APRIMORANDO O CONHECIMENTO DOS ESTUDANTES SOBRE A MAGNITUDE DA FRAÇÃO: UM ESTUDO PRELIMINAR COM ALUNOS NOS ANOS INICIAIS*

IMPROVING STUDENT KNOWLEDGE ABOUT FRACTION MAGNITUDE: AN INITIAL STUDY WITH STUDENTS IN EARLY ELEMENTARY EDUCATION

Arthur Belford Powell

powellab@newark.rutgers.edu

Rutgers University-Newark, EUA

RESUMO

A noção de magnitude é central para a compreensão de números fracionários. Para investigar essa relação, implementamos uma pesquisa de *design research* numa escola nos EUA, com o objetivo de examinar as potencialidades da perspectiva de medição e fração-*de*-quantidade para ampliar os entendimentos conceituais de magnitude de frações entre estudantes do segundo ano do Ensino Fundamental. Utilizamos ideias da História da Matemática e da Educação Matemática em uma estrutura histórico-cultural para definir o que são frações e construir tarefas. A equipe pesquisadora foi composta por um professor universitário, dois doutorandos, um deles foi um administrador da Secretaria de Educação do município, oito professores do Ensino Fundamental, e uma mãe. A sessões com os estudantes aconteceram em uma escola depois dos horários normais. As sessões de pesquisa envolveram 35 estudantes, divididos em duas turmas, reunidos uma hora por sessão, duas vezes por semana, durante um total de 12 semanas. Os estudantes usaram as barras de *Cuisenaire* para desenvolver a ideia de que uma fração relata uma comparação multiplicativa entre duas quantidades mensuráveis. Os resultados que apresentamos indicam que os estudantes se apropriaram da ideia da magnitude das frações-*de*-quantidade e que, com base nas imagens mentalmente evocadas das barras, foram capazes de construir expressões envolvendo comparações fracionárias.

Palavras-chave: Anos Iniciais, Frações Não-Simbólicas e Simbólicas, Medição, Modelo Instrucional-4*A*.

ABSTRACT

The idea of magnitude is central to understanding fractional numbers. To investigate this relationship, we implemented a design research project in a school in the USA, to examine the potential of a measuring perspective and the mathematical notion of fraction-*of*-quantity to enhance second-grade students' conceptual understanding of fraction magnitude. We used ideas from the history of mathematics and mathematics education within a cultural-historical framework to define what fractions are and to construct tasks. The research team consisted of a

*Este artigo foi elaborado a partir de uma comunicação científica que apresentei no XIII Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM) que aconteceu de 14 a 17 de julho de 2019 em Cuiabá, Mato Grosso, Brasil.

university professor, two doctoral students, one of whom was an administrator of the municipal board of education, eight elementary school teachers, and a mother. The research sessions involved 35 students, divided into two classes, meeting one hour per session, twice a week, for a total of 12 weeks. The students used Cuisenaire rods to develop the idea that a fraction is a multiplicative comparison between two measurable quantities. The results that we present indicate that the students appropriated the idea of the magnitude of fractions-*of*-quantity and that, based on mentally evoked images of the rods, were able to construct expressions involving fractional comparisons.

Keywords: Early elementary education, Non-symbolic and symbolic fractions, Measurement, 4A- Instructional Model.

1 Introdução

A capacidade do ser humano de comparar grandezas por meio de contar, mensurar e ordenar é filogeneticamente antiga e evoluiu independentemente da linguagem. O surgimento da linguagem natural e, mais tarde, a invenção dos símbolos escritos transformou a representação aproximada da magnitude absoluta para permitir uma representação de números altamente precisa e flexível. Mais tarde, com o nascimento da agricultura, as condições materiais introduziram a necessidade de inventar maneiras cognitivas para medir tamanhos de terrenos, colheitas, sementes, e assim por diante, bem como para registrar as medidas, e para auxiliar as classes dominantes na determinação da quantia de impostos a coletar (Clawson, 1994/2003; Struik, 1948/1967). Com base nessa nova indispensabilidade para medir, os babilônios e os egípcios introduziram as frações—a proporção de dois números naturais[1] — e essa nova linguagem semiótica constituiu um importante salto conceitual, pois introduziu magnitudes relativas e ampliou o alcance e a flexibilidade da consciência de magnitude para além dos limites inerentes aos números naturais.

Ambos os entendimentos diferentes de magnitudes, absolutas e relativas, acontecem por meio da arquitetura cerebral. Investigações neurocientíficas indicam que, desde muito cedo, as crianças evidenciam a capacidade para distinguir a magnitude de conjuntos de objetos. Especificamente, Feigenson, Dehaene e Spelke (2004) notam que seres humanos possuem

> um sistema para representar grandes magnitudes numéricas aproximadas e um segundo sistema para a representação precisa de pequenos números de objetos individuais. Esses sistemas são responsáveis por intuições numéricas básicas e servem de base para os conceitos numéricos mais sofisticados que são exclusivamente humanos. (p. 307, tradução nossa)

Esses sistemas representam a magnitude absoluta de um grupo de objetos sem depender de linguagem ou símbolos. O primeiro sistema é conhecido como “o sistema de numeração aproximada (SNA)”[2] (Piazza, 2010). Analogamente, para magnitudes relativas, ou seja, razões, Matthews, Lewis e Hubbard (2016) argumentam que existe um sistema cognitivo central que processa razões não-simbólicas (como um matriz de

[1] Para o propósito deste artigo irei considerar o conjunto dos números naturais como sendo o conjunto dos números inteiros positivos, ou seja, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

[2] Em inglês, esse sistema é chamado como *the approximate number system* (ANS).

pontos em pretos e um de pontos brancos, veja Figura 1), o que eles denominam de "sistema de processamento de razão" (SPR)[3]. Pesquisadores especulam que, como no

> desenvolvimento de números inteiros, em que a aprendizagem formal e informal liga magnitudes não-simbólicas (por exemplo, três pontos) às representações simbólicas (por exemplo, o numeral "3"), a compreensão não-simbólica das crianças (por exemplo, a capacidade de reconhecer que a proporção de vermelho para azul em uma barra é a mesma ou diferente da proporção de vermelho para azul em uma outra barra) pode sustentar a aprendizagem de símbolos de frações convencionais. (Boyer & Levine, 2012, p. 127, tradução nossa)

Mesmo que estudantes tenham uma capacidade inata para processar razões não-simbólicas, em muitos países, os estudantes não conseguem aproveitar dessa capacidade para construir um conhecimento robusto de frações e, em vez disso, têm dificuldades para compreender e operar com números fracionários (OECD, 2014). Essa falta os prejudica na aprendizagem da Álgebra e conceitos matemáticos posteriores (Bailey, Hoard, Nugent, & Geary, 2012; Booth & Newton, 2012; Siegler et al., 2012; Torbeyns, Schneider, Xin, & Siegler, 2015).

Embora o SPR tenha sido indicado e teorizado, ainda existe a questão de como vinculá-lo à aprendizagem possibilitada e faltam investigações que esclareçam como realizar esse vínculo. Neste estudo, exploramos como estruturar tarefas matemáticas que aproveitem a facilidade inata dos estudantes para diferenciar entre razões não-simbólicas a fim de aprimorar sua compreensão conceitual das magnitudes das frações simbólicas. Vincular a aprendizagem das magnitudes de frações simbólicas (como $5/3$) ao SPR pode proporcionar a construção de sequências de tarefas que contribuem para aperfeiçoar o conhecimento conceitual de frações dos estudantes. Com esse conhecimento, eles estarão melhor preparados para aprender as operações aritméticas com frações e, assim, obterem maior sucesso no seu estudo eventual da Álgebra.

Apresentamos resultados preliminares de uma pesquisa que foi norteada pela seguinte questão: Por meio do engajamento com tarefas de fração-*de*-quantidade de uma perspectiva de medição, que entendimentos conceituais de magnitude de frações os estudantes do segundo ano dos anos iniciais desenvolvem?

O que entendemos como a noção de fração-*de*-quantidade e de uma perspectiva de medição serão definidos na seção a seguir.

2 Fundamentação Conceitual e Teórica

A seguir, discutimos a importância do conhecimento sobre a magnitude de números fracionários. Em seguida, com base na história do surgimento de frações, descrevemos nossa definição que envolve a noção de fração-*de*-quantidade e, finalmente, justificamos o uso de nossas ferramentas visuais e táteis, das tarefas matemáticas e das técnicas pedagógicas.

[3] Em inglês, esse sistema é chamado como *the ratio processing system* (RPS).

2.1 Magnitude e Medição

Segundo Euler (1765/1822), no seu livro, *Elements of algebra*, uma magnitude, ou quantidade, é "tudo o que é capaz de aumentar e diminuir" (p. 1, tradução nossa). Ele não distingue entre as duas noções: magnitude e quantidade.

Quase três-quartos de um século mais tarde, De Morgan (1836/2010), no livro, *The connection of number and magnitude: An attempt to explain the Fifth Book of Euclid*, específica essas noções assim:

> Por *magnitude*, ou quantidade, significa aquilo que nos é apresentado, não como sua forma, se tenha uma forma, ou à sua cor, peso ou a qualquer outra circunstância, mas simplesmente o que é composto de partes, não diferente do inteiro em qualquer maneira além de ser menor; à medida que, se consideremos separadamente uma parte e o inteiro temos apenas duas inferências:
>
> A parte é menor que o inteiro.
>
> O inteiro é maior que a parte.
>
> Tudo o que podemos ver ou sentir nos apresenta a noção de magnitude ou quantidade. E aqui devemos observar que temos que escolher nossas palavras entre aquelas de uso comum, que nunca têm significados muito precisos. Por exemplo, temos *magnitude*, a palavra inglesa mais próxima de *greatness*; e *quantidade*, na qual a palavra, se existisse, deveria ser *so-much-ness*. Essas palavras têm o mesmo significado, e quanto mais indefinidas as deixarmos agora (exceto apenas ao designar que elas devem ser consideradas aplicadas a qualquer coisa que possa ser feita *mais* ou *menos*), melhor para o nosso objetivo; pois isto é o objetivo deste tratado, deduzir a partir dessa noção indefinida um método de fazer comparações matemáticas de quantidades, com o auxílio da noção de número. (p. 2, ênfases originais, nossa tradução)

Ele define a categoria de uma magnitude junto com a de quantidade, e parece para ele também que duas categorias são sinônimas. Logo depois, escrevendo em inglês, ele oferece umas sinônimas pelas duas palavras. Uma magnitude é uma "*greatness*" ou grandeza enquanto uma quantidade é uma "*so-much-ness*" ou uma quantia. Diferentemente de Euler (1765/1822), De Morgan (1836/2010) prefigura uma distinção entre os dois conceitos quando escrever que "é o objetivo deste tratado, deduzir a partir dessa noção indefinida um método de fazer *comparações matemáticas de quantidades, com o auxílio da noção de número*" (p. 2, ênfase nossa).

A partir dessa prefiguração da diferença entre as noções de magnitude e quantidade, optamos por concebê-las como entidades distintas, porém relacionadas, das coisas materiais e imateriais, sujeitas a serem aumentadas ou diminuídas. Consideramos que a quantidade é uma magnitude à qual pode associar um número que representa seu tamanho. Tanto uma quantidade como uma magnitude pode ser contínua ou descontínua, como por exemplo: som, sementes, riqueza, velocidade, bytes, idade, tempo, felicidade e comprimento. No entanto, não toda magnitude é uma quantidade, como não toda pode ser quantificada e resulta a ser associada a um número. O número indica o tamanho ou extensão da quantidade e emerge por meio de medição, um procedimento que Euler (1765/1822) descreve como:

> fixe com prazer qualquer magnitude conhecida da mesma espécie com aquela que deve ser determinada, e considere-a como *medida* ou *unidade*; em seguida, determine a proporção da magnitude proposta para essa medida conhecida. Essa proporção é sempre expressa por números; de modo que um número não é, senão, a proporção de uma magnitude para outra arbitrariamente fixada como unidade. (p. 2, ênfase original, tradução nossa)

A medição resulta de uma comparação proporcional de uma quantidade com uma outra da mesma espécie, que é considerada como a unidade de medida. Portanto, um número é realizado dessa comparação multiplicativa, sendo que a quantidade indica a extensão da sua magnitude.

2.2 Medição Produz Números Reais

Usando o procedimento que Euler (1765/1822) ilustra para medir, por exemplo, um comprimento, geram-se três possíveis quantidades diferentes: um número inteiro; um racional não-inteiro, ou um irracional.

A medida do comprimento de um segmento de reta AB expressa a proporção do comprimento de AB com um outro segmento u, previamente selecionado como a unidade de medida, e como tal, a medida de seu comprimento é de 1. O segmento u permite determinar quanto dele é necessário para constituir um segmento congruente a AB. A resposta gera um número m, que expressa exatamente uma das três relações multiplicativas:

1. Se o segmento AB é congruente com exatamente k segmentos de unidade u colocados de ponta a ponta, seu comprimento ou medida é $k \times u$, ku ou, como $u = 1$, simplesmente k. Essa medida, portanto, é um número inteiro.

2. Se o segmento AB não for congruente com k segmentos de u, colocado de ponta a ponta, podemos supor que u seja congruente com n segmentos v colocados de ponta a ponta, e que AB seja congruente com m desses segmentos v. O segmento v é então uma subunidade comum dos dois segmentos, u e de AB, e os dois são considerados segmentos comensuráveis. Agora, como u é igual a $n \times v = nv$, o comprimento de v é chamado um enésimo do comprimento de u e escrito como $\frac{1}{n} \times u$. Portanto, a medida de AB é m de $\frac{1}{n} \times u$ ou $\frac{m}{n} \times u$. Então, desde que $u = 1$, o comprimento de AB é igual à razão $\frac{m}{n}$. Como

m e n são números naturais, a medida da quantidade AB é definida como um número racional.

3. Se o segmento AB não for congruente com n segmentos da unidade u, colocados de ponta a ponta, e não existirem segmentos menores v, para os quais m deles são congruentes com AB e k deles são congruentes para u, então os segmentos AB e u são incomensuráveis. A medida da quantidade AB é um número irracional[4].

Assim, a medição de comprimentos produz as três possíveis relações multiplicativas que compõe o conjunto dos números reais.

2.3 Perspectiva Histórica dos Números Fracionários

Hoje em dia, os números racionais admitem três representações diferentes, as porcentagens, os decimais e as frações. Historicamente, mais de quatro milênios atrás, nas culturas mesopotâmica e egípcia, ao longo dos rios Tigre, Eufrates e Nilo, com o nascimento da agricultura, as condições materiais introduziram a necessidade de inventar maneiras cognitivas de medir quantidades de terra, plantações, sementes, entre outros e, de registrar tais medidas (Clawson, 1994/2003; Struik, 1948/1967). Por exemplo, para medir as distâncias da terra, agrimensores antigos esticaram cordas, nas quais o comprimento entre dois nós representava uma unidade de medida. Com essa prática social de medir comprimentos, surgiram simultaneamente a geometria e os números fracionários (Aleksandrov, 1963; Caraça, 1951; Roque, 2012), isto é, as frações surgiram, por exemplo, para determinar a extensão de uma distância ou comprimento AB, em comparação com uma unidade de medida u. O comprimento poderia ser representado por uma das situações apresentadas nos itens 1 e 2 da subseção anterior. Mais tarde, os gregos antigos descobriram que nem sempre as situações dos itens 1 e 2 aconteciam, ou seja, AB e u podiam não ser comensuráveis (Struik, 1948/1967), como já apresentado na subseção anterior, no item 3. Como consequência ontológica, entendemos que a fração é fruto de uma medição e optamos por defini-la como uma comparação multiplicativa entre duas quantidades da mesma espécie que são comensuráveis.

2.4 Frações Não-simbólicas e Simbólicas

A primeira pergunta que podemos fazer é: *o que é um objeto simbólico e um não-simbólico?* Para compreensão desses conceitos, recorramos à Semiótica, a partir de Ribeiro (2010, p. 51), que recorre à noção de símbolo, segundo o qual,

> é um signo que estabelece uma relação com seu objeto por meio de uma mediação, ou seja, as ideias presentes no símbolo e em seu objeto se relacionam a ponto de fazer com que o símbolo seja interpretado como se referindo aquele objeto, isto é, fazendo com que o símbolo represente algo que é diferente dele. (Ribeiro, 2010, p. 51)

[4] Sobre os números irracionais, para uma maior discussão "direcionada à sala de aula", veja Broetto e Santos-Wagner (2017).

Partindo da perspectiva de Charles Sanders Pierce, Ribeiro (2010) afirma que o símbolo só tem sentido a partir da existência de um ser, o qual cria uma relação entre o símbolo e o objeto que o representa, ou seja, o símbolo depende de alguém para sua interpretação. Nos textos sobre psicologia e neurociência que tratam da cognição numérica (veja, por exemplo, Dehaene, 2011; M. R. Lewis, P. M. Matthews, & E. M. Hubbard, 2015; Matthews & Ellis, 2018; Matthews et al., 2016) há uma distinção entre objetos não-simbólicos e simbólicos quando se trata de números naturais e razões ou frações. Nessa literatura, uma razão ou fração simbólica é aquela que é representada por um signo ou uma notação matemática como $\frac{2}{3}$ ou $\frac{5}{4}$. Já as razões ou frações não-simbólicas seriam objetos como os apresentados a seguir na Figura 1:

No painel (a) da Figura 1 tem dois pares de quadradinhos preto e branco, cada com uma certa quantia de pontinhos. A razão entre o número de pontinhos nos quadradinhos preto e branco no lado esquerdo é maior que a razão entre o número de pontinhos nos quadradinhos preto e branco no lado direto. As quantias de pontinhos nos quadradinhos da razão não-simbólica no esquerdo são relativamente iguais e assim o valor da razão aproxima a um. Em comparação, sem contar, pode-se perceber que, na razão não-simbólica no lado direto, no quadradinho preto tem menos pontinhos que no quadradinho branco embaixo dele, e que assim o valor da razão é menor que um. Numa maneira semelhante, no painel (b), no lado esquerdo, no par de barras, o comprimento da barra branca parece ser igual ao da preta e assim a razão do par de barra aproxima um. Porém, percebe-se que a razão dos comprimentos das duas barras no lado direto é menor que um meio.

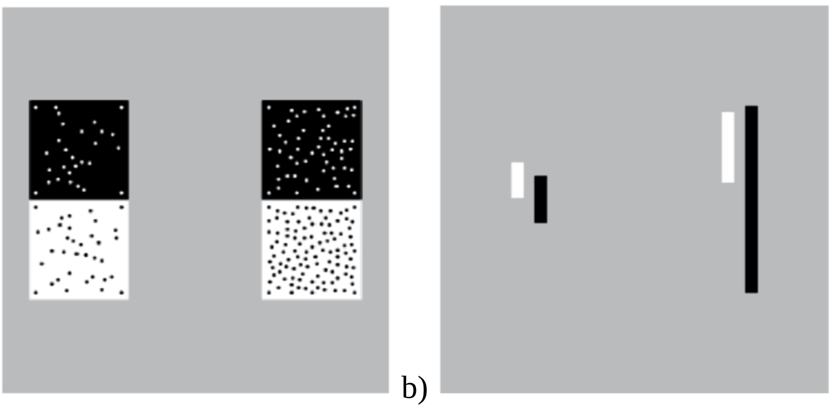

a) b)

Figura 1- Qual razão é maior? Duas tarefas para a comparação de razões não-simbólicas.
Fonte: (Matthews et al., 2016, p. 194)

Na neurociência cognitiva, esses tipos de razões não-simbólicas visualmente apresentados são usados para investigar a capacidade de indivíduos para discernir entre as quantidades representadas pelas razões não-simbólicas. Pesquisas mostram que os bebês podem facilmente discriminar entre as proporções apresentadas visualmente (Duffy, Huttenlocher, & Levine, 2005; M. R. Lewis, P. G. Matthews, & E. M. Hubbard, 2015; McCrink & Wynn, 2007; Sophian, 2000) e que os indivíduos que são mais capazes de comparar e estimar as proporções não-simbólicas têm maior desempenho nas medidas de compreensão dos números racionais e da Álgebra (Jordan et al., 2013; Resnick et al., 2016; Siegler, 2016; Siegler, Thompson, & Schneider, 2011). A pesquisa em neurociência sugere um mecanismo para essas conexões comportamentais: quantidades não-simbólicas e representações simbólicas de números racionais se baseiam na mesma área do cérebro, o sulco intraparietal (SIP). Esses resultados abrem a possibilidade de que instruções focadas em vincular razões não-simbólicas a suas contrapartes simbólicas possam melhorar a aprendizagem das operações e magnitude das frações.

Essa ideia de magnitude implica um sentido diferente que desenvolvemos na subsecção 2.1. Nesse uso da categoria, a magnitude é um tamanho, um valor. É o sentido desta frase: a magnitude de $\frac{3}{4}$ é menor que $\frac{5}{6}$. Em contraste, na subsecção 2.1, ela significa qualquer que pode ser aumentado e diminuído. Quando quisermos este significado, vamos nomeá-lo Magnitude, com "M" maiúscula. Quando, em vez disso, quisermos dizer o tamanho ou valor, usaremos um "m" minúsculo para magnitude e saberemos que é o resultado de uma medição.

2.5 Importância e Diferenças nas Magnitudes

Números tem magnitude, são os resultados de medições. O entendimento da magnitude da fração envolve a capacidade de compreender, estimar, e comparar os tamanhos de frações (Fazio, Bailey, Thompson, & Siegler, 2014). A comparação dos tamanhos relativos pode acontecer entre frações não-simbólicas, tanto como entre frações simbólicas. Os tamanhos relativos entre pares de frações não-simbólicas ou simbólicas podem ser comparados. A noção de magnitude é cognitivamente importante e uma propriedade comum entre os números inteiros, racionais e irracionais. É comum a outros construtos matemáticos e científicos, como ângulos, altura, massa, tempo, números complexos, vetores e assim por diante. A magnitude é fundamental para compreender frações não-simbólicas e simbólicas (Behr, Wachsmuth, Post, & Lesh, 1984; Fazio et al., 2014) e, mais especificamente, magnitude relativa (Carraher, 1993, 1996).

Isso é também o caso com todos os números reais. Como subconjuntos de números reais, em termos de magnitude, os números naturais e racionais (frações) possuem propriedades diferenciadas. Essas diferenças podem ser codificadas em quatro categorias, como listamos no Quadro 1.

No Quadro, 1 as diferenças destacadas entre a magnitude dos números naturais e fracionários são fontes de dificuldades para a aprendizagem de frações pelos estudantes, tanto no Ensino Fundamental como no Ensino Médio (Lamon, 2007; Mack, 1995; Ni & Zhou, 2005; Tian & Siegler, 2017). A magnitude das frações está no centro de nossa teorização sobre qual é o sentido de fração (Powell & Ali, 2018).

2.6 Frações: Comparando Comprimentos

Além das diferenças conceituais entre a magnitude dos números naturais e fracionários, uma outra fonte epistemológica de dificuldades é a concepção de frações como partes de um todo (parte/todo). Referindo a esse problema epistemológico, Lamon (2001) enfatiza que "matematicamente e psicologicamente, a interpretação parte/todo da fração não é suficiente como base para o sistema de números racionais" (p. 150). Embora essa concepção seja quase exclusivamente a que os livros didáticos atuais apresentam (Scheffer & Powell, 2019), existe uma concepção alternativa que é consistente com o surgimento histórico das frações por meio de medição. Os egípcios antigos criaram frações para medir grandezas contínuas como espaço, peso e tempo e uma notação fracionária para registar suas medidas (Dilke, 1987; Jourdain, 1956; Roque, 2012). Baseado na medição, em uma concepção diferenciada, uma fração referese a uma relação—uma comparação multiplicativa entre duas quantidades da mesma espécie que são comensuráveis (Powell, 2018a, 2018b). A quantidade física que expressa magnitude mais direta e inequivocamente que outras é a de comprimento (Carraher, 1993).

Quadro 1 – Magnitude e Diferenças entre Números Naturais e Números Fracionários

Categorias de Propriedades	**Propriedades**	
	Números Naturais	Números Fracionários
(1) Sinalização de magnitude numérica	Mais dígitos quanto maiores as magnitudes: $123 > 23$. Numeral maior, maior número: $9 > 3$.	Nem o número de dígitos no numerador ou denominador nem as magnitudes dos dígitos determinam a magnitude da fração: $\frac{8}{9} > \frac{432}{123}$. Numerais maiores não indica maior número: $\frac{99}{100} < \frac{4}{3}$.
(2) Representação simbólica	Não usando operações, a magnitude tem uma única representação simbólica: a magnitude de um conjunto de três itens é simbolizada unicamente com o número 3.	Não usando operações, a magnitude de uma comparação entre duas quantidades tem uma infinidade de representações simbólicas: um e um meio itens $= \frac{3}{2} = \frac{6}{4} = \frac{9}{6} = \cdots$.
(3) Densidade	• Cada número natural tem unicamente um antecessor imediato, um sucessor imediato, ou ambos: Para 5, o antecessor imediato é 4 e o sucessor imediato é 6. • Entre quaisquer dois números naturais, o número de números naturais é finito: entre 2 e 7 tem quatro números naturais, $3, 4, 5, e\ 6$.	• Cada fração não possui nenhum antecessor imediato ou sucessor imediato. • Entre quaisquer duas frações existem infinitas outras frações. $\frac{2}{7}$ não é antecessor imediato da $\frac{3}{7}$. Entre a duas frações existe, por exemplo, este conjunto infinito de frações: $\left\{\frac{5}{14}, \frac{7}{21}, \frac{9}{28}, \frac{11}{35}, \frac{13}{42}, \ldots\right\}$.
(4) Produto e Quociente	• Multiplicação pode ser definida como adição repetida: $3 + 3 + 3 + 3 = 4 \times 3$. • Multiplicando-se dois números naturais diferentes de 1 ou 0 entre si produz-se um produto maior que os fatores: $4 \times 3 = 12, 12 > 4$ e $12 > 3$. • Dividindo-se quaisquer dois números naturais que sejam diferentes de 1 produz-se um quociente que é menor do que o dividendo: $12 \div 3 = 4, 4 < 12$.	• Multiplicação como adição repetida é uma definição insuficiente: $3 \times \frac{2}{5} = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$ mas $\frac{3}{7} \times \frac{2}{5}$ não • Multiplicando-se duas frações diferentes de 1 ou 0 entre si pode-se produzir um produto menor que um dos dois fatores: $\frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{15}, \frac{1}{3} > \frac{2}{15}$ e $\frac{2}{5} > \frac{2}{15}$ • Dividindo-se duas frações diferentes de 1 entre si pode-se obter um quociente maior que o dividendo: $\frac{1}{2} \div \frac{1}{4} = 2, 2 > \frac{1}{2}$.

Fonte: Uma elaboração de Obersteiner et al. (2019, p. 140)

A interpretação de uma fração em termos de comprimento pode ser entendida assim: Suponhamos que temos dois objetos A e B, cujos comprimentos têm u como uma unidade comum. Suponhamos ainda que as medidas dos dois objetos equivalem, respectivamente, a 5 e 7. Então, se medimos o comprimento de A, agora considerando B como a unidade de medida, ele equivale a $5/7$ de B ou $5/7 \times B$. No geral, dados os objetos A e B, com u como a unidade comum, e A equivalendo a unidades de u e B equivalendo b unidades de u, o comprimento do A medido pelo comprimento de B equivale a/b de B. Assim, a fração a/b descreve uma relação entre os comprimentos dos dois objetos, A e B. A relação é uma comparação multiplicativa, $A = a/b$ de B. Chamamos a expressão a/b de B ou $a/b \times B$ de fração-*de*-quantidade. Ela é a medida do comprimento de A em relação ao comprimento de B. A notação simbólica, a/b, é uma fração-*como*-número.

Como um passo cognitivo e pedagógico anterior ao ensino de frações como números e as suas operações, usamos nossa noção de fração-*de*-quantidade para introduzir o estudo das magnitudes de frações não-simbólicas e simbólicas. Como uma fração-*de*-quantidade representa um comprimento, nossa noção é baseada em uma quantidade contínua. Por contraste, a noção de frações como parte/todo faz com que quantidades contínuas, como as áreas geométricas, sejam discretizadas. No entanto, pesquisas neurocognitivas indicam que estudantes nos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental têm maior acuidade para julgar entre as magnitudes de pares de razões não-simbólicas contínuas (Jeong, Levine, & Huttenlocher, 2007; Matthews & Ellis, 2018). Mais ainda, nossa noção de fração-*de*-quantidade evita o uso de contagem como a base cognitiva de uma fração e, em vez disso, foca na cognição da magnitude relativa de duas quantidades. Com base nisso, optamos por usar materiais manipulativos que representam quantidades contínuas e comensuráveis e que não têm marcações ou segmentações, como, por exemplo, as barras de frações ou os blocos de Dienes (blocos base 10); ou valores fixos, tal como as barras de frações e o FRAC-SOMA 235. Por essas razões, empregamos as barras de *Cuisenaire* (Figura 2) e focamos nos seus comprimentos.

Figura 2 – Uma escala das barras de Cuisenaire. O comprimento das barras varia de um a 10 centímetros
Fonte: Arquivo do autor

2.7 Abordagens Diferentes: Medição e Partição

As barras de *Cuisenaire* nos permitem representar uma relação multiplicativa entre os comprimentos de duas quantidades comensuráveis e assim representar um número fracionário qualquer. Neste sentido, esse material pedagógico se torna propício para a abordagem dos números fracionários com base na perspectiva de medição com suas duas partes: fração-*de*-quantidade e fração-*como*-número (Powell & Ali, 2018).

Em contrapartida, a abordagem predominante nos livros didáticos atuais é a perspectiva de partição (Scheffer & Powell, 2019). Nessa perspectiva, ontologicamente as frações surgem da partição ou divisão de áreas geométricas em partes iguais, no destaque de algumas das partes e sua nomeação, com uma linguagem oral e escrita, de modo que, na linguagem, utiliza-se de palavras e símbolos matemáticos. Epistemologicamente, as frações são aprendidas pelo método de discretizar uma grandeza contínua em um conjunto de objetos discretos de partes iguais, decidir quantas partes sobre qual focar a atenção e contar duas vezes: uma conta para o denominador e a outra para o numerador.

Essa perspectiva de partição avança a ideia de que uma fração tem várias interpretações: (1) parte/todo ou parte/conjunto, (2) o resultado da divisão de dois números, (3) a razão de duas quantidades, (4) operadores e (5) medidas (Behr, Harel, Post, & Lesh, 1992; Kieren, 1976, 1988; Lamon, 1999/2005). Essas interpretações são todas com base na ideia de que uma fração representa partes de um todo divido em partes iguais, incluindo a interpretação de *(5) medidas*. No seu estudo sobre os fundamentos cognitivos e instrucionais do número racional, (Kieren, 1976) explica que "números racionais são medidas ou pontos em uma reta numérica" (p. 103, tradução nossa) e que "o fundamental para essa interpretação é a noção de que a unidade para a reta numérica, uma vez escolhida, pode ser dividida em qualquer número de partes congruentes" (p. 131, tradução nossa).

Na perspectiva de medição, um número fracionário representa não uma parte de um objeto partido em seções iguais, mas de uma outra relação matemática. A relação é da proporção ou comparação multiplicativa entre duas quantidades da mesma espécie que têm uma unidade de comensurabilidade.

3 Aspectos metodológicos

A metodologia de nosso projeto de pesquisa é baseada no *design research* (Powell & Ali, 2018; Sztajn, Wilson, Edgington, Myers, & Dick, 2013), que em Portugal é conhecida como 'investigação baseada em design' (Ponte, Carvalho, Mata-Pereira, & Quaresma, 2016), e no Brasil como 'pesquisa de desenvolvimento' (Barbosa & Oliveira, 2015). Para nós, a ideia central da metodologia é investigar um problema educacional para construir tanto uma resposta quanto uma teoria local para o problema que sejam eficazes, robustas e válidas ecologicamente[5] no local da pesquisa. A investigação acontece com uma equipe colaborativa, cujos membros podem ser pesquisadores e estudantes universitários, administradores e professores escolares, e outras partes interessadas, tal como elementos da comunidade e pais.

Nossa investigação de *design research* está sendo conduzida por uma equipe colaborativa que inclui o seguinte: um pesquisador universitário; dois doutorandos, sendo um deles administrador da secretaria de educação do município; oito professores do Ensino Fundamental e uma mãe de uma criança da escola onde o projeto foi baseado, que gosta de Matemática. O projeto tem como objetivo entender e registrar as possibilidades e os obstáculos da implementação de uma perspectiva, fração-*de*-quantidade, para ampliar os entendimentos conceituais de magnitude dos números fracionários de estudantes do segundo ano (7 anos de idade) do Ensino Fundamental. Esta parte do objetivo contrasta com o ensino usual. Especificamente, como em outros estados dos EUA, em New Jersey, o estudo de frações começa não no segundo, mas no terceiro ano (New Jersey Department of Education, 2016).

[5] Este termo é uma tradução de inglês—*ecological validity*—e significa que os métodos, materiais e cenário de uma investigação científica aproxima o mundo real que está sendo examinado. No *design research*, o termo indica que no cenário de um estudo sobre aprendizagem simula as condições sociais e culturais de uma sala de aula no local da investigação.

Nosso projeto de *design research* tem três fases. A primeira ocorreu durante os meses de fevereiro a julho de 2018, quando a equipe pesquisadora realizou três ações: (1) estudou alguns problemas conceituais que a perspectiva parte/todo traz para a aprendizagem de frações; (2) explorou a abordagem alternativa com base na ideia de medição; e (3) elaborou tarefas para a implementação da abordagem alternativa com estudantes do segundo ano do Ensino Fundamental.

Na segunda fase, que aconteceu de setembro de 2018 a fevereiro de 2019, a equipe pesquisadora implementou as tarefas com, inicialmente, 35 estudantes, e ocorreu em uma escola da Educação Infantil (5 anos) ao 8º ano, mas durante um programa extraescolar A escola é uma das Escolas Públicas de Newark (NPS), cidade localizada ao norte de estado de Nova Jersey. O NPS tem uma população estudantil composta por 43% de afrodescendentes e 46% de latinos (Newark Public Schools, 2019). Os estudantes vêm de famílias de baixa renda, em que 84% dos estudantes são escolhidos para almoços gratuitos ou de um preço reduzido (Newark Public Schools, 2019). Com relação ao desempenho dos estudantes em Matemática, na primavera de 2018, comparado à média do estado, que é de 53% (State of New Jersey Department of Education, 2019), apenas 33% dos estudantes da NPS do 3º ao 8º ano atingiram ou excederam as expectativas (Newark Public Schools, 2019) no âmbito estadual-administrado—*Partnership for Assessment of Readiness for College and Careers*[6] (PARCC).

Os estudantes voluntariaram-se para participar, com o consentimento escrito de seus pais e o seu assentimento oral gravado em áudio. Foram divididos em dois grupos, 17 estudantes em um e 16 no outro. Cada grupo reunia-se em uma sala de aula onde um pesquisador e uma professora lecionavam, enquanto quatro outros membros da equipe de pesquisa observavam as aulas e faziam anotações. Cada aula durava uma hora e depois, de acordo com a metodologia de *design research*, durante uma hora a equipe refletia sobre a logística da aula, o entendimento matemático dos estudantes, e modificações das tarefas já elaboradas para a próxima aula. Todas as aulas com os estudantes e as reuniões de reflexão com a equipe pesquisadora foram gravadas em vídeo. No total, houve 24 sessões (ou horas) de aulas com os estudantes. Durante a última terça parte das sessões no programa pós-escola, o número médio de estudantes que assistiu nossas aulas era de 21; ou seja, 10 e 11 estudantes, respectivamente, em cada sala de aula. Nossa prática pedagógica obedece o Modelo Instrucional-4*A* (Powell, 2018b). Uma característica do modelo é que os estudantes escrevem expressões simbólicas só depois de trabalharem mentalmente, sem as barras de Cuisenaire.

A última fase do projeto envolve a análise dos dados e a escrita de um relatório. É a fase atual, que vai de março a junho de 2019. A equipe pesquisadora se reúne por três horas semanalmente para ler as anotações, assistir aos vídeos e olhar os trabalhos escritos dos estudantes. As reuniões têm como objetivo compreender as possibilidades e os obstáculos para os estudantes em relação à abordagem fração-*de*-quantidade para ampliar os entendimentos conceituais de magnitude dos números fracionários.

Em termos cognitivos para os estudantes, a equipe pesquisadora construiu as 24 sessões de tarefas matemáticas para incluir quatro momentos principais: (1) transformação cognitiva da ferramenta instrucional, as barras de Cuisenaire, de um artefato a um instrumento ao modo da teoria de gênese instrumental (Rabardel & Beguin, 2005) que inclui quais nomes os estudantes dão às cores das barras e quais

[6] Em português seria Parceria para Avaliação da Prontidão para o Colégio e Carreiras (tradução nossa). É um teste que estados podem usar para avaliar o desempenho matemático dos seus estudantes. Para maiores informações, veja < https://parcc-assessment.org>.

letras usam para representar cada barra (ver Quadro 2); (2) comparações de magnitudes absolutas entre as barras, eventualmente usando frases verbais que referem ideias como =, ≠, < e > e as expressões escritas usando essas notações matemáticas; (3) mensuração do comprimento de uma barra com o comprimento de uma outra barra, levando às expressões de frações-*de*-quantidade; e (4) comparação de magnitude relativa entre duas frações-*de*-quantidade. O terceiro e quarto momentos, que envolvem as frações-*de*-quantidade e comparações de magnitudes relativas, são os alvos de nossa análise preliminar.

Quadro 2 – Em português e inglês, as Cores e Letras que correspondem às Barras de *Cuisenaire* de Menor a Maior

português	branca	vermelha	verde	roxa	ouro	verde escura	negra	marrom	azul	laranja
	b	*v*	*c*	*r*	o	*e*	*n*	*m*	*a*	*l*
inglês	white	red	green	purple	yellow	dark green	ebony	tan	blue	orange
	w	*r*	*g*	*p*	*y*	*d*	*e*	*t*	*b*	*o*

Fonte: Arquivo do autor

4 Descrição e Análise dos Dados

O corpo de dados consiste de gravações em vídeo das 24 sessões de cada uma das duas salas de aula, os trabalhos escritos de cada um dos estudantes, as tarefas propostas, as anotações dos professores observadores, e as gravações em vídeo das 24 reuniões da equipe pesquisadora. Para essa análise preliminar, identificamos situações em que os estudantes foram envolvidos com a mensuração do comprimento de uma barra em comparação multiplicativa com o comprimento de uma outra barra e com a comparação de magnitude relativa entre duas frações-*de*-quantidade.

Por meio da nossa análise preliminar, notamos cinco categorias de resultados que começam com comparações multiplicativas e terminam com comparações de magnitudes entre frações-*de*-quantidade. Na primeira categoria os estudantes observam que alguns comprimentos das barras podem ser compostos por comprimentos de outras barras da mesma cor (veja Figura 3). Assim, eles estão envolvidos com comparações multiplicativas.

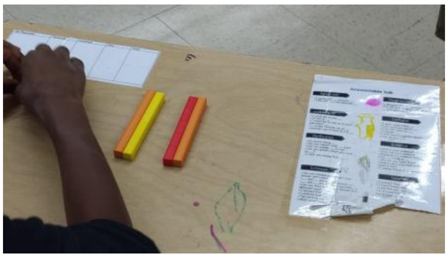
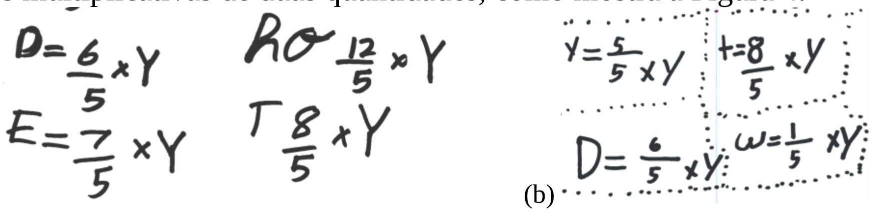
(a)  (b) 

Figura 3 – (a) Lendo da esquerda à direita, o comprimento de uma barra laranja equivale ao comprimento de duas barras amarelas. Como o comprimento de cinco barras vermelhas equivale ao comprimento de uma barra laranja, o comprimento de uma barra vermelha equivale a um quinto do comprimento de uma barra laranja. (b) Investigando quais barras podem ser medidas exatamente com as barras vermelhas.

Fonte: Arquivo do autor.

Na segunda categoria de resultados, os estudantes desenvolvem um critério para nomear o comprimento de uma barra branca quando medido por cada uma das outras barras. Por exemplo, em um episódio do vídeo, os estudantes medem o comprimento da barra marrom com as barras vermelhas e com as barras brancas, notando que o comprimento da barra marrom equivale ao comprimento de quatro barras vermelhas e ao de oito barras brancas. Estava, dessa forma, introduzida a linguagem para descrever a medida de uma barra vermelha medida por uma barra marrom: o comprimento de uma barra vermelha medida por uma barra marrom é um quarto da barra marrom. Depois, quando o professor pede para os estudantes descreverem o comprimento de uma barra branca medida por uma barra marrom, eles dizem que "o comprimento da barra branca é um oitavo do comprimento da barra marrom". Evidentemente, o critério que eles desenvolveram é que o número de barras de uma só cor que compõe o comprimento da barra de medida indica o nome de uma barra. Em inglês, esse nome seria o correspondente número ordinal com "*th*".

Em uma terceira categoria de resultados, os estudantes engajam-se em tarefas de escrita de expressões de frações-*de*-quantidade nas quais frações próprias e impróprias aparecem (Figura 4; ver Quadro 2 para a letra e cor-da-barra correspondente). Depois de tarefas com as barras de *Cuisenaire*, nas quais os estudantes falaram sobre as relações de comparações multiplicativas de duas quantidades, agora sem as barras, eles evocam mentalmente duas quantidades correspondendo às barras, e descrevem oralmente as relações entre as barras evocadas. Quando alcançam uma fluência nas suas descrições orais, os estudantes aprendem como escrever simbolicamente suas descrições das comparações multiplicativas de duas quantidades, como mostra a Figura 4.



(a) (b)

Figura 4 – (a) A escrita livre de uma estudante, indicando o nome do comprimento de algumas barras de *Cuisenaire* quando estão sendo medidas pela barra amarela. (b) A escrita livre de um estudante que também está medindo o comprimento de algumas barras com a barra amarela. A letra-cor correspondente está no Quadro 2. A "letra" RO indica um comprimento composto de vermelho mais laranja (***r****ed plus* ***o****range*).

Fonte: Arquivo do autor.

Para a quarta categoria de resultados, os estudantes evidenciam o conhecimento de que tanto uma descrição verbal quanto uma expressão escrita simbólica de uma fração-*de*-quantidade representam um comprimento, uma magnitude. Embora tivessem medido uma quantidade com outra, ambos com e sem as barras, foi necessário um salto cognitivo para eles ouvirem ou verem uma expressão de fração-*de*-quantidade como esta, $\frac{6}{4} \times p$ (seis quartos da barra roxa), e pensar no comprimento ou magnitude implícito que, neste caso, simbolicamente é a barra d (verde escura).

Na quinta e última categoria de resultados, os estudantes comparam expressões de fração-*de*-quantidade simbólicas. Em uma sessão, no final do projeto, sem o auxílio das barras de Cuisenaire, pedimos aos estudantes para escreverem relações entre pares de fração-*de*-quantidade, usando sinais de desigualdades e de igualdade (ver Figura 5). Em sessões anteriores, eles já descreveram oralmente relações entre pares de fração-*de*-quantidade. Um estudante descreve um par de fração-*de*-quantidade, um outro estudante anuncia quais são as duas quantidades (as barras de Cuisenaire) implícitas, e um terceiro estudante diz qual expressão é maior que a outra ou, se for o caso, que as expressões são iguais.

(a) (b)

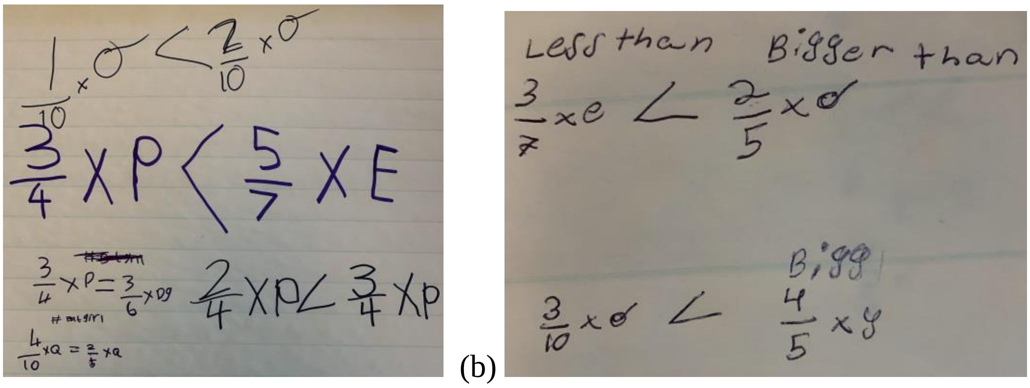


Figura 5 – (a) e (b) No *flip chart*, as escritas livres de cinco estudantes, comparando as magnitudes implícitas nas expressões de pares de fração-*de*-quantidade, usando os sinais de desigualdades e de igualdade. A letra-cor correspondente está no Quadro 2.

Fonte: Arquivo do autor

Nesta sessão, pedimos que os estudantes escrevessem suas expressões em papeis nas suas mesas e que conversassem e verificassem suas expressões com os companheiros do seu grupo. Depois, convidamos um estudante de cada vez para escrever uma expressão em um *flip chart* que ficava na frente da sala de aula. A Figura 5 ilustra as expressões de desigualdade e igualdade que cinco estudantes ofereceram para serem apreciadas pelos outros (a letra-cor correspondente está indicada no Quadro 2). Os estudantes mostram expressões onde a unidade de medida é a mesma entre os pares de fração-*de*-quantidade, tal como $\frac{1}{10} \times o < \frac{2}{10} \times o$ (um décimo da barra laranja é menor que dois décimos da barra laranja), $\frac{4}{10} \times o = \frac{2}{5} \times o$, e $\frac{2}{4} \times p < \frac{3}{4} \times p$. Também, os estudantes constroem expressões nas quais a unidade de medida é diferente entre os pares de fração-*de*-quantidade, tal como $\frac{3}{4} \times p < \frac{5}{7} \times e$; $\frac{3}{4} \times p = \frac{3}{6} \times dg$, onde $dg = d$; $\frac{3}{7} \times e < \frac{2}{5} \times d$, e $\frac{3}{10} \times o < \frac{4}{5} \times y$.

5 Considerações Finais

O objetivo de nossa pesquisa foi entender as potencialidades da perspectiva, medição e fração-*de*-quantidade, para ampliar os entendimentos conceituais de magnitude dos números fracionários de estudantes do segundo ano (7 anos de idade) do Ensino Fundamental. Sem problemas cognitivos, eles construíram a ideia de que fração expressa uma relação, uma comparação multiplicativa entre duas quantidades. Para descrever essa comparação, eles se apropriaram da linguagem simbólica—verbal e escrita - com facilidade e compreensão. Nas configurações das barras de *Cuisenaire* que os estudantes construíram, e na linguagem que eles usaram e da qual se apropriaram, a unidade de medida é sempre perceptível e falada. Também, a unidade é sempre contínua e não discretizada. Assim, a comparação de duas frações-*de*-quantidade corresponde a maior acuidade que seres humanos têm para julgar entre as magnitudes de pares de razões não-simbólicas contínuas (Jeong et al., 2007; Matthews & Ellis, 2018).

Nas suas expressões de fração-*de*-quantidade, os estudantes usaram naturalmente frações próprias e impróprias. Isso contrasta com a abordagem parte/todo na qual as frações impróprias oferecem dificuldades para serem definidas, como uma fração é concebida como uma parte de um todo e, assim, não pode ser maior que o todo (Lamon, 2001).

Com algumas dificuldades que foram eventualmente superadas, os estudantes conseguiram pensar no comprimento ou magnitude de uma expressão de fração-*de*-quantidade quando a perceberam verbalmente ou visualmente.

Os estudantes apropriaram-se da ideia de magnitude de frações-*de*-quantidade, não por responderem às perguntas em planilhas, mas, com base nas imagens evocadas das barras de Cuisenaire, por construírem suas expressões de comparações fracionárias. Suas observações baseiam-se nas relações de comparações multiplicativas entre duas quantidades que suas mentes visualizam. Dessas experiências, os estudantes estão prontos para fazer observações sobre suas expressões e chegar às conclusões sobre a comparações de frações-*como*-números.

6 Agradecimentos

Uma parte desta pesquisa foi financiada por meio de uma bolsa durante os anos de 2018 e 2019 ao autor por meio do *Mathematics Education Trust* (MET) do *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM). A pesquisa também recebeu financiamento de entidades da *Rutgers University-Newark* e da *Newark Board of Education*. Agradecemos seu apoio. Além disso, estamos gratos aos dois pareceristas anônimos do manuscrito submetido ao ENEM e ao Renato Franciso Merli, doutorando da Unioeste, por suas críticas e comentários que nos ajudaram a rever partes do trabalho. Contudo, os erros, ideias e opiniões são nossos.

7 Referências

Aleksandrov, A. D. (1963). A general view of mathematics (S. H. Gould & T. Bartha, Trans.). In A. D. Aleksandrov, A. N. Kolmogorov, & M. A. Lavrent'ev (Eds.), *Mathematics: Its content, methods, and meaning* (Vol. 1, pp. 1-64). Cambridge, MA: Massachusetts Institute of Technology.

Bailey, D. H., Hoard, M. K., Nugent, L., & Geary, D. C. (2012). Competence with fractions predicts gains in mathematics achievement. *Journal of Experimental Child Psychology*, *113*(3), 447-455. doi:https://doi.org/10.1016/j.jecp.2012.06.004

Barbosa, J. C., & Oliveira, A. M. P. d. (2015). Por que a pesquisa de desenvolvimento na Educação Matemática? *Perspectivas da Educação Matemática, 8*, 526-546.

Behr, M. J., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio and proportion. In D. A. Grows (Ed.), *Handbook on research on mathematics teaching and learning* (pp. 296-333). New York: Macmillan.

Behr, M. J., Wachsmuth, I., Post, T. R., & Lesh, R. (1984). Order and equivalence of rational numbers: A clinical teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education*, *5*(5), 321-341.

Booth, J. L., & Newton, K. J. (2012). Fractions: Could they really be the gatekeeper's doorman? *Contemporary Educational Psychology*, *37*(4), 247-253. doi:https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2012.07.001

Boyer, T. W., & Levine, S. C. (2012). Child proportional scaling: Is 1/3 = 2/6 = 3/9 = 4/12? *Journal of Experimental Child Psychology*, *111*(3), 516-533. doi:https://doi.org/10.1016/j.jecp.2011.11.001

Broetto, G. C., & Santos-Wagner, V. M. P. d. (2017). *Números irracionais para professores (e futuros professores) de matemática: Uma abordagem direcionada à sala de aula*. Vitória, ES: Edifes.

Caraça, B. d. J. (1951). *Conceitos fundamentais da Matemática*. Lisboa: Tipografia Matemática.
Carraher, D. W. (1993). Lines of Thought: A Ratio and Operator Model of Rational Number. *Educational Studies in Mathematics, 25*(4), 281-305.
Carraher, D. W. (1996). Learning about fractions. In L. P. Steffe, P. Nesher, G. A. Goldin, P. Cobb, & B. Greer (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 241-266). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
Clawson, C. C. (1994/2003). *The mathematical traveler: Exploring the grand history of numbers*. Cambrige, MA: Perseus.
De Morgan, A. (1836/2010). *The connection of number and magnitude: An attempt to explain the Fifth Book of Euclid*. Whitefish, Montana: Kessinger.
Dehaene, S. (2011). *The number sense: How the mind creates mathematics*. Oxford: Oxford University Press.
Dilke, O. A. W. (1987). *Mathematics and measurement*. London: British Museum.
Duffy, S., Huttenlocher, J., & Levine, S. (2005). It is all relative: How young children encode extent. *Journal of Cognition and Development, 6*(1), 51-63.
Euler, L. (1765/1822). *Elements of algebra* (The Rev. John Hewlett, Trans. 3rd ed.). London: Longman, Hurst, Rees, Orme and Co.
Fazio, L. K., Bailey, D. H., Thompson, C. A., & Siegler, R. S. (2014). Relations of different types of numerical magnitude representations to each other and to mathematics achievement. *Journal of Experimental Child Psychology, 123*, 53-72. doi:10.1016/j.jecp.2014.01.013
Feigenson, L., Dehaene, S., & Spelke, E. (2004). Core systems of number. *Trends in Cognitive Sciences, 8*(7), 307-314. doi:https://doi.org/10.1016/j.tics.2004.05.002
Jeong, Y., Levine, S. C., & Huttenlocher, J. (2007). The development of proportional reasoning: Effect of continuous versus discrete quantities. *Journal of Cognition and Development, 8*(2), 237-256.
Jordan, N. C., Hansen, N., Fuchs, L. S., Siegler, R. S., Gersten, R., & Micklos, D. (2013). Developmental predictors of fraction concepts and procedures. *Journal of Experimental Child Psychology, 116*(1), 45-58. doi:https://doi.org/10.1016/j.jecp.2013.02.001
Jourdain, P. E. B. (1956). The nature of mathematics. In J. R. Newman (Ed.), *The world of mathematics* (Vol. 1, pp. 4-72). New York: Simon and Schuster.
Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive and instructional foundations of rational number. In R. A. Lesh (Ed.), *Number and measurement* (pp. 101-144). Columbus, Ohio: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.
Kieren, T. E. (1988). Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. In J. Heibert & M. J. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 49-84). Reston, VA: Lawrence Erlbaum.
Lamon, S. J. (1999/2005). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers* (2nd ed.). New York: Lawrence Erlbaum Associates.
Lamon, S. J. (2001). Presenting and representing: From fractions to rational numbers. In A. Cuoco & F. Curcio (Eds.), *The Roles of Representations in School Mathematics - 2001 Yearbook* (pp. 146-168). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.
Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. In J. F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research*

on mathematics teaching and learning: A Project of the National Council of Teachers of Mathematics (pp. 629-667). Charlotte, NC: Information Age.

Lewis, M. R., Matthews, P. G., & Hubbard, E. M. (2015). Neurocognitive architectures and the nonsymbolic foundations of fractions understanding. In D. B. Berch, D. C. Geary, & K. M. Koepke (Eds.), *Development of mathematical cognition: Neural substrates and genetic influences* (pp. 141–160). San Diego, CA: Academic Press.

Lewis, M. R., Matthews, P. M., & Hubbard, E. M. (2015). Neurocognitive architectures and the nonsymbolic foundations of fractions understanding. In D. B. Berch, D. C. Geary, & K. M. Koepke (Eds.), *Development of mathematical cognition: Neural substrates and genetic influences* (pp. 141–160). San Diego, CA: Academic Press.

Mack, N. K. (1995). Confounding whole-number and fraction concepts when building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(5), 422-441.

Matthews, P. G., & Ellis, A. B. (2018). Natural alternatives to natural number: The case of ratio. *Journal of Numerical Cognition, 4*(1), 19-58. doi:10.5964/jnc.v4i1.97

Matthews, P. G., Lewis, M. R., & Hubbard, E. M. (2016). Individual differences in nonsymbolic ratio processing predict symbolic math performance. *Psychological Science, 27*(2), 191-202. doi:10.1177/0956797615617799

McCrink, K., & Wynn, K. (2007). Ratio abstraction by 6-month-old infants. *Psychological Science, 18*(8), 740-745.

New Jersey Department of Education. (2016). *New Jersey student learning standards for mathematics*. Trenton, NJ: New Jersey Department of Education.

Newark Public Schools. (2019). District Summary (2017-2018). Retrieved from http://www.nps.k12.nj.us/departments/data-research/district-summary/

Ni, Y., & Zhou, Y.-D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist, 40*(1), 27-52.

Obersteiner, A., Dresler, T., Bieck, S. M., & Moeller, K. (2019). Understanding fractions: Integrating results from mathematics education, cognitive psychology, and neuroscience. In A. Norton & M. W. Alibali (Eds.), *Constructing number: Merging perspectives from psychology and mathematics Education* (pp. 135-162). Cham: Springer.

OECD. (2014). A profile of student performance in mathematics. In *PISA 2012 results: What students know and can do—Student performance in mathematics, reading, and science* (Vol. 1, Revised edition, February 2014, pp. 31-144). Paris: OECD Publishing.

Piazza, M. (2010). Neurocognitive start-up tools for symbolic number representations. *Trends in Cognitive Sciences, 14*(12), 542-551. doi:https://doi.org/10.1016/j.tics.2010.09.008

Ponte, J. P. d., Carvalho, R., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2016). Investigação baseada em design compreender e melhorar a práticas educativas. *Quadrante, 25*(2), 77-.

Powell, A. B. (2018a). Melhorando a epistemologia de números fracionários: Uma ontologia baseada na história e neurociência. *Revista de Matemática, Ensino e Cultura, 13*(29), 78-93.

Powell, A. B. (2018b). Reaching back to advance: Towards a 21st-century approach to fraction knowledge with the 4A-Instructional Model. *Revista Perspectiva, 36*(2), 399-420.

Powell, A. B., & Ali, K. V. (2018). Design research in mathematics education: Investigating a measuring approach to fraction sense. In J. F. Custódio, D. A. da Costa, C. R. Flores, & R. C. Grando (Eds.), *Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica (PPGECT): Contribuições para pesquisa e ensino* (pp. 221-242). São Paulo: Livraria da Física.

Rabardel, P., & Beguin, P. (2005). Instrument mediated activity: from subject development to anthropocentric design. *Theoretical Issues in Ergonomics Science, 6*(5), 429-461.

Resnick, I., Jordan, N. C., Hansen, N., Rajan, V., Rodrigues, J., Siegler, R. S., & Fuchs, L. S. (2016). Developmental growth trajectories in understanding of fraction magnitude from fourth through sixth grade. *Developmental Psychology, 52*(5), 746-757.

Ribeiro, E. S. (2010). Um estudo sobre o símbolo, com base na semiótica de Peirce. *Estudos Semióticos, 6*(1), 46–53.

Roque, T. (2012). *História da matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro: Zahar.

Scheffer, N. F., & Powell, A. B. (2019). Frações nos livros brasileiros do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). *Revemop, 1*(3), 476-503.

Siegler, R. S. (2016). Magnitude knowledge: The common core of numerical development. *Developmental Science, 19*(3), 341-361. doi:10.1111/desc.12395

Siegler, R. S., Duncan, G. J., Davis-Kean, P. E., Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M., . . . Chen, M. (2012). Early Predictors of High School Mathematics Achievement. *Psychological Science, 23*(7), 691-697. doi:doi:10.1177/0956797612440101

Siegler, R. S., Thompson, C. A., & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive Psychology, 62*(4), 273-296. doi:doi:10.1016/j.cogpsych.2011.03.001

Sophian, C. (2000). Perceptions of proportionality in young children: Matching spatial ratios. *Cognition, 75*(2), 145-170. doi:10.1016/S0010-0277(00)00062-7

State of New Jersey Department of Education. (2019). *PARCC Spring State Summary Report, Mathematics 03 SY 2017-2018*.

Struik, D. J. (1948/1967). *A concise history of mathematics* (3rd Revised ed.). New York: Dover.

Sztajn, P., Wilson, H., Edgington, C., Myers, M., & Dick, L. (2013). Using design experiments to conduct research on mathematics professional development. *ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, 6*(1), 9-34.

Tian, J., & Siegler, R. S. (2017). Why learning common fractions is uncommonly difficult: unique challenges faced by students with mathematical disabilities. *Journal of Learning Disabilities, 50*(6), 651.

Torbeyns, J., Schneider, M., Xin, Z., & Siegler, R. S. (2015). Bridging the gap: Fraction understanding is central to mathematics achievement in students from three different continents. *Learning and Instruction, 37*, 5-13. doi:http://dx.doi.org/10.1016/j.learninstruc.2014.03.002

Received: 09 September 2019
Accepted: 31 October 2019