Sociedade Brasileira de Educação Matemática

RIPEM

Retângulo que não é retângulo? A aplicação dos experimentos mentais no Quadrilátero de Saccheri

Willian José da Cruz
Universidade Federal de Juiz de Fora
Juiz de Fora, MG — Brasil
willian.cruz@ufjf.br
0000-0001-7509-1021

2238-0345

10.37001/ripem.v12i4.2920

Recebido • 30/09/2021
Aprovado • 20/03/2022
Publicado • 01/09/2022

Editor • Gilberto Januario

Resumo: Este artigo é um dos resultados da pesquisa teórica intitulada A semiótica e os Experimentos Mentais no ensino e na aprendizagem em Matemática. A motivação para esta investigação nasceu da busca pelo entendimento de como os Experimentos Mentais podem se constituir em uma metodologia para o ensino da Matemática. Nosso objetivo foi estudar as características dos Experimentos Mentais na Educação Matemática e como tais experimentos podem influenciar a abordagem de problemas relativos ao Quadrilátero de Saccheri. Nosso aporte teórico-metodológico está ancorado na semiótica sob a perspectiva de Peirce. Nossa conclusão é que tais características condicionam os Experimentos Mentais como Metodologia Alternativa para o Ensino da Matemática na perspectiva histórico-dialética da educação com ênfase na epistemologia.

Palavras-chave: Epistemologia. Educação Matemática. Ensino. Semiótica. Metodologia.

Rectangle that is not a rectangle? The application of thought experiments to Saccheri Quadrilateral

Abstract: This article is one of the results of the theoretical research entitled The Semiotics and Thought Experiments in teaching and learning in Mathematics. The motivation for this investigation was born from the search for an understanding of how Thought Experiments can constitute a methodology for teaching Mathematics. Our objective was to study the characteristics of Thought Experiments in Mathematics Education and how such experiments can influence the approach to problems related to the Saccheri Quadrilateral. Our theoretical-methodological contribution is anchored in semiotics from Peirce's perspective. Our conclusion is that such characteristics condition Thought Experiments as an Alternative Methodology for Teaching Mathematics in the historical-dialectical perspective of education with an emphasis on epistemology.

Keywords: Epistemology. Mathematics Education. Teaching. Semiotics. Methodology.

¿Rectángulo que nos es un rectángulo? La aplicación de los experimentos mentales al Cuadrilátero de Saccheri

Resumen: Este artículo es uno de los resultados de la investigación teórica titulada semiótica y los experimentos mentales en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. La motivación de esta investigación nació de la búsqueda de la comprensión de cómo los Experimentos Mentales pueden constituir una metodología para la enseñanza de las Matemáticas. Nuestro objetivo fue estudiar las características de los Experimentos Mentales en la Educación Matemática y cómo dichos experimentos pueden influir en el planteamiento de problemas relacionados con el Cuadrilátero de Saccheri. Nuestro aporte teórico-metodológico está anclado en la semiótica a través de la perspectiva de Peirce. Nuestra conclusión es que tales

características condicionan a los Experimentos Mentales como una Metodología Alternativa para la Enseñanza de las Matemáticas en la perspectiva histórico-dialéctica de la educación con énfasis en la epistemología.

Palabras clave: Epistemología. Educación Matemática. Enseñando. Semiótica. Metodología.

1 Introdução

"Devemos generalizar, se quisermos garantir o futuro da cultura científica e da Matemática" (Cruz, 2018, p. 154). Não considerar o processo de generalização na Matemática, a tornaria numa espécie de jogo de xadrez.

Mas por que ensinamos Matemática na Escola? Uma possível resposta é que acreditamos que ela "ajudará a estabelecer e a legitimar um discurso que toda pessoa com boa vontade poderia aceitar de boa-fé" (Otte, 2012, p. 149). Isto é, ensinamos Matemática, pois buscamos por racionalidade e inteligibilidade.

No entanto, Matemática não poderia, ao nosso sentir, ser estruturada e nem ensinada na escola como simplesmente um conhecimento de algoritmos, se pautando exclusivamente em calculações e provas formais. Cruz (2018) argumenta que a percepção que se tem atualmente da matemática, a caracteriza como um determinado tipo de raciocínio, expressando-a como um amontoado de fórmulas e afirmações, configurando-a como uma atividade de demonstração de provas. Na verdade, a Matemática, como outras disciplinas, deveria contribuir para uma busca comum pelo esclarecimento de assuntos fundamentais.

Otte (2012) afirma que a "axiomática e prova formal têm pouco a ver com o objetivo para justificar uma disciplina, embora isso pudesse ter sido a motivação para estabelecê-la. Elas são simplesmente meios de organizar as próprias teorias" (p. 152). A essência do conhecimento está em seu crescimento, e é na fronteira do conhecimento que começa a compreensão.

Este texto faz parte dos resultados da pesquisa teórica *A semiótica e os Experimentos Mentais no ensino e na aprendizagem em Matemática* cujo objetivo é estudar as características dos Experimentos Mentais na Educação Matemática e como esses experimentos influenciam o ensino e a aprendizagem dessa disciplina.

Experimento Mental é considerado uma metodologia alternativa para o ensino da Matemática, com base na perspectiva histórico-dialética da Educação, com ênfase na epistemologia. Neste contexto, a Matemática é conceituada como uma atividade semiótica que constrói diagramas, experimenta nesses diagramas e verifica os resultados. Nosso aporte metodológico de pesquisa se ancora na semiótica sob a perspectiva de Peirce.

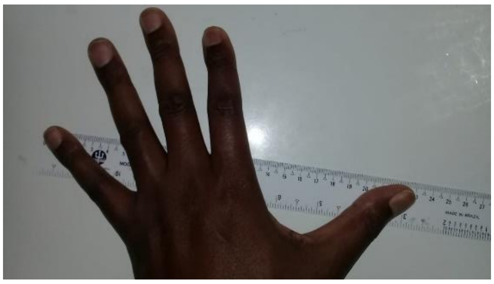
2 Matemática: uma atividade semiótica por meio de Experimentos Mentais

Há algum tempo que assumimos a perspectiva que considera a Matemática como uma atividade semiótica. Nesta perspectiva, "explicar significa representar" (Cruz, 2018, p. 129). Otte (2012) afirma que "uma representação é exatamente um aspecto da percepção, de certa maneira, numa determinada forma" (p. 33).

A própria realidade do conhecimento é considerada um processo semiótico envolvendo o próprio sujeito. Semiótica, na perspectiva peirceana, pode ser conceituada como a "ciência que estuda os signos e como eles se referem aos seus objetos e a outros signos" (Cruz, 2018, p. 6).

Por exemplo, a palavra palmo é considerada um signo que pode significar para alguns, a distância que vai do dedo polegar ao mínimo, como pode ser observado na Figura 1, ou pode significar para outros, uma unidade de medida inglesa equivalente a 22,86 cm ou a 9 polegadas (aproximadamente).

Figura 1: O palmo

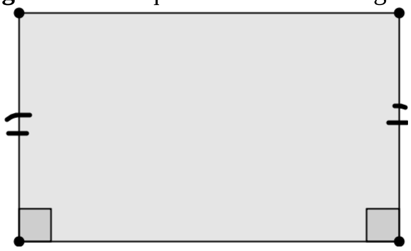


Fonte: Autoria Própria (2021)

Nosso campo teórico da semiótica se ancora nos estudos de Charles Sanders Peirce, considerado um dos criadores da semiótica. Peirce (2010a) oferece uma tríade e distingue entre os signos: O *representâmen* que é o signo, o *objeto* representado pelo signo e o *interpretante* que é um efeito interpretativo que o signo causa.

O nosso desafio teórico e semiótico é imaginar um quadrilátero que tenha dois ângulos retos e dois lados opostos congruentes, como indicado na Figura 2, mas que não seja retângulo. Esse tipo de quadrilátero é chamado de Quadrilátero de Saccheri.

Figura 2: Esse quadrilátero é o retângulo?



Fonte: Autoria Própria (2021)

Do ponto de vista semiótico, a Figura 2 é o *representâmen* do objeto teórico matemático Quadrilátero de Saccheri e o interpretante está na ação de interpretação que pode surgir da relação dessa representação com o objeto teórico e com outros signos também. Por exemplo: como seria a soma dos ângulos internos desse quadrilátero e que relação existe entre os dois outros ângulos e os dois outros lados?

A Matemática como uma atividade semiótica constrói diagramas geométricos ou algébricos, desenvolve experimentos nesses diagramas e verifica os resultados, ampliando as possibilidades de interpretações e significações. Este conjunto de ações é balizador para o desenvolvimento de Experimentos Mentais.

Cruz (2021a) afirma que "há no processo de desenvolvimento da Matemática, em especial no que tange o ensino desta ciência, um tipo de experimento que denominamos Experimentos Mentais" (p. 14). Essas categorias de Experimentos no campo da Educação Matemática "tentam resgatar as experimentações, analogias e o uso de metáforas na aprendizagem em Matemática, colocando o sujeito como agente produtor de seu próprio conhecimento, exaltando a criatividade" (Cruz, 2020, p. 132).

> Cruz (2018) conceitua Experimentos Mentais, na perspectiva da Educação Matemática, como formas que o sujeito utiliza para colocar seus próprios pensamentos, no desenvolvimento de um determinado conceito, como objeto de consideração em uma dada atividade e/ou prova matemática, por meio de

> representações e ancorados a um sistema de representação coerente, isto é, a um contexto bem definido. Esses experimentos exercem, no campo da Educação Matemática, dois papéis fundamentais, a destacar: 1 — mostrar a coerência do próprio conceito; 2 — Identificar a possibilidade de aplicação desse conceito. Esses papéis não são dados de forma hierárquica, mas são identificados no processo de aplicação de tais experimentos (Cruz, 2021a, p. 14).

A Matemática desenvolvida por meio de Experimentos Mentais é "compreendida como uma atividade, uma construção a base de possibilidades" (Cruz, 2018, p. 167). O próprio Peirce (2010b) em sua Filosofia da Matemática escreve:

> Assim, a característica distintiva da matemática é que ela é o estudo científico de hipóteses que primeiro enquadra e depois traça as suas consequências. A Matemática ou é aplicada ou é pura. Matemática aplicada trata as hipóteses nas formas em que são sugeridas de início pela experiência, envolvendo mais ou menos características que não têm qualquer relação com as formas de dedução das consequências delas. A matemática pura é o resultado de uma reflexão posterior pela qual essas características irrelevantes são eliminadas (p. 49).

A Matemática então é considerada um estudo de substâncias das hipóteses ou criações mentais que servem para tirarmos certas conclusões. Esta consideração tenta diferenciar a Matemática da lógica, tornando-a, na visão de Peirce (2010b), mais abstrata que a lógica.

Aristóteles, por exemplo, define a Matemática como a ciência que tem a qualidade peculiar de abstração de seus objetos. Esse filósofo considera que "os entes matemáticos têm uma existência parasitária dos objetos reais — uma vez que objetos matemáticos só existem encarnados em objetos reais" (Silva, 2007, p. 37). Os mundos sensíveis para Aristóteles é a realidade fundamental para os entes matemáticos, isto é, tais entes são extraídos dos objetos sensíveis por meio de operações do pensamento (Silva, 2007).

Segundo Silva (2007),

> para Aristóteles, os objetos matemáticos são uma abstração apenas ou, na pior das hipóteses, uma ficção útil. Eles não têm existência separada dos objetos empíricos, são apenas aspectos deles, e se às vezes os pensamentos como independentes, isso é apenas um modo de pensar sem maiores consequências práticas (p. 44)

"*Abstrair* quer dizer literalmente *tirar fora*" (Silva, 2007, p. 44), isto é, tirar fora apenas o aspecto que interessa quando transformamos objetos empíricos em objetos matemáticos. Nesta concepção, a Matemática busca estudar objetos em determinados aspectos apenas. "Uma bola como uma esfera, um par de dois livros como dois. Ao fazermos isto, dizemos, abstraímos da bola a sua forma geométrica e da coleção de livros a sua forma aritmética" (Silva, 2007, p. 45).

No que tange nosso problema sobre pensar em um tipo de quadrilátero com dois ângulos retos e dois lados opostos congruentes, mas que não seja o retângulo, talvez a saída para Aristóteles, caso lhe fosse apresentado este problema, seria admitir que entre os objetos matemáticos houvesse também formas fictícias. De um ponto de vista mais amplo, a Matemática nas concepções aristotélicas trata não somente de formas abstratas associadas a objetos empíricos, mas também de formas abstratas possíveis. Há outro elemento a ser considerado, o elemento de idealização.

> Como a entendo, a abstração aristotélica, a operação pela qual consideramos objetos e coleções de objetos empíricos como objetos matemáticos, comporta também um elemento de *idealização.* Tratar uma bola como uma esfera é uma operação complexa: abstrai-se da bola a sua forma mais ou menos esférica e, simultaneamente, idealiza-se essa forma, isto é, desconsideram-se as diferenças entre ela e a esfera matemática perfeita (determinada pela sua *definição* como um lugar geométrico dos pontos espaciais equidistantes de um centro). Uma esfera matemática é, assim, a idealização de um aspecto de bola, e só assim ela existe (Silva, 2007, p. 46).

Poderíamos considerar, então, que o Quadrilátero de Saccheri é uma idealização da idealização, de um quadrilátero com a característica de ter dois ângulos retos e dois lados opostos congruentes. Talvez não consigamos imaginar algo real que pudesse ter a forma desse tipo de quadrilátero, mesmo assim, consideramos ser uma abstração de um certo objeto do próprio contexto matemático. O objeto em si, pode ser um conceito ou um conjunto de afirmações e relações que permita chegar a algumas conclusões e construir novos conceitos.

Portanto, nosso entendimento nos leva a considerar que a Matemática é uma construção de conceitos e, esta construção, pode ser dada por meio da aplicação dos Experimentos Mentais num dado problema e/ou atividade relacionada ao ensino e consequentemente a aprendizagem desta ciência.

3 Experimentos Mentais como metodologia alternativa de ensino para Matemática

O que é uma Metodologia de Ensino? Mais especificamente, uma Metodologia de Ensino de Matemática? Há uma definição no dicionário de filosofia de Nicola Abbagnano (2007) que considera metodologia como sendo "um conjunto de procedimentos metódicos de uma ou mais ciências" (p. 669). Talvez pudéssemos então escrever que uma metodologia de ensino de matemática é um conjunto de procedimentos metódicos que tem a intenção de ensinar matemática a alguém. Mas há outros aspectos que devem ser levados em consideração e que vai além dessa afirmação simplista do termo metodologia de ensino.

Deixamos claro que nossa intenção é assumir os Experimentos Mentais como uma metodologia alternativa de Ensino para Matemática, no entanto, há a necessidade de discutirmos o que é ensino numa perspectiva filosófica e quais as características que condicionam tais experimentos a se efetivarem como uma metodologia.

Ensino é uma atividade, afirma Scheffler (1974). Todo ensino tem um objetivo, isto é, o ensino é dirigido para um certo resultado, ou seja, "trata-se de uma atividade orientada para uma meta" Scheffler (1974, p. 75).

De forma resumida, ensinar é uma atividade direcionada para uma meta, a aprendizagem. O ensino trata-se de algo que alguém se dedica a fazer ou está ocupado em fazer, com o intuito de alcançar êxito, isto é, dirigido para um certo resultado (o aprendizado) daquilo que está fazendo ou que fez.

Scheffler (1974), discutindo o ensino numa perspectiva filosófica, escreve que "ensino é algo a que alguém se dedica, é algo dirigido para uma meta cuja consecução envolve normalmente a atenção e esforço, proporcionando, ao mesmo tempo, uma definição relevante de êxito" (p. 75).

Quando dizemos que estamos ensinando nossos alunos a manipularem o compasso, por exemplo, numa aula de geometria, o que queremos argumentar é que estamos tentando fazer com que eles aprendam a manejar tal instrumento. Isto é, o que estamos fazendo está associado a uma meta, que nossos alunos se esforçam para alcançar, ou que poderá ou não ser atingida.

Alguns alunos podem aprender mais rapidamente e outros podem demorar mais tempo. Alguns podem ter dificuldades em segurar o instrumento, ou o instrumento não ser tão adequado etc., portanto, para se atingir a meta que é a aprendizagem, outros fatores devem ser considerados. “Em suma, meta de uma atividade pode se encontrar além dos limites da própria atividade ou de um dos segmentos dessa, ou então carecer totalmente de condições temporais. Não obstante, dedicar-se à atividade em questão, envolve, em geral, tentar” (Scheffler, 1974, p. 77).

O ensino envolve um esforço de realizar o aprendizado, no entanto, a afirmação contrária é falsa. Brincando com alguns operadores lógicos, colocamos o ensino e a aprendizagem, de maneira metafórica, como uma relação de implicação lógica. Isto é, “ensinar $\Longrightarrow$ aprender”. Neste caso, o ensino e a aprendizagem são proposições. “Uma proposição *p* implica uma proposição *q* quando, em suas tabelas verdades, não ocorre VF (nesta ordem)” (Sérates, 1998, p. 47).

Do ponto de vista semiótico, utilizaremos dois índices ($\rightarrow$ e $\Longrightarrow$). O primeiro para indicar a operação entre as proposições resultando em uma nova proposição e a segunda apenas uma relação entre elas. Esta metáfora, não tem a intenção de transformar a relação ensino e aprendizagem numa estrutura fixa, rígida, mas serve tão somente para ilustrar algumas argumentações do ponto de vista filosófico.

Tabela 1: Se ensino então aprendizagem?

Ensino	Aprendizagem	Ensino → Aprendizagem
V	V	V
F	V	V
V	**F**	**F**
F	F	V

Fonte: Autoria Própria (2021)

Na proposição condicional *se ensino então aprendizagem*, VF não ocorre nesta ordem, isto quer dizer que se há ensino e não há aprendizagem, o resultado desta atividade não foi bem-sucedido. Freire (2019) argumenta que “inexiste validade no ensino de que não resulta um aprendizado em que o aprendiz não se tornou capaz de recriar ou de refazer o ensinado” (p. 26). Ao considerar que “ensino $\Rightarrow$ aprendizagem”, buscamos na operação lógica condicional, uma “tautologia”, isto é, se há ensino, a meta deveria ser alcançada. Mas pode haver aprendizagem sem ensino. Na verdade, “aprender precedeu ensinar ou em outras palavras, ensinar se diluía na experiência realmente fundante de aprender” (Freire, 2019, p. 27). É verdade também que o não-ensino pode resultar em não-aprendizagem também.

A meta do ensino é a efetivação da aprendizagem, mas, “embora a efetivação do aprendizado seja indispensável para o êxito do ensino ela não é por si só, suficiente; é necessário, além disso, que o aprendizado se realize de maneira apropriada” (Scheffler, 1974, p. 78).

A despeito da implicação lógica material que apresentamos por meio da lógica proposicional, o ensino como uma atividade exige esforço e tempo. “Não é um evento instantâneo” (Scheffler, 1974, p. 78). Qual o tempo necessário para desenvolver uma atividade de ensino? Se a questão é sobre quanto tempo estive ocupado a ensinar, isto sugere que ao final deste tempo eu tive êxito ou fracasso? Na verdade, a questão mais legítima seria: quanto tempo estive ocupado em ensinar a alguém? Como o ensino é uma atividade e esta atividade envolve tentativa de realizar um certo tipo de aprendizado com certas restrições, é necessário que haja tempo para o seu desenvolvimento.

Além de tempo, a atividade exige a realização de alguns movimentos, pois são coisas que nós fazemos, "e o que é fazer, senão efetuar alguma modificação no meio ambiente por meio da realização de algum movimento?" (Scheffler, 1974, p. 79). Também requer pensamento e interpretação do contexto ao qual ela está sendo desenvolvida.

> Comparemos com o caso de um menino que se encontra, durante um período determinado, trabalhando sobre um problema de geometria. Ele deverá estar, é claro, fazendo algo razoável com o objetivo de solucionar o problema. Para que esteja trabalhando no problema, deve estar ao mesmo tempo tentando e fazendo. Para saber que o menino que temos diante de nós está deveras trabalhando num problema de geometria, e não simplesmente brincando com uma folha de papel, devemos decidir que ele está realmente pensando; além disso, porém, devemos julgar que aquilo que está fazendo, seja lá o que for, envolve a expectativa de solucionar um problema. Além dos movimentos corporais que ele realiza durante o presente período. Podemos saber, por exemplo, que está matriculado num curso de geometria na escola, que o problema lhe foi dado como dever de casa, que a solução deverá ser apresentada no dia seguinte, que, no passado, ele sempre entregou pontualmente os seus deveres de casa, e que frequentemente expressou o desejo de formar-se em matemática (Scheffler, 1974, pp. 80-81).

Podemos pensar também, que qualquer pessoa possa estar habilitada a desenvolver o ensino como argumenta Scheffler (1974):

> O professor pode falar ou permanecer em silêncio, pode escrever ou não, pode fazer perguntas ou não, pode ou não utilizar materiais ou equipamentos especiais. Qualquer uma dessas coisas, além do mais, pode ser realizada por pessoas que não estão ocupadas a ensinar. Se um homem está ensinando ou simplesmente criticando, meditando, argumentando, aborrecendo ou distraindo etc. — não constitui, portanto, algo que possa ser visto diretamente nos movimentos que o professor executa durante a lição. Além do problema de averiguar em que consiste o pensamento do professor, a interpretação daquilo que é feito durante a lição dependerá da intenção com a qual isso é feito, e a determinação de tal intenção varia de acordo com a informação que se tem a respeito do contexto da lição (p. 82).

O mesmo autor afirma que ensinar não pode ser concebido como alguma estrutura distinta de movimentos executados por professores (Scheffler, 1974). Lembremo-nos de Paulo Freire o qual afirma que "ensinar não é transferir conhecimentos, mas criar as possibilidades para a sua produção ou a sua construção" (Freire, 2019, p. 24).

Freire (2019) continua argumentando que

> ensinar não se esgota no tratamento do objeto ou do conteúdo, superficialmente feito, mas se alonga à produção das condições em que aprender criticamente é possível. E essas condições implicam ou exigem a presença de educadores e de educando criadores, instigadores, inquietos, rigorosamente curiosos, humildes e persistentes (p. 28).

Sem dedicação, preocupação com o próximo, sem amor num sentido amplo, ninguém poderá ser um bom professor, afirma D'Ambrosio (2008). Interpretamos que os movimentos executados pelo professor incluem o conhecimento do aluno, o conhecimento do conteúdo a ser ensinado, o papel social que ele exerce e as perspectivas que ele assume. Tudo isto influi na metodologia que o professor vai adotar para que sua atividade atinja a meta estabelecida. Assim, para entender o conceito de Metodologia, devemos compreender que tal conceito "como qualquer outro conhecimento, é fruto do contexto e do momento histórico em que é produzido" (Manfredi, 1993, p.1).

Talvez não exista somente um conceito geral ou ahistórico de metodologia, mas "sim vários, que têm por referência as diferentes concepções e práticas educativas que historicamente lhes deram suporte" (Manfredi, 1993, p. 1).

Nossa concepção e que faz parte dos movimentos que desenvolvemos na adoção e aplicação dos Experimentos Mentais, está sob a égide da concepção histórico-dialética da educação, com base na epistemologia.

> A epistemologia é a chave para o estudo do conhecimento, em especial do conhecimento matemático. Esta ciência tem o papel de escrever, em termos filosóficos, a relação entre o sujeito epistêmico, isto é, o sujeito social que compartilha e debate hipóteses e o objeto (Cruz, 2021a, p. 2).

Nesta concepção, "o próprio conceito de metodologia e/ou didática é histórico-social, portanto, tem tudo a ver com o momento e contextos históricos dos quais é produto, bem como dos projetos, concepções e ideologias que lhe deram origem" (Manfredi, 1993, p. 4).

A concepção histórico-dialética da educação tem suas bases fundadas no método materialista histórico-dialético, caracterizado "pelo movimento do pensamento através da materialidade histórica da vida dos homens em sociedade" (Pires, 1997, p. 87). Uma metodologia de ensino nesta concepção pode ser entendida como

> sendo um conjunto de princípios e/ou diretrizes sócio-políticos, epistemológicos e psicopedagógicos articulados a uma estratégia técnico-operacional capaz de reverter os princípios em passos e/ou procedimentos orgânicos e sequenciados, que sirvam para orientar o processo de ensino-aprendizagem em situações concretas (Manfredi, 1993, p. 5).

As reflexões que nos orientam na aplicação de tal perspectiva baseiam-se em Manfredi, a qual destaca que na dimensão epistemológica deve-se levar em consideração as diretrizes relativas

> a como se produz o conhecimento, numa perspectiva dialética; à lógica inerente a esse processo; a quem produz esse conhecimento; às diferenças entre o chamado saber popular e o saber sistematizado; ao tipo de relações existentes entre as diferentes formas de conhecimento; à importância e o sentido da teoria, numa perspectiva de uma educação crítica e consciente; ao que significa dizer que o processo de produção de conhecimento possui um aporte individual e sóciocultural; o que todas estas questões têm a ver com o problema da escolha e organização dos conteúdos a serem trabalhados durante o processo de ensino-aprendizagem (Manfredi, 1993, p. 5).

Os Experimentos Mentais como metodologia para o ensino de Matemática se constituem em seis características observáveis no desenvolvimento de uma dada atividade e/ou problema. Essas características são nomeadas por Cruz (2021a) como *Forma, Estrutura, Compreensão, Dependência, Revelação* e *Comparação*. Cada nome indicado anteriormente tem, no contexto desta metodologia, um significado semiótico talvez distinto de seu significado na prática de seu uso cotidiano.

Forma significa que os Experimentos Mentais se desenvolvem por meio de atividades supostas, isto é, parte-se de certas conjecturas e hipóteses que florescem em uma representação particular do objeto geral considerado.

> Forma, neste contexto, tem o significado de atividades supostas, isto é, os Experimentos Mentais são baseados em um sistema de atividades supostas. Isto significa que as atividades partem de certas conjecturas e hipóteses desenvolvidas em uma representação particular do objeto geral. Ademais, "todo acesso cognitivo à realidade é relativo e mediado por signos" (Otte, 2001, p.2), isto quer dizer que este acesso não é direto e absoluto (Cruz, 2021a, p. 15).

Cruz argumenta que "este sistema de atividades supostas nos permite considerar que o mundo, em especial o mundo matemático, consiste em dois tipos de entidades, a saber: signos e objetos. Os signos têm significado e os objetos têm existência real pura" (2021a, p. 15).

Estrutura é, em essência, a aplicação de uma síntese abdutiva, isto é, a introdução de uma ideia nova que não estava contida nos dados iniciais da proposição.

> Estrutura implica em dizer que os Experimentos Mentais não têm uma estrutura rígida. Muitas coisas são implicitamente assumidas. Há neste contexto a aplicação de uma síntese abdutiva. Síntese abdutiva é a introdução de uma ideia nova não contida nos dados do problema, da atividade ou da prova, permitindo dá as conexões que esses mesmos dados não teriam fornecido (Cruz, 2021a, p.16).

Esta síntese abdutiva enfatiza o interesse pela inteligibilidade, isto é, pelo interesse na explicação do fato.

Compreensão é o processo dedutivo combinando experiências e conhecimentos (*Dependência*). Dedução é um tipo de argumento cuja função é representar os fatos das premissas em um diagrama. "Se vamos representá-los num diagrama, somos compelidos a representar o fato declarado na conclusão" (Peirce, 2010a, p. 30).

> Compreensão dá ênfase de que nos Experimentos Mentais há uma combinação de experiências e conhecimentos que devem seguir uma lógica de considerações heurísticas com deduções lógicas e cálculos formais quando necessários. É o processo dedutivo no desenvolvimento da experimentação mental. (Cruz, 2021a, p. 16).

Dependência assegura que os Experimentos Mentais não são feitos de forma aleatória, pois dependem de conhecimentos e argumentos aceitos, isto é, são desenvolvidos por meio de uma teoria de base.

> Dependência indica que o processo de experimentação mental está dependendo de conhecimentos e argumentos aceitos pela comunidade, mesmo não sendo argumentos estritamente lógicos. Este processo nos possibilita compreender que "aprender novas coisas, sem novos dados, surge do fato de que o importante são as aplicações dos conceitos ou dos objetos e não apenas as relações dos conceitos entre si, ou seja, não é apenas a coerência da teoria" (Cruz, 2018, p.74).

Revelação mostra que nos Experimentos Mentais há a possibilidade de revelar contradições no sistema de nosso conhecimento. Ao mesmo tempo, abre possibilidade de novos conhecimentos.

> Os Experimentos Mentais têm a capacidade de revelar um desajuste no aparato conceitual tradicional, permitindo ao experimentador ou ao cientista utilizar seus conhecimentos da mesma forma que utilizava antes, por outro lado, esses experimentos mostram contradições e/ou confusões lógicas no desenvolvimento da dada atividade, provas e/ou problema apresentado. (Cruz, 2021a, pp. 17-18).

Comparação traz outras possibilidades de solução para uma dada atividade e/ou problema, significando uma ampliação do processo ou generalização.

> Comparação neste processo é para afirmar que é possível comparar o conhecimento com outras possibilidades de solução em uma dada atividade, prova e/ou problema. Nós muitas vezes ganhamos novos conhecimentos quando algo que já foi dito uma vez é dito mais de uma vez de um modo novo (Cruz, 2021a, p. 18).

Essas características organizam o processo de ensino de um determinado conceito, atividade e/ou problema em Matemática, não excluindo o pensar, a interpretação, o tentar, a criticidade, o fazer, enfim os movimentos inerentes à prática de ensinar. Não separa a função do conhecimento do seu desenvolvimento, mostrando que no desenvolvimento do raciocínio diagramático, em cada ponto de uma figura encontra-se uma nova ideia, um novo teorema, um novo problema etc., como podemos verificar no Quadrilátero de Saccheri.

4 Aplicando os Experimentos Mentais em alguns problemas relacionados ao Quadrilátero de Saccheri

O Jesuíta Giovanni Girolamo de Saccheri (1667-1773) foi o primeiro matemático, em 1773, a apresentar um estudo científico sobre o postulado das paralelas. Nesse estudo, Saccheri aceita as 26 proposições iniciais do livro I dos Elementos de Euclides, pois observara que essas proposições não necessitavam do postulado das paralelas nas suas demonstrações.

Essas 26 proposições foram fundamentais para o trabalho de Saccheri, pois "com a ajuda desses teoremas, ele empreendeu o estudo do quadrilátero ABCD no qual os ângulos A e B são retos e os lados AD e BC são iguais" (Eves, 2011, p. 540), como pode ser constatado na Figura 3.

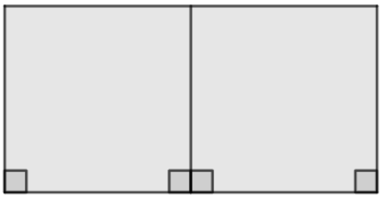
Figura 3: Quadrilátero de Saccheri

Fonte: Autoria Própria (2021)

Saccheri mostrou que se traçarmos as diagonais AC e BD, usando teoremas de congruência, mostraríamos que os ângulos D e C são iguais. Para esses ângulos, existem três possibilidades, a saber: os ângulos D e C são retos, agudos ou obtusos. A hipótese de Saccheri era a de mostrar que a consideração dos ângulos serem agudos ou obtusos, levaria a uma contradição. Portanto, por redução ao absurdo, Saccheri mostrou que deveria valer a hipótese do ângulo reto, implicando assim o postulado das paralelas. Consideremos dois problemas com base no Quadrilátero de Saccheri. A proposta é mostrar alguns resultados, quando aplicamos os Experimentos Mentais no desenvolvimento desses problemas.

Problema 1 — Considere dois Quadriláteros de Saccheri justapostos como na Figura 4. Os lados opostos aos lados que contém os ângulos retos dos quadriláteros são congruentes entre si.

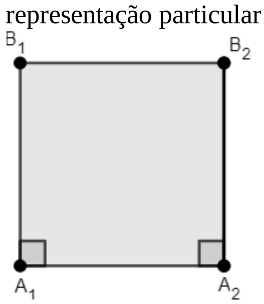
Figura 4: Dois quadriláteros de Saccheri



Fonte: Autoria Própria (2021)

Problema 2 — Mostrar que no Quadrilátero de Saccheri, representado pela Figura 5, pode ser possível a relação $B_1B_2 \geq A_1A_2$.

Figura 5: Uma representação particular do objeto geral

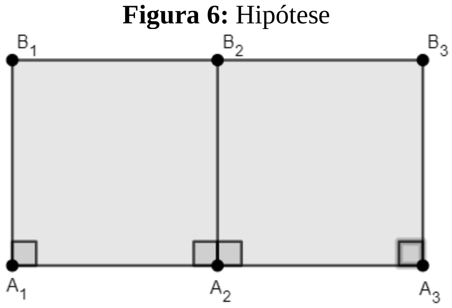


Fonte: Autoria Própria (2021).

4.1 Aplicando o Experimento Mental no Problema 1

Forma: Como é um sistema de atividades supostas, vamos supor dois quadriláteros de Saccheri, apresentados na Figura 6, tais que $A_1A_2 \equiv A_2A_3$, $A_1B_1 \equiv A_2B_2 \equiv A_3B_3$. O símbolo $\equiv$ representa congruência entre as medidas das figuras. Nossa intenção é mostrar que $B_1B_2 \equiv B_2B_3$.

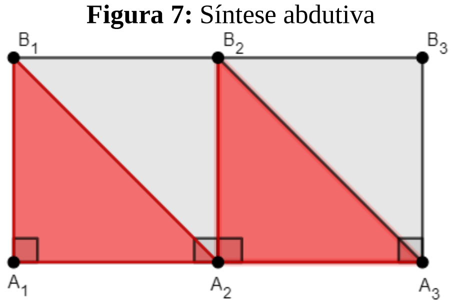
Figura 6: Hipótese



Fonte: Autoria Própria (2021)

Estrutura: Nossa síntese abdutiva vai considerar os triângulos $A_1A_2B_1$ *e* $A_2A_3B_2$, como na Figura 7. Note que esta é uma ideia nova que não estava contida nos dados iniciais do problema.

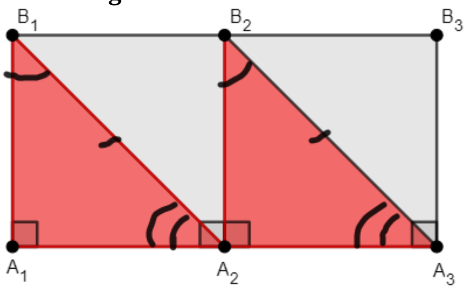
Figura 7: Síntese abdutiva



Fonte: Autoria Própria (2021)

Compreensão e Dependência: Experimentando nesses triângulos, percebemos que eles possuem dois lados correspondentes congruentes e um ângulo entre esses lados também congruente. Revisitando os conceitos da geometria plana, se dois triângulos possuem dois lados correspondentes congruentes e os ângulos entre esses lados também congruentes, os triângulos serão congruentes entre si, como pode ser constatado na Figura 8. Ou seja, $\Delta A_1A_2B_1 \equiv \Delta A_2A_3B_2$. Logo, $A_2B_1 \equiv A_3B_2$ e $B_1\widehat{A_2}B_2 \equiv B_2\widehat{A_3}B_3$ (ângulos). O signo $\Delta A_1A_2B_1$, por exemplo, representa triângulo de vértices A_1, A_2 e B_1.

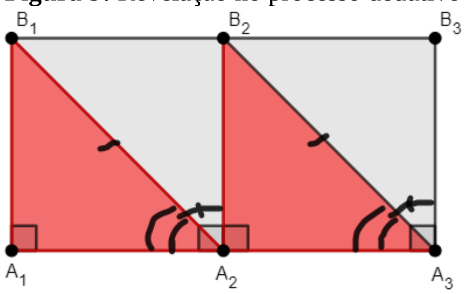
Figura 8: Método dedutivo



Fonte: Autoria Própria (2021)

Revelação: Na Figura 9, descobrimos também uma relação de congruência entre $\Delta B_1A_2B_2$ e $\Delta B_2A_3B_3$.

Figura 9: Revelação no processo dedutivo

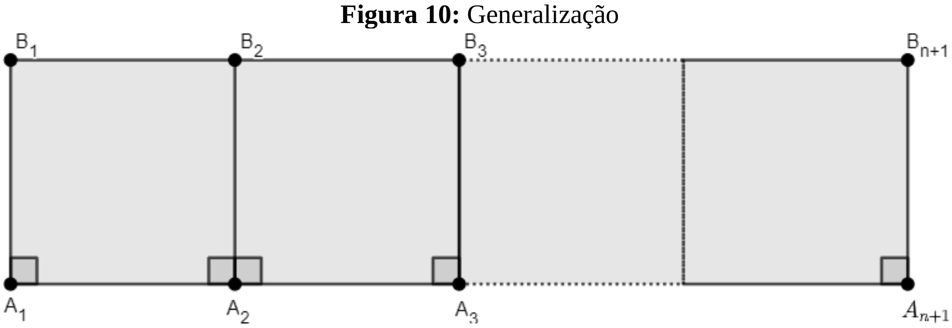


Fonte: Autoria Própria (2021)

A ideia é que se perceba no diagrama que $A_2B_1 \equiv A_3B_2, B_1\widehat{A_2}B_2 \equiv B_2\widehat{A_3}B_3$ e $A_2B_2 \equiv A_3B_3$. Portanto, se $\Delta B_1A_2B_2 \equiv \Delta B_2A_3B_3$, então, $B_1B_2 \equiv B_2B_3$.

Comparação: Esta conclusão pode ser estendida para mais quadriláteros de Saccheri nas condições dadas, como pode ser observado na figura 10. Podemos escrever de forma geral que $B_1B_2 \equiv B_2B_3 \equiv \cdots \equiv B_nB_{n+1}$.

Figura 10: Generalização

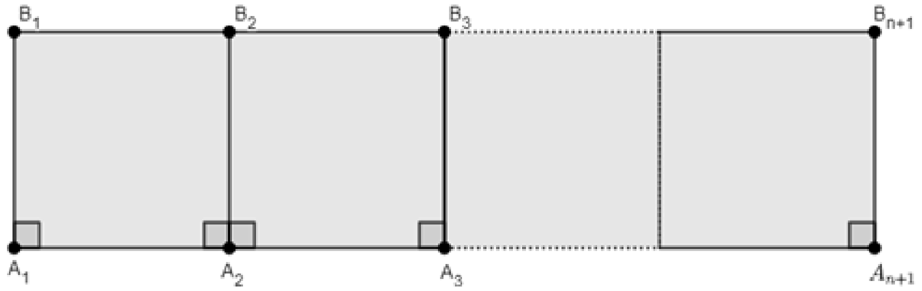


Fonte: Autoria Própria (2021)

4.2 Aplicando um experimento Mental no Problema 2

Forma: Considere por hipótese n quadriláteros de Saccheri de mesma base, justapostos como na Figura 11. Nossa intenção é mostrar que é possível $B_1B_2 \geq A_1A_2$. Para este empreendimento, vamos supor que $A_1A_2 > B_1B_2$, isto é, $A_1A_2 - B_1B_2 > 0$.

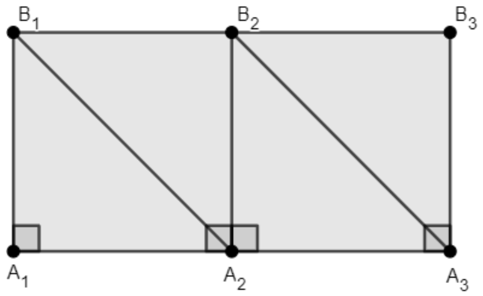
Figura 11: Hipótese



Fonte: Autoria Própria (2021)

Estrutura: Vamos lançar uma ideia nova ao problema, utilizando a desigualdade triangular. Pela desigualdade triangular, a medida de um determinado lado de um triângulo é menor que a soma das outras duas medidas. Faremos este experimento inicial, na Figura 12.

Figura 12: A desigualdade triangular



Fonte: Autoria Própria (2021)

Pela desigualdade triangular, $A_1A_2 < A_1B_1 + A_2B_1$ e $A_2B_1 < B_1B_2 + A_2B_2$. Da primeira desigualdade podemos escrever que $A_1A_2 - A_1B_1 < A_2B_1$. Comparando com a segunda desigualdade, chegamos à relação $A_1A_2 - A_1B_1 < A_2B_1 < B_1B_2 + A_2B_2 \Rightarrow A_1A_2 - A_1B_1 < B_1B_2 + A_2B_2$. Ou mais especificamente:

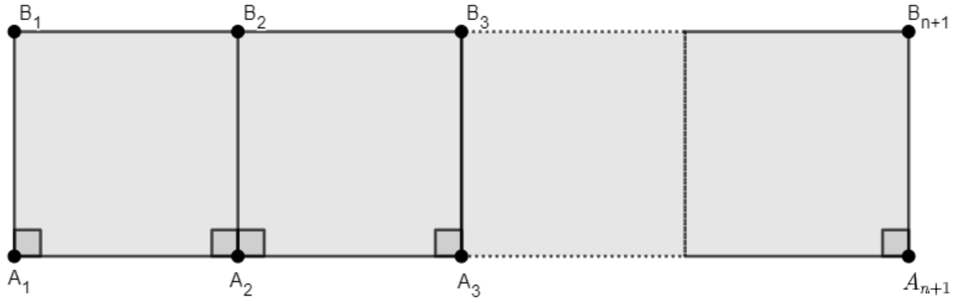
$$A_1A_2 < A_1B_1 + B_1B_2 + A_2B_2.$$

O mesmo pode ser feito no segundo quadrilátero para chegar à relação:

$$A_2A_3 < A_2B_2 + B_2B_3 + A_3B_3.$$

Compreensão e Dependência: Se adotarmos esta desigualdade a cada quadrilátero em um conjunto de n quadriláteros justapostos, deduziremos que:

Figura 13: O processo dedutivo



Fonte: Autoria Própria (2021)

$$A_1A_{n+1} < A_1B_1 + B_1B_2 + \cdots + B_nB_{n+1} + B_{n+1}A_{n+1}.$$

$$nA_1A_2 < (A_1B_1 + B_{n+1}A_{n+1}) + (B_1B_2 + \cdots + B_nB_{n+1})$$
$$nA_1A_2 < 2A_1B_1 + nB_1B_2$$
$$nA_1A_2 - nB_1B_2 < 2A_1B_1, \forall n$$
$$n(A_1A_2 - B_1B_2) < 2A_1B_1.$$

Revelação: Este último resultado vai em desencontro com um princípio matemático chamado Arquimediano. Este princípio afirma que se há dois números reais quaisquer x e y, sendo $x > 0$, então existe um número natural n tal que $n \cdot x > y$.

Portanto, nossa hipótese não se sustenta. Como nossa hipótese nos leva a uma contradição, então uma consideração plausível para o problema é assumir que a relação $A_1A_2 \leq B_1B_2$ é verdadeira, ou de outra forma, que $B_1B_2 \geq A_1A_2$.

Comparação: Um fato muito interessante e que remonta o debate sobre o postulado das paralelas é que nesta consideração, a relação $A_1A_2 = B_1B_2$ é possível. Portanto, o retângulo passa a ser um Quadrilátero de Saccheri validado, desta forma, pelo quinto postulado de Euclides. Ou seja, o retângulo é um Quadrilátero de Saccheri considerando válido o postulado das paralelas.

5 Conclusão

Os Fundamentos da Matemática se desenvolveram por meio de demonstrações cada vez mais sistemáticas, induzindo à afirmação de que a Matemática seria mera tautologia. Esta consideração não esclarece nada sobre os objetos da Matemática, mas tratam somente da maneira de como falamos desses objetos, transformando a Matemática em um tipo de lógica formalizada.

Talvez este seja o problema do ensino da Matemática que falam de coisas, definições, fórmulas etc., mas não implicam absolutamente nada sobre a existência e a essência ou realidade dessas coisas. Não despertam a curiosidade e nem a criticidade sobre essas coisas.

É na autenticidade da prática de ensinar e de aprender que desenvolve a possibilidade de uma experiência em que o ensino desperta uma curiosidade crescente no aprendiz. A capacidade de aprender criticamente desperta a chamada curiosidade epistemológica, “sem a qual não alcançamos o conhecimento cabal do objeto” (Freire, 2019, p. 27). Nossa tentativa em trabalhar com o Quadrilátero de Saccheri foi na direção de abrolhar essa curiosidade.

Matemática para nós é uma atividade semiótica. Ela age no mundo como atividade e não como ditadora; neste sentido, os Experimentos Mentais são fundamentais como espaços de meras possibilidades.

Otte (1993) argumenta que a “Matemática assenta, como quase toda ciência, na visão e nas metáforas visuais e geométricas” (p. 40). Esse mesmo autor afirma que “a geometrização é a ideia fundamental da Matemática e ela faz com que as mais variadas coisas sejam imaginadas pelos matemáticos como pontos ou sistemas de pontos em algum espaço ideal” (p. 40).

Utilizamos metáforas para pensar em um quadrilátero com dois ângulos retos e dois lados opostos congruentes, imaginando um mundo de objetos dos quais nós não pertencemos. Neste processo, se manifestou a experiência de um saber que nos permitiu desenvolver conceitos e chegar a certas conclusões, caracterizando desta forma generalizações.

A multiplicidade de intepretações e aplicações na Matemática se dá pelo fato de que ela é “um procedimento que começa com uma metáfora gráfica ou na forma de um experimento mental e não como uma indicação positiva com base em fatos objetivos" (Otte, 1993, p. 42, 43).

O ponto mais importante de todo esse processo é que o conhecimento dialético e reflexivo nos leva a pensar nas relações constituídas no Quadrilátero de Saccheri e nas possíveis interpretações que ainda podem ser desenvolvidas, mostrando que os Experimentos Mentais são um campo importante para o ensino da Matemática.

Referências

Abbagnano, N. (2007). *Dicionário de Filosofia*. 5. ed. São Paulo, SP: Martins Fontes.

Cruz, W. J. (2018). *Experimentos Mentais na Educação Matemática: uma analogia com provas matemática formais.* Curitiba, PR: Aprris.

Cruz, W. J. (2021a). O uso dos experimentos mentais como possível metodologia de ensino da matemática: um olhar epistemológico. *Revista Eletrônica de Educação Matemática,* Florianópolis, 16, 1-26.

Cruz, W. J. (2021b). ¿Qué es √ (-1)? Una perspectiva semiótica que utiliza experimentos mentales en el estudio de números complejos. *Union*, *17*(62), 1-18.

Cruz, W. J. da. (2020). Matemática é criação ou descoberta? A importância dos Experimentos Mentais. *Unión*, *15*(57), 121-137.

D'Ambrosio, U. (2008*). Educação Matemática: da teoria à prática*. 16. ed. Campinas, SP: Papirus.

Euclides. (2009). *Os Elementos*. Tradução de I. Bicudo. Rio Claro, SP: EdUnesp.

Eves, H. (2011). *Introdução à história da Matemática*. Tradução de H. H. Domingues. 5. ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp.

Freire, P. (2019). *Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa*. 59. ed. Rio de Janeiro, RJ: Paz e Terra.

Manfredi, S. M. (1993). *Metodologia de Ensino-diferentes concepções* (versão preliminar). Campinas, SP: FE/UNICAMP.

Otte, M. F. (2001). Mathematical Epistemology from a Peircean Semiotic Point of View. Utrecht-Holanda: In: *Paper Presented at PME.*

Otte, M. F. (2012). *A realidade das Ideias: uma perspectiva epistemológica para a Educação Matemática.* Cuiabá, MT: EdUFMT.

Otte, M. F. (1993). *O formal, o social e o subjetivo: uma introdução à filosofia e à didática da Matemática*. São Paulo, SP: EdUNESP.

Peirce, C. S. (CP). (2010b). *Philosophy of Mathematics***.** Bloomington, IN: Edited by Matthew E. Moore INDIANA UNIVERSITY PRESS.

Peirce, C. S. (CP). (2010a). *Semiótica.* Tradução de J. T. Coelho Neto. 4. ed. São Paulo, SP: Perspectiva.

Pires, M. F. C. (1997). O materialismo histórico-dialético e a Educação. *Interface,* Botucatu, SP, *1*(1), 83-94.

Scheffler, I. (1974). *A linguagem da educação*. Tradução de B. Barbosa Filho. São Paulo, SP: Saraiva; EdUSP.

Sérates, J. (1998). *Raciocínio Lógico: lógico matemático, lógico quantitativo, lógico numérico, lógico analítico, lógico crítico.* 7. ed. Brasília, DF: Jonofon.

Silva, J. J. (2007). *Filosofias da Matemática*. São Paulo, SP: EdUNESP.