto $\rightarrow$ branco	
III. Aplicação do operador unário aos termos extensionais	Todos $\rightarrow$ não todos ($\equiv$ quais quer) Um $\rightarrow$ não um ($\equiv$ nenhum, nulo)	$\forall \rightarrow \neg \forall$ $\exists \rightarrow \neg \exists$
IV. Aplicação do operador unário aos termos de propriedade (em posição de atributo)	Uso de prefixos a-, in-	$P \rightarrow \neg P$
V. Aplicação do operador unário ao verbo	Il é ... $\rightarrow$ Não é ...	

Fonte: Duval (1995, p. 165, 2004, p. 187)

Notemos que consideramos aqui a aplicação do operador unário ao verbo como uma relação de oposição elementar, da mesma forma que a comutação extensional ou antonímica. Se nos limitarmos ao ponto de vista linguístico, essa operação corresponde a uma “negação de frase”, enquanto as outras correspondem a uma “negação de constituinte”. Essa distinção entre “negação de frase” e “negação de constituinte” não é suficiente para explicar a diversidade e a complexidade dos tratamentos por negação que intervêm na realização da função discursiva, ou seja, a produção de um novo enunciado a partir de um enunciado dado. Assim, a “negação de constituinte” abrange quatro tratamentos elementares de oposição. E o que se denomina tratamento por negação corresponde frequentemente a uma combinação desses tratamentos elementares de oposição.

Duval (1995) considera (Tabela 2) o operador unário aplicado ao verbo como uma oposição elementar, análoga à comutação extensional ou antonímica. Do ponto de vista linguístico, isso é uma “negação de frase”, em contraste com a “negação de constituinte”. No entanto, o autor considera que essa distinção não basta para explicar a complexidade dos usos

discursivos da negação. A negação de constituinte envolve quatro operações básicas de oposição, que frequentemente se combinam na prática.

Essas operações de oposição podem ser aplicadas separadamente em uma unidade apofântica, como se observa facilmente na língua natural, conforme os exemplos a seguir.

Partindo de:

(8) Todos os caminhoneiros são simpáticos, obtemos:

(9) “Alguns caminhoneiros são simpáticos” (por comutação extensional),

(10) Todos os caminhoneiros são desagradáveis (por comutação antônima)

(11) Nem todos os caminhoneiros são simpáticos (por aplicação do operador unitário ao verbo)

Se tivéssemos partido de “todos os homens são mortais”, teríamos obtido:

(12) Todos os homens são imortais (por aplicação do operador unário ao termo de propriedade). (Duval, 1995, p. 166, 2004, p. 188)

Ele assegura a importância não confundir as operações de oposição I e III, embora em geral elas se sobreponham, nem as operações II e IV. Além disso,

Elas se distinguem, em primeiro lugar, pela ausência ou presença de um sinal de “negação”. Essa diferença semiótica não é insignificante do ponto de vista de uma análise cognitiva das afirmações às quais são aplicadas. Mas a necessidade de distingui-las impõe-se assim que se deseja comparar a aplicação separada e a aplicação combinada dessas operações em cada um dos dois registros. De fato, *os tratamentos por negação, aqueles que modificam necessariamente o valor lógico de verdade de um enunciado e que dão origem a esquemas válidos de inferência, são geralmente uma aplicação combinada de duas das quatro primeiras operações de oposição*. (Duval, 1995, p. 166, 2004, p. 188, destaque do autor, tradução nossa).

O autor afirma ainda que a quinta operação, que consiste na aplicação do operador unário ao verbo, representa o uso mais espontâneo da negação na língua natural. Entretanto, essa operação não pode ser considerada, estritamente, como um tratamento por negação, uma vez que pode desempenhar tanto funções metadiscursivas quanto discursivas, além de possuir um domínio de aplicação que permanece indefinido.

6.2. Os tratamentos por negação no registro da língua natural

Duval (1995) assevera que o quadrado das oposições lógicas de Aristóteles é o modelo inicial para a negação na língua natural, diferenciando entre proposições contrárias e contraditórias. Os tratamentos por negação envolvem duas operações opostas e não aplicam o operador unário ao verbo.

O autor partindo do enunciado (8) e apoiando-se nos critérios aristotélicos, ele obtém duas afirmações negativas logicamente diferentes:

(13) Nenhum caminhoneiro é simpático, ou seja, a afirmação contrária, por comutação extensional e pela aplicação do operador unário ao termo extensional obtido pela comutação ((Todos os $\rightarrow$ Alguns) $\rightarrow$ Nenhum), (14). Alguns caminhoneiros são uns canalhas, ou seja, a afirmação contraditória, por comutação extensional e por comutação antonímica. O enunciado subordinado (9), que se obtém apenas pela comutação extensional e que encerra o sistema de oposições lógicas, não é um tratamento de (8) por negação. (Duval, 1995, p. 167, 2004, p. 189).

Nestes exemplos, Duval (1995) observa que a negação de um enunciado no sentido lógico, pode ser alcançado sem utilizar o operador unário de oposição V e sem a presença explícita de elementos de negação no enunciado (como “Nenhum”, “Nulo”, “Ninguém”, nos casos dos contrários). Isso resulta do fato de que a “lexicalização da polaridade em dois antônimos” muitas vezes não está relacionada morfológicamente.

A utilização do operador unário de negação “não” aplicado ao verbo representa um aspecto particular inerente à língua natural. Tal aplicação distingue-se por sua especificidade e é fundamental para definir o uso convencional da língua natural:

(11) “Todos os caminhoneiros não são simpáticos.” é o tratamento por negação mais imediato de (8). Percebe-se imediatamente que é (11) que surge mais espontaneamente como uma réplica para se opor a alguém que afirmasse (8). Esse tipo de tratamento pela aplicação do operador unário ao verbo é “polêmico” e não “descritivo” [...]. Pelo contrário, a dupla comutação, ou seja, a produção de uma afirmação contraditória, equivale à produção de um contraexemplo: (14') Encontrei alguns caminhoneiros malvados. (Duval, 1995, p. 167-168, 2004, p. 189)

O autor ainda observa que a afirmação (11) apresenta limitações. Por ser formulada apenas pela aplicação do operador unário ao verbo, ela não determina logicamente seu valor: pode tanto implicar a afirmação contrária (13) quanto a contraditória (14). Assim, o enunciado (11) configura-se como uma contra-tese que requer justificação ou argumentação, assim como ocorre com a tese (8) à qual se contrapõe: “não, nem todos os caminhoneiros são simpáticos”. Para o autor,

Essa análise pode ser indiretamente corroborada observando o que é dado pela combinação da aplicação do operador unário ao verbo com outra operação elementar de oposição. A regra da *obversão*³ é um exemplo clássico. Consiste em transformar

³ A obversão (obversion) é um termo usado em lógica e filosofia, que se refere a uma operação de transformação de uma proposição em seu oposto. Consiste em alterar a qualidade de uma proposição, mantendo sua quantidade e, em seguida, substituindo o predicado por seu complemento.

uma proposição negativa em uma proposição afirmativa pela negação do predicado, e vice-versa [...]. Assim, (15) Todos os homens não são imortais torna-se, pela aplicação desta regra: (16) Todos os homens são mortais. (Duval, 1995, p.168, 2004, p. 190)

O autor reforça que a aplicação do operador unário tanto ao verbo quanto ao termo de propriedade é chamada de “dupla negação” e equipara as operações IV’ e V (Tabela 2). No entanto, aplicar o operador ao predicado não é igual a aplicá-lo ao verbo, e a regra de obversão não se aplica nos dois sentidos.

A aceitação da regra de obversão implicaria considerar a oposição antônima "(ele é) mortal versus (ele é) imortal" como equivalente à oposição "ele é mortal versus ele não é mortal" ou "ele é imortal versus ele não é imortal". A oposição antônima, resultante da aplicação do operador unário aos termos de propriedade, gera proposições contrárias e não proposições contraditórias: suas negações podem ser compatíveis entre si, indicando que a atribuição de um dos termos do par de antônimos não é determinante. Em contraste, a aplicação do operador unário ao verbo pode originar proposições contraditórias, já que suas negações não são compatíveis entre si devido ao princípio do terceiro excluído. (Duval, 1995).

6.3. Tratamentos por negação na língua formal

Duval (1995) observa que a ausência de verbo facilita consideravelmente o tratamento da negação em língua formal, em comparação à língua natural. Para negar um enunciado, não ocorre disputa entre contra-tese e contraditório. Assim como na forma contraditória da língua natural, a negação é obtida por meio da combinação entre comutação extensional e aplicação de operador unário ao predicado. Devido à inexistência de léxico, não há diferenciação entre comutação antonímica e aplicação do operador ao predicado. Portanto, a simples utilização do operador de negação não é suficiente isoladamente. A negação de $\forall x \exists y (Axy)$ é $\exists xy (\neg(Axy))$

Retomando os exemplos da Tabela 1, Duval (1995, p. 169, 2004, p. 1991) afirma que

a negação de “Todo mundo ama alguém” é enunciado contraditório de “há alguém que não ama ninguém”. Aqui, os tratamentos nos dois registros são congruentes. Isso vale para a negação das formas básicas II e IV (fig. I). A negação das formas básicas do tipo V, VI ou VII requer que se compreendam as regras semióticas do tratamento por negação no que diz respeito aos conectores. Quando, por exemplo, o predicado é uma implicação, basta tomar o caso excluído no paradigma do símbolo de implicação para negar o predicado. A negação de “ $\forall x (Fx \Rightarrow Tx)$ est $\exists x (Fx \Rightarrow \neg Tx)$ ”.

O autor reforça que o tratamento por negação permite definir regras que permitem mover quantificadores pelo sinal de negação), como pode ser observado no seguinte exemplo (Duval, 1995, p. 169, 2004, p. 1991)

$$\forall x \neg Fx \Leftrightarrow \neg \exists x Fx$$

$$\exists x \neg Fx \Leftrightarrow \neg \forall x Fx$$

A transição de uma proposição para outra ocorre, neste contexto, por meio da aplicação de três operações elementares de oposição: a comutação do termo extensional, a aplicação do operador unário ao termo extensional e ao termo predicativo (operações I e IV conforme apresentado na Tabela 2.

É claro que se podem conceber outros tratamentos por negação que não produzem nem uma proposição contraditória, nem uma proposição equivalente, como no caso dessas regras de passagem. Por exemplo, a combinação das aplicações do operador unário ao termo extensional e ao termo predicado, ou a combinação da comutação extensional e da aplicação do operador ao termo extensional:

$$\forall x Fx \rightarrow \neg \forall x \neg Fx (\Rightarrow \exists x Fx)$$

$$\forall x Fx \rightarrow \neg \exists x Fx (\Rightarrow \forall x \neg Fx)$$

(Duval, 1995, p.170, 2004, p. 192)

Esses tratamentos não são relevantes para o cálculo dos predicados, já que nesse contexto só é possível expandir o discurso por substituição na língua formal. De fato, tratar uma proposição por qualquer dessas combinações equivale à aplicação de uma única operação elementar de oposição. Esse exemplo evidencia a importância de distinguir entre operações elementares e tratamentos por negação, especialmente os que possibilitam uma expansão discursiva como o raciocínio. (Duval, 1995).

7. ANÁLISE DE UM EXEMPLO NÃO TRIVIAL

A definição matemática de continuidade possui uma complexidade reconhecida. As análises anteriores colaboram significativamente para evidenciar sua estrutura e funcionamento. Neste contexto, Duval (1995) apresenta a definição conforme estabelecida em um livro didático destinado aos estudantes do último ano do ensino secundário (IREM de Estrasburgo, 1983, pp. 29-30). Ressalta-se que esta apresentação não se limita a um único registro; a definição é oferecida tanto em língua formal quanto em uma abordagem mista.

Essas duas formas são acompanhadas por representações gráficas nas quais são repetidos os símbolos de designação pura usados nas duas formas de expressão. Mas

a definição não é dada no registro da língua natural. A definição da continuidade de uma função f num ponto x_0 apresenta-se assim no registro da língua formal:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in Df \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

(Duval, 1995, p. 171, 2004, p. 192)

Para o autor, é essencial distinguir o que depende da proposição e do predicado na leitura desta definição com três quantificadores. Há uma unidade apofântica do tipo IV, dois quantificadores e um predicado.

Sua organização interna é a de uma afirmação do tipo 2, 1', sendo invertida a ordem das variáveis ligadas[...]:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in Df \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$\forall y \quad \exists x \quad (Axy)$

O predicado apresenta a estrutura de uma implicação formal (forma básica do tipo V), uma vez que está escrito como uma implicação de dois predicados universalmente quantificados:

$$\forall x \in Df \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$\forall x \quad (Fx \Rightarrow Tx)$

(Duval, 1995, p. 171, 2004, p. 192-193)

O autor reforça que a definição em língua formal envolve duas formas distintas (do tipo IV e do tipo V), que apresentam diferentes níveis: uma refere-se à proposição afirmada e outra a um constituinte dessa proposição. Essa definição possui uma estrutura identificável quando observada pelas formas apofânticas básicas que a compõem. Caso não seja reconhecida dessa maneira, pode apresentar dificuldades de compreensão. Os autores do manual optam por apresentá-la posteriormente, em uma seção de "Observações" com caracteres menores. A definição adotada é a expressão mista, considerada mais acessível.

Essa definição é, na verdade, uma leitura da definição em língua formal. A enunciação em língua natural enumera os elementos da proposição formal na ordem em que aparecem, reproduzindo-os tal como estão, como, por exemplo, o predicado $(|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$, ou acompanhados por um termo pertencente a uma operação de categorização, como, por exemplo, “número real $\varepsilon > 0$ ” (Duval, 1995, p. 172, 2004, p. 193)

O autor ainda assegura que a expressão mista, por ser próxima à língua formal, não é útil para negar definições. Para isso, deve-se utilizar o registro formal; para identificar objetos, opta-se pela língua natural ou representação gráfica. O uso da representação gráfica destaca os dois domínios de referência dos símbolos ε e δ . Assim, a expressão mista não equivale à passagem para a língua natural.

A tradução da definição para língua natural, sugerida para alunos iniciantes, destaca principalmente o predicado representado como uma implicação formal na fórmula: “... diz-se

que $f(x)$ tende para $f(x_0)$ quando x tende para x_0 ou que o limite de f em x_0 é $f(x_0)$, ou ainda que f é contínua em x_0 ” (IREM, 1982, apud Duval, 1995, p. 172).

O autor finaliza esta parte do capítulo afirmando que a representação cartesiana funciona como intermediária entre a língua formal e a natural, permitindo descrever conteúdos matemáticos de formas distintas. Para explicar a definição de continuidade, é preciso não só apresentar três registros diferentes, mas também garantir a coordenação correta entre eles.

8. CONCLUSÃO

O objetivo do estudo é inferir os elementos teóricos da língua natural e da língua formal que impactam os processos de ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos. Em guisa de síntese, destacamos os seguintes aspectos:

1. **Diferenças entre Língua Natural e Língua Formal:** A língua formal, utilizada na lógica e na matemática, possui uma estrutura diferente da língua natural. A língua formal carece de um léxico sistemático ou associativo capaz de atender à função referencial, o que dificulta a identificação de objetos de forma individual. Além disso, a estrutura rêmica e funcional de uma proposição na língua formal é mais heterogênea devido ao uso de conectores proposicionais.

2. **Obstáculos na Aprendizagem:** A passagem de um registro linguístico para outro apresenta obstáculos estruturais, especialmente nas funções referencial e apofântica. A articulação entre os registros é essencial para evitar confusões no ensino de lógica e na interpretação das expressões e operações realizadas entre esses registros.

3. **Funções Referencial e Apofântica:** Na ausência de um léxico, a função referencial na língua formal é executada por meio da função apofântica, utilizando quantificadores que conectam as variáveis dos argumentos livres do predicado. A articulação dessas variações permite a preservação de sete formas apofânticas fundamentais (que foram apresentadas no texto).

4. **Conversão entre Registros:** A conversão de expressões referenciais e apofânticas da língua natural para a língua formal apresenta desafios devido à variedade de formas e possíveis diferenças de significado. A transposição de um registro para outro frequentemente exige uma representação intermediária.

5. **Representações Intermediárias:** As representações intermediárias, como esquemas sagitais, são úteis para converter unidades discursivas com função apofântica. Essas

representações ajudam a coordenar os registros da língua natural e da língua formal, facilitando a compreensão e a aprendizagem de conceitos matemáticos.

Essas conclusões destacam a importância de entender as diferenças entre os registros linguísticos e a necessidade de representações intermediárias para facilitar a aprendizagem de conceitos matemáticos.

REFERÊNCIAS

DUVAL, Raymond. *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissage intellectuel*. Peter Lang, 1995, pp. 395.

DUVAL, Raymond. *Semiosis y pensamiento humano Registros semioticos y aprendizajes intelectuales*. Colección:Ciencias Sociales, Segunda edición, 2004, pp. 389.

NOTAS DA OBRA

Título da Obra

Sobre o livro “*Semiose e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagem intelectual*” de Raymond Duval - estudo hermenêutico do capítulo III

Saddo Ag ALMOULOU

Doutor em Matemática e aplicações
Universidade Federal do Pará, Belém, Brasil
saddoag@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0002-8391-7054>

Agradecimentos

CNPq

Licença De Uso

Os autores cedem à Recem os direitos exclusivos de primeira publicação, com o trabalho simultaneamente licenciado sob a [Licença Creative Commons Attribution](#) (CC BY) 4.0 International. Esta licença permite que terceiros remixem, adaptem e criem a partir do trabalho publicado, atribuindo o devido crédito de autoria e publicação inicial neste periódico. Os autores têm autorização para assumir contratos adicionais separadamente, para distribuição não exclusiva da versão do trabalho publicada neste periódico (ex.: publicar em repositório institucional, em site pessoal, publicar uma tradução, ou como capítulo de livro), com reconhecimento de autoria e publicação inicial neste periódico.

Publisher

Sociedade Brasileira de Educação Matemática, Regional de Santa Catarina (SBEM/SC). As ideias expressadas neste artigo são de responsabilidade de seus autores, não representando, necessariamente, a opinião dos editores ou da universidade.

Equipe Editorial

Editores-chefes:

Dr Eduardo Sabel
Dr. Júlio Faria Correa