Sociedade Brasileira de Educação Matemática

RIPEM

Uma sequência de triângulos padronizados: Geometria Fractal na formação de professores dos Anos Iniciais

José Carlos Pinto Leivas
Universidade Franciscana
Canoas — RS, Brasil
leivasjc@gmail.com
0000-0001-6876-1461

Gabriel de Oliveira Soares
Secretaria Municipal de Educação de Santa Maria
Santa Maria — RS, Brasil
gsoares8@outlook.com
0000-0001-8734-6415

2238-0345

10.37001/ripem.v13i1.3051

Recebido • 13/05/2022
Aprovado • 08/09/2022
Publicado • 19/01/2023

Editor • Gilberto Januario

Resumo: Neste artigo, apresenta-se uma pesquisa qualitativa que foi aplicada com seis estudantes de um curso de formação continuada, em um mestrado profissionalizante em ensino de Ciências e Matemática voltado a pedagogos, em uma aula realizada de modo remoto. O estudo teve por objetivo evidenciar como explorar recursos materiais existentes no ambiente domiciliar para construir o Triângulo de Sierpinski, a fim de obter sequências e padrões a partir de elementos do referido ente geométrico. Em função dos participantes atuarem nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, precisavam analisar objetivos e habilidades constantes da Base Nacional Curricular Comum, bem como indicar possibilidades de a atividade proposta em aula ser replicada com seus alunos. Os resultados mostraram que os indivíduos realizaram as construções e reconheceram elementos dos triângulos, além de realizar cálculos de perímetros e áreas e reconhecer padrões nas sequências obtidas.

Palavras-chave: Triângulo de Sierpinski. Anos Iniciais. Ensino Remoto. Geometria Fractal. Resolução de Problemas.

A sequence of standardized triangles: Fractal Geometry in the education of Early Years teachers

Abstract: This article presents a qualitative research that was applied to six students from a continuing education course in a professional master's degree in Science and Mathematics Teaching aimed at pedagogues, in a class held remotely. The study aimed to investigate how to explore with existing material resources in the home environment to build the Sierpinski Triangle, in order to obtain sequences and patterns from elements of that geometric figure. Due to the participants working in the Early Years of Elementary School, they needed to analyze objectives and skills contained in the Base Nacional Comum Curricular, as well as indicate possibilities of the proposed activity in class to be replicated with their students. The results showed that the individuals performed the constructions and recognized elements of the triangles, in addition to performing calculations of perimeters and areas and recognizing patterns in the obtained sequences.

Keywords: Sierpinski Triangle. Early Years. Remote Teaching. Fractal Geometry. Solving Problems.

Una secuencia de triángulos estandarizados: Geometría Fractal en la formación de docentes de los Primeros Años

Resumen: Este artículo presenta una investigación cualitativa que se aplicó con seis estudiantes de un curso de educación continua, en una maestría profesional en Enseñanza de Ciencias y Matemáticas dirigida a pedagogos, en una clase a distancia. El estudio tuvo como objetivo demostrar cómo aprovechar los recursos materiales existentes en el entorno doméstico para construir el Triángulo de Sierpinski, con el fin de obtener secuencias y patrones a partir de elementos de la mencionada entidad geométrica. Debido a que los participantes trabajan en los Primeros Años de la Enseñanza Básica, necesitaban analizar objetivos y competencias contenidas en la Base Curricular Común Nacional, así como indicar posibilidades para que la actividad propuesta en clase sea replicada con sus alumnos. Los resultados mostraron que los individuos realizaron las construcciones y reconocieron elementos de los triángulos, además de realizar cálculos de perímetro y área y reconocer patrones en las secuencias obtenidas.

Palabras clave: Triángulo de Sierpinski. Primeros Años. Aprendizaje Remoto. Geometría Fractal. Solución de Problemas.

1 Introdução

Na formação inicial e na formação continuada de professores que atuam na Educação Infantil e nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, em geral, a Matemática por si só apresenta certa rejeição por parte dos professores que atuam nestes dois segmentos da escola básica. Dessa forma, esperar que esses profissionais despertem o interesse de alunos da Educação Básica para a aprendizagem Matemática é um desafio a ser superado em um curso profissionalizante em ensino de Ciências e Matemática. Mais especificamente, tal rejeição recai sobre a área da Geometria, tida por muitos como a que exige decorar fórmulas para aplicar na resolução de exercícios, muitas vezes rotineiros e repetitivos. Em contrapartida, é preciso considerar que o ensino da Geometria, e de outros conceitos, pode oferecer um elemento facilitador que é o uso de recursos materiais concretos, os quais permitem o manuseio e a visualização in loco.

No entender dos autores deste artigo, são necessárias mudanças para melhorar a performance nessa área e, para tal, o primeiro autor passou a dedicar-se, também, a disciplinas de um mestrado profissional voltado a essa clientela, além de sua atuação na área de Geometria, de um modo geral, por aproximadamente cinquenta anos de carreira.

Recentemente, com o isolamento social e as aulas realizando-se de forma remota, foi delineada uma prática em busca da compreensão de sequências, padrões e novas formas de ensino, por meio de uma atividade envolvendo Geometria Fractal.

A respeito dessa Geometria, ainda ausente em currículos escolares e, até mesmo, na Licenciatura em Matemática, não há muitas publicações. Leivas (2009) identificou a falta de geometrias não euclidianas em sua pesquisa realizada nos currículos de instituições no Rio Grande do Sul. Em uma busca em Anais da XV Conferencia Interamericana de Educación Matemática (CIAEM), realizada em 2019, não se localizou nenhum título envolvendo a temática no eixo 6 — Geometria. Na busca geral pelo título “Geometría Fractal” (em espanhol), também não houve ocorrências na referida conferência.

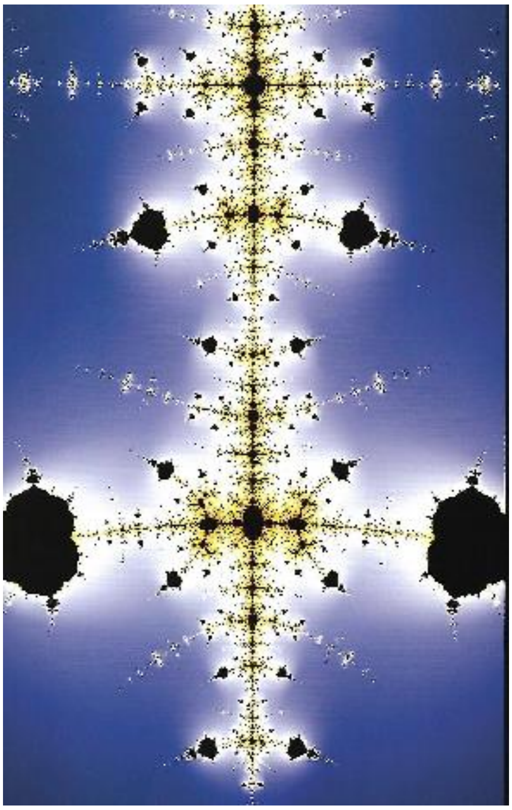
A partir dessa busca inicial, justifica-se o presente artigo, que abordará uma pesquisa com sujeitos de uma disciplina dirigida a profissionais com formação inicial em Pedagogia de um Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática, na qual buscou-se evidenciar como esses professores exploraram recursos materiais existentes no ambiente domiciliar para construir o Triângulo de Sierpinski, a fim de obter sequências e padrões a partir de elementos do referido ente geométrico.

2 Geometria Fractal

A Geometria Fractal pode ser considerada como uma das geometrias não euclidianas, a exemplo da Elíptica, da Hiperbólica e da Topológica. Segundo Rafael Bombelli (1526-1572), "um número imaginário é aquele cujo quadrado é um valor negativo" (Pickover, 2009, p. 124). Para o autor, esses números desempenham um papel na produção de lindas obras de arte fractais, as quais mostram riqueza de detalhes com ampliações crescentes. Tais ilustrações podem vir a estimular estudantes e professores para tal tema.

Lothar Collatz (1910-1990), conforme indicado por Pickover (2009), sugere que se imagine andando por uma tempestade de granizo ofuscante, na qual a chuva sobe e desce aos tufos e redemoinhos. A partir dessa imaginação, surgem sequências estudadas pelos matemáticos e os números de Hailstone proporcionam problemas desafiadores para eles. Para o autor, "padrão fractal de Collatz. Embora o comportamento dos números 3n + 1 seja geralmente estudado para números inteiros, é possível estender os mapeamentos matemáticos para números complexos e representar o intrincado comportamento fractal através da coloração no plano complexo" (p. 374). Na Figura 1, vislumbra-se esse fractal.

Figura 1: Sobre a Conjectura de Collatz.



Fonte: Pickover (2009, p. 375).

Estudar padrões é algo que faz parte da própria história das descobertas matemáticas. Por exemplo, as espirais podem ser encontradas na natureza, como nas asas de borboletas ou nos caracóis. O homem passou a explorar tais padrões no quesito matemático, ou seja, nas relações numéricas envolvidas em objetos e seres vivos, como na Sequência de Fibonacci, encontrada nas plantas. A partir disso, foi um passo para obtenção das sequências numéricas como na espiral logarítmica1.

[1] Segundo Janos (2009, p. 279), um tratado sobre a espiral logarítmica foi publicado por volta de 1700, por Jacob Bernoulli.

Na observação das colmeias, a elaboração dos favos segue uma estrutura sequencial em forma de prismas hexagonais, ao que Janos (2009, p. 285) indaga sobre o porquê dessa forma. O autor responde que "Darwin sugeriu que as abelhas, primeiro constroem as colmeias em forma cilíndrica, até que o cilindro atinja o cilindro vizinho, e aí elas empurrariam as paredes preenchendo os espaços vazios, formando hexágonos". O autor afirma que as abelhas, na realidade, constroem tais espaços um a um, já na forma hexagonal, e não como o sugerido por Darwin.

Outros exemplos também servem para motivar o estudo de sequências e padrões numéricos envolvidos na construção matemática e, em especial, no estudo de fractais. Foi somente a partir do século XX que a nova geometria tomou forma, com a criação da Geometria Fractal intimamente ligada à geometria do "caos", pois a primeira pode fornecer as aproximações matemáticas correspondentes a formas encontradas na natureza, relacionadas à segunda.

De acordo com Janos (2009, p. 285), "a Geometria Fractal é uma linguagem matemática que descreve, analisa e modela formas encontradas na natureza". Para Jiang e Ma (2018, p. 2, tradução livre)[2], "um conjunto ou padrão é fractal se houver uma relação de lei de poder entre detalhes no fractal (y) e a escala (x) em que é medida, ou seja, y = xα, onde α é o expoente da lei da potência ou a dimensão fractal".

Benoit Mandelbrot pode ser considerado o pai da Geometria Fractal, a partir de seu trabalho exploratório com o uso de computadores. Com base em seus estudos, pode-se considerar um fractal como uma forma geométrica que não é regular, isto é, com grau de não regularidade em todos os níveis, os quais podem ser pensados como padrões que se estendem indefinidamente. Para Mandelbrot, o termo pode significar uma superfície irregular como a tempestade de granizos de Collatz (1910-1990).

No que diz respeito a padrões matemáticos, o autor analisa a ocorrência destes em provas da Olimpíada Brasileira de Matemática em Escolas Públicas (OBMEP), identificando questões recorrentes em provas realizadas no período 2005-2018. A partir de uma análise feita por meio de categorias envolvendo estratégias para resoluções dessas questões, concluí que elas remetem a padrões e podem ser estimuladoras para o ensino e a aprendizagem de Geometria desde os primeiros anos escolares.

Nessa direção, entende-se que realizar uma pesquisa envolvendo uma construção fractal com professores pedagogos em uma ação continuada pode contribuir para o desenvolvimento matemático desses profissionais. Não é objetivo deste artigo fazer uma exposição dos principais fractais que constam na literatura a esse respeito, mas evidenciar como esses professores exploraram recursos materiais existentes no ambiente domiciliar para construir o Triângulo de Sierpinski, a fim de obter sequências e padrões a partir de elementos do referido ente geométrico e que possam ser úteis para a formação matemática inicial de estudantes.

3 Procedimentos metodológicos

A partir dos pressupostos apresentados, em período de isolamento social, no qual as aulas necessitam ser desenvolvidas de modo remoto, foi delineada, no primeiro semestre letivo de 2020, em três períodos de 50 minutos cada, a pesquisa aqui relatada. Esta teve por objetivo evidenciar como explorar recursos materiais existentes no ambiente domiciliar para construir o

[2] A Smooth Curve as a Fractal Under the Third Definition Faculty of Engineering and Sustainable Development, Division of GIScience University of Gävle, SE-801 76 Gävle, Sweden. Disponível em: https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1802/1802.03698.pdf.

Triângulo de Sierpinski, a fim de obter sequências e padrões a partir de elementos do referido ente geométrico. Além disso, os participantes, todos em exercício profissional na Educação Infantil e nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, tiveram de analisar objetivos e habilidades constantes da Base Nacional Curricular Comum — BNCC, bem como indicar possibilidades da atividade proposta ser replicada com seus alunos.

Trata-se de uma pesquisa qualitativa participante, no sentido apontado por Severino (2016, p. 126), para quem esse tipo de investigação é aquele em que "o pesquisador, para realizar a observação dos fenômenos, compartilha a vivência dos sujeitos pesquisados, participando de forma sistemática e permanente, ao longo do tempo da pesquisa, das atividades". A atividade a ser analisada foi orientada e acompanhada pelo professor-pesquisador, via a plataforma Google Meet, de modo permanente, durante os três períodos. Conforme indica a pesquisa qualitativa, o docente interagiu constantemente com os participantes "em todas as situações, acompanhando todas as ações praticadas pelos sujeitos" (Severino, 2016, pp. 126-127).

No que diz respeito à abordagem qualitativa, Moreira (2011, p. 49) argumenta que "os fenômenos de interesse da pesquisa qualitativa em ensino têm também a ver com ensino propriamente dito, aprendizagem, currículo, avaliação e contexto, mas são analisados sob outros pontos de vista". A presente pesquisa encontrou-se ancorada na aprendizagem dos sujeitos e, especialmente, na questão do currículo para sua formação.

Com relação ao currículo, a BNCC (Brasil, 2017), dentre outros objetivos e habilidades para a unidade temática Geometria, nos quatro primeiros anos do Ensino Fundamental, sugere:

> (EF02MA15) — Reconhecer, comparar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo), por meio de características comuns, em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em sólidos geométricos (p. 283).
>
> (EF03MA15) — Classificar e comparar figuras planas (triângulo, quadrado, retângulo, trapézio e paralelogramo) em relação a seus lados (quantidade, posições relativas e comprimento) e vértices (p. 289).
>
> (EF04MA18) — Reconhecer ângulos retos e não retos em figuras poligonais com o uso de dobraduras, esquadros ou softwares de geometria (p. 293).
>
> (EF04MA19) — Reconhecer simetria de reflexão em figuras e em pares de figuras geométricas planas e utilizá-la na construção de figuras congruentes, com o uso de malhas quadriculadas e de softwares de geometria (p. 293).

Assim, com a devida adequação para a figura geométrica triângulo, as atividades propostas nesta pesquisa buscaram a obtenção de padrões e regularidades na construção do Triângulo de Sierpinski, a partir de objetos que substituiriam os convencionais como esquadro ou compasso, uma vez que nem todos os estudantes participantes dispunham de tais materiais em suas residências. Além disso, buscou-se, também, o reconhecimento dos padrões envolvidos na grandeza medida, considerando lados, pontos médios, perímetros e áreas, conceitos que podem vir a ser estudados nas etapas de ensino em que os participantes atuam.

Para a análise de dados, a coleta foi feita mediante registros que os participantes encaminharam ao e-mail do professor, pois a atividade, conforme explicitado anteriormente, foi desenvolvida de modo remoto. Também, foi utilizado o WhatsApp para o encaminhamento de vídeos, fotos e/ou questionamentos, bem como das observações do professor-pesquisador durante o desenvolvimento. Análises e sugestões poderiam ser enviadas até a aula subsequente.

A respeito de vídeos e fotografias como documentos de pesquisa, Loizos (2015) salienta a importância dessas materialidades, conforme vemos a seguir: "é que a imagem, com ou sem acompanhamento de som, oferece um registro restrito, mas poderoso das ações temporais e dos acontecimentos reais — concretos, materiais" (p. 137). O autor argumenta, ainda, que a fotografia pode ser produzida, quer de forma eletrônica, quer quimicamente, com ou sem imagens em movimento, constituindo um recurso central para a análise do pesquisador. Uma segunda razão apontada consiste em empregá-la não somente em questões complexas, teóricas e abstratas, visto que "ela pode empregar, como dados primários, informação visual que não necessita ser nem em forma de palavras escritas, nem em forma de números [...]" (Loizos, 2015, p. 137).

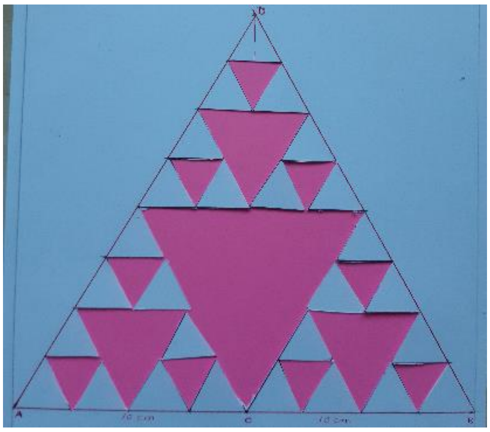
A respeito de informações visuais, Leivas (2009, p. 111) considera "visualização como um processo de formar imagens mentais, com a finalidade de construir e comunicar determinado conceito matemático, com vistas a auxiliar na resolução de problemas analíticos ou geométricos". Tal habilidade é abordada na Educação Matemática por Zimmermann e Cunningham (1991), dentre outros. Giaquinto (2007), no que diz respeito à visualização, assim se manifesta:

> Finalmente, as imagens podem ser muito fracas e inconstantes para produzir a suficiente confiança para uma crença em oposição a uma mera inclinação a acreditar. O visualizar aqui tem suficientemente poucos estágios e as imagens são muito simples para que esses problemas não precisem surgir. É fácil ensaiar a tarefa de visualização e, assim, obter o apoio da memória na produção de imagens mais fortes. Então, podemos simplesmente restringir nossa atenção a casos em que as imagens são claras e estáveis (p. 77, tradução livre).

A investigação contou com seis participantes, todos atuantes na Educação Infantil e/ou nos Anos Iniciais, os quais serão indicados por letras em itálico, a fim de preservar suas identidades, a saber: *An, Cr, Ka, Na, Su, Ve*. Em uma aula no formato de ensino remoto, envolvendo professores com formação inicial em Pedagogia em um Mestrado Profissional, a pesquisa teve o objetivo supracitado.

Esperava-se que, ao final da realização da atividade proposta, fosse apresentada uma construção similar à constante da Figura 2.

Figura 2: Uma construção do Triângulo de Sierpinski.



Fonte: Autoria Própria

A Figura 2 foi desenvolvida pelo primeiro autor do trabalho como um protótipo do que seria esperado a partir da realização da atividade. A seguir, faz-se a análise e a discussão da produção dos participantes.

4 Resultados e discussões

Nas primeiras aulas do semestre, os estudantes haviam visto, junto ao professor-pesquisador, conceitos relacionados a sequências e padrões. Na aula que antecedeu a realização da atividade, ele solicitou que esses mesmos alunos fizessem uma leitura da BNCC e buscassem, no conteúdo Geometria, habilidades envolvendo o tópico em questão, vindo ao encontro do planejamento inicial da disciplina. Na mesma ocasião, pediu-se que providenciassem, dentro do possível, os seguintes materiais: folhas brancas e coloridas; tesoura ou estilete; régua ou fita métrica; cordão; dois ou três livros de capa dura. Cumpre destacar que as folhas poderiam ter dimensões diferenciadas, porém, preferencialmente, dentro das medidas sugeridas pelo professor-pesquisador (primeiro autor), as quais, por serem números pares (36, 32, 28, 24 e 20 cm), facilitariam as divisões no início das construções.

Além dessas solicitações, encaminhou-se, aos participantes, o Quadro 1, que seria preenchido durante a realização da atividade, na aula seguinte. Essas solicitações prévias prenderam-se ao fato de que tais indivíduos, em geral, não dispõem em casa de alguns recursos utilizados para estudar Geometria (esquadro, compasso, transferidor etc.), o que levaria a certa improvisação.

Deve-se registrar que, nas primeiras aulas da disciplina, os estudantes fizeram uma pesquisa sobre Sequências de Fibonacci, para a determinação de padrões que encontravam em plantas, uma vez que, paralelamente, também estudavam Ciências Naturais, com ênfase em Botânica. Assim, já tinham um certo conhecimento prévio sobre padrões.

Quadro 1: registros de medidas obtidas na construção

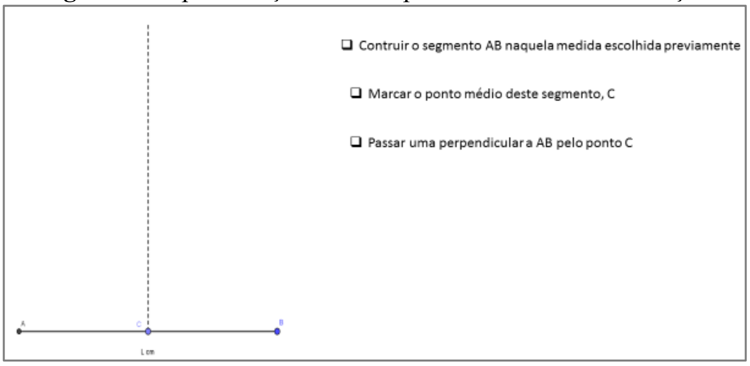
Iteração	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0 — (ΔABC)									
1 — (ΔCEF)									
2 — (Δ.......)									
3 — (Δ.......)									
4 — (Δ.......)									
5 — (Δ.......)									
.....									
Padrões percebidos									

1 — Medida do lado do triângulo; 2 — Metade da medida do lado do triângulo; 3 — Medida da altura de cada triângulo; 4 — Perímetro de cada triângulo novo; 5 — Perímetro total; 6 — Área de cada triângulo retirado; 7 — Área que fica; 8 — Quantia de triângulos que ficam; 9 — Quantia de triângulos retirados.

Fonte: Autoria Própria

Durante a construção, o professor-pesquisador foi orientando os passos a serem seguidos, bem como observando e analisando os registros que estavam sendo feitos. Assim, inicialmente, indicou: (1) Colocar a folha com a medida escolhida de frente para você e deixar um cm ao menos da borda lateral e da inferior. Traçar um segmento de reta (linha AB), na horizontal, na parte inferior da folha e paralelo à borda inferior da mesma, sendo que A e B não devem estar na fronteira ou limite; (2) Marcar o ponto médio C desse segmento (aquele que reparte o segmento em duas partes congruentes, isto é, de mesmas medidas); (3) Traçar uma perpendicular r ao segmento AB pelo ponto C (as estratégias são diferentes conforme o recurso que cada um dispõe — compasso, dobraduras, régua, dois livros etc.). Na Figura 3, ilustra-se a organização pedagógica dessas diretrizes. Percebe-se o cuidado do pesquisador em utilizar uma linguagem compreensível para a clientela e não aquela que seria empregada para uma clientela com formação matemática mais avançada.

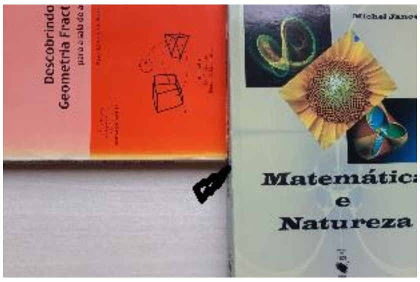
Figura 3: Representação dos três passos iniciais da construção



Fonte: Autoria Própria.

Todos os participantes possuíam em mãos régua e lápis, nenhum deles tinha compasso e esquadro. O professor-pesquisador explicou a razão de ser recomendada a folha com uma dimensão par, pois assim facilitaria a determinação do ponto C, que estaria distante de A ou de B, exatamente na metade da medida do segmento AB. Foi orientado que colocassem um livro com o dorso coincidindo com o segmento AB, e o outro em posição perpendicular a ele, para formar o ângulo reto. O processo descrito está ilustrado na Figura 4.

Figura 4: Ângulo reto formado por dois livros.



Fonte: Arquivo dos Pesquisadores.

No passo seguinte, para a construção do triângulo equilátero ABD, deveriam fazer o transporte da medida de AB para AD, ou seja, localizar um ponto D na parte superior da folha e traçar o segmento AD. Essa ação resultou bastante dificultosa aos participantes, devido ao manuseio de um material não convencional para eles (esquadros). Posteriormente, fecharam o triângulo equilátero ABD e, imediatamente, iniciaram o preenchimento do Quadro 1, em sua primeira linha e quatro primeiras colunas: 1 — Medida do lado do triângulo; 2 — Metade da medida do lado do triângulo; 3 — Medida da altura de cada triângulo; 4 — Perímetro de cada triângulo novo.

Na próxima etapa, deveriam obter o ponto médio dos lados AD e BD, respectivamente, E e F. Com isso, obtiveram quatro triângulos, um central CEF e três outros ACE, BCF e EDF. Foi indicado, ainda, que pintassem o triângulo central (CEF), ou o recortassem da folha. Ao constatar haver agora quatro triângulos "idênticos", na linguagem deles, puderam dar sequência ao preenchimento da linha 1 (correspondendo à iteração 0) do Quadro 1, e da linha 2 (correspondendo à iteração 1). No Quadro 2, consta o preenchimento feito pelo participante *Cr*.

Quadro 2: Quadro preenchido com as primeiras iterações.[3]

Iteração	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0 — (ΔABC)	36	18	31,5	108	108	0	567	1	0
1 — (ΔCEF)	18	9	15,75	54	216	141,75	425,25	3	1
2 — (Δ.......)									
3 — (Δ.......)									
4 — (Δ.......)									
5 — (Δ.......)									
.....									
Padrões percebidos									

Fonte: Registro da aluna *Cr*

Como os participantes não têm, em sua formação inicial, disciplinas de Geometria, nenhum deles sabia como usar uma ‘fórmula’ para obter altura (coluna 3) e área (colunas 6 e 7) de triângulos. Para obter a altura, o professor-pesquisador orientou que usassem a metade do valor da medida do lado AC, multiplicando por 1,73 (valor aproximado de $\sqrt{3}$). Para calcular a área, por conseguinte, deveriam dividir a metade da medida do lado, multiplicando pela medida da altura.

Observa-se que os valores das duas alturas registradas na coluna 3 foram: 31,5 cm e 15,75 cm. Verifica-se, também, que essas medidas se aproximam do valor que seria encontrado ao usar uma maior aproximação de $\sqrt{3}$, ou seja, 31,176 cm e 15,558 cm. A imprecisão dos resultados é perfeitamente compreensível, tendo em vista que os participantes não estavam habituados com cálculos envolvendo números decimais. Além disso, tampouco foi explicitado o valor com maior número de casas decimais a ser utilizado. *Cr* foi coerente no cálculo de áreas a partir desses valores fornecidos.

O fato de obter construção de ângulo reto, mesmo sem o uso de esquadros ou compasso, indica que é possível visualizá-lo de forma aproximada com o uso de uma composição de dois livros (Figura 1), indo além do que é indicado na habilidade (EF04MA18) da BNCC: Reconhecer ângulos retos e não retos em figuras poligonais com o uso de dobraduras, esquadros ou softwares de Geometria.

A atividade vai ao encontro do indicado por Giaquinto (2007) quanto à visualização: “É fácil ensaiar a tarefa de visualização e, assim, obter o apoio da memória na produção de imagens mais fortes. Então, podemos simplesmente restringir nossa atenção a casos em que as imagens são claras e estáveis” (p. 77).

Após a retirada ou pintura do triângulo central CEF, foi indicado que tomassem o triângulo superior DEF e repetissem os procedimentos anteriores. Posteriormente, foi pedido que replicassem o processo nos outros dois triângulos restantes. Assim, quatro novos triângulos foram obtidos no triângulo DEF, retirando-se o central. Em seguida, deveriam completar a terceira linha do Quadro 1. No Quadro 3, ilustra-se os dados obtidos pelo participante *Ka.*

[3] A participante não incluiu unidades em seu preenchimento.

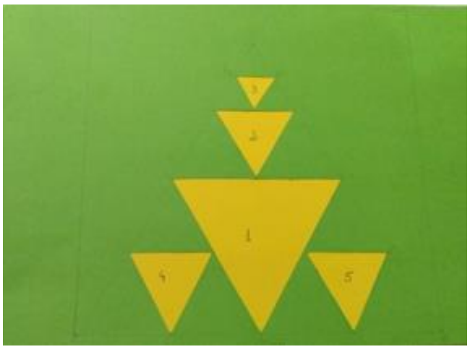
Quadro 3: Dados obtidos pelo participante *Ka*

Iteração	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0 — (ΔABC)	20 cm	10 cm	17,5 cm	60 cm	60 cm	_____	175 cm²	1	0
1 — (ΔCEF)	10 cm	5 cm	8,75 cm	30 cm	120 cm	43,75 cm²	131,25 cm²	3	1
2 — (Δ.......)	5 cm	2,5 cm	4,37 cm	15 cm	135 cm	10,92 cm²	120,26 cm²	5	2
3 — (Δ.......)	2,5 cm	1,25 cm	2,18 cm	7,5 cm	142,5 cm	2,72 cm²	117,5 cm²	7	3
4 — (Δ.......)	5 cm	2,5 cm	4,37 cm	15 cm	157,5 cm	10,92 cm²	106,51 cm²	9	4
5 — (Δ.......)	5 cm	2,5 cm	4,37 cm	15 cm	172,5 cm	10,92 cm²	95,52 cm²	11	5
....									
Padrões percebidos									

Fonte: Registros fornecidos por *Ka*

Percebe-se, nos dados fornecidos por *Ka*, que a participante foi até a quinta iteração, parando nessa etapa. Isso também ocorreu com outros participantes, o que indica que não houve compreensão quanto ao processo infinito de construção. No entanto, uma foto do objeto construído foi encaminhada ao professor-pesquisador (Figura 5), mostrando que essa participante alcançou o objetivo esperado.

Figura 5: Coleção dos triângulos retirados



Fonte: dados fornecidos por *Ka*.

Essa participante ilustra até a terceira iteração, porém, o que apresenta na Figura 5 é a coleção dos triângulos que foram retirados. Nas linhas 4 e 5, ela faz uma repetição dos dados para os outros dois triângulos da iteração 2, o que pode ter sido a causa de não ter identificado a sequência das medidas em cada coluna. Com tal elaboração, entretanto, foi possível completar os dados do Quadro 3 corretamente.

Como observa-se, nesta etapa da análise, não é explicitamente destacada a habilidade EF04MA19: Reconhecer simetria de reflexão em figuras e em pares de figuras geométricas planas e utilizá-la na construção de figuras congruentes, com o uso de malhas quadriculadas e de softwares de Geometria. Entretanto, *Ka* reconhece a congruência para completar os dados idênticos nos quatro triângulos da iteração, embora não expresse isso por não ser conteúdo desenvolvido na disciplina.

Esses dados fornecidos por *Ka* vão ao encontro do que Loizos (2015) salienta a respeito de uma imagem oferecer um “registro restrito, mas poderoso das ações temporais e dos acontecimentos reais, concretos, materiais” (p. 137).

Foi solicitado que identificassem padrões obtidos da construção do Triângulo de Sierpinski. A estudante *Ve* completou seu quadro e as medidas foram as mesmas escolhidas por *Ka*, com pequenas variações em termos de aproximação. Na coluna 6, *Ve* deveria indicar a área de cada triângulo retirado, porém, na iteração 0, sua retirada ainda não havia sido solicitada. Em outras palavras, ela interpretou como se fora a área do triângulo central. Assim, repetiu o mesmo valor na coluna 7, isto é, a área que fica, o que não faz sentido, uma vez que repete, na coluna 9, que foram retirados 0 triângulos. Dessa forma, manteve coerência nessas últimas colunas, reiterando seu equívoco interpretativo nas próximas iterações (Quadro 4). Salienta-se, também, o descuido com a unidade de medida de área.

Quadro 4: Recorte do quadro preenchido por *Ve*.

Iteração	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0 — (ΔABC)	20cm	10cm	17,5 cm	60 cm	60 cm	15,15 cm²	15,15 cm²	1	**0**

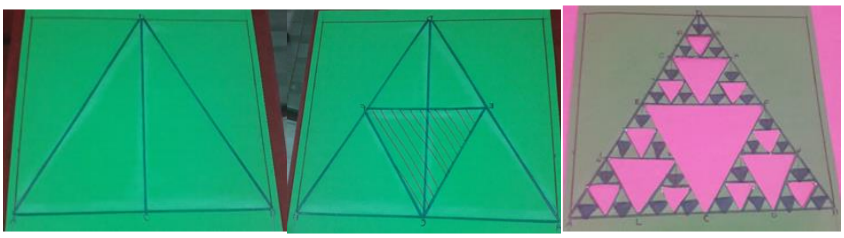
Fonte: Dados da participante *Ve*.

Em suas considerações a respeito dos padrões percebidos, *Ve* indica:

> *Observei, durante o passo a passo das medidas, que a cada novo triângulo eu obtinha a metade das medidas do(s) triângulo(s) anteriore(s), ou aproximadamente a metade. Também observei que a quantia de triângulos que retirava e que restavam eram múltiplos de 3, como pode ser observado na tabela acima. Com essa atividade, tivemos a oportunidade, mais uma vez, de construir um fractal e, no meu caso, consegui realizar a atividade com um melhor entendimento e segurança, desde as medições e recortes até os cálculos solicitados. Como trabalho com a área das ciências da natureza, consigo, a partir de agora, transpor esses novos saberes para determinados objetos do conhecimento, assim como foi dado o exemplo na aula anterior. Posso explorar o sistema nervoso e respiratório, por exemplo*[4].

A participante apresentou, ainda, seu registro fotográfico da construção realizada (Figura 6), inclusive, na última imagem da direita, com a sobreposição da construção na folha de outra cor e com os triângulos retirados até a terceira/quarta iteração.

Figura 6: Recorte das imagens da tarefa de *Ve*.



Fonte: Construção do tapete de *Ve*.

No que segue, apresenta-se no Quadro 5, os dados correspondentes à tarefa realizada por *Su*.

[4] Optou-se por usar o itálico nas citações literais dos indivíduos, para dar destaque no texto.

Quadro 5: Dados construídos por *Su*.

Iteração	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0 — (ΔABC)	30 cm	15 cm	26 cm	90 cm	90 cm	0 cm²	390 cm²	1	0
1 — (ΔCEF)	15 cm	7,5 cm	13 cm	45 cm	135 cm	97,5 cm²	219,38 cm²	3	1
2 — (Δ.......)	7,5 cm	3,75 cm	6,5 cm	22,5 cm	202,5 cm	73,13 cm²	164,53 cm²	9	3
3 — (Δ.......)	3,75 cm	1,88 cm	3,25 cm	11,25 cm	303,75 cm	54,84 cm²	124,11 cm²	27	9
4 — (Δ.......)	1,88 cm	0,94 cm	1,63 cm	5,64 cm	456,03 cm	41,37 cm²	92,51 cm²	81	27
5 — (Δ.......)	0,94 cm	0,47 cm	0,81 cm	2,82 cm	684,45 cm	30,83 cm²	70,24 cm²	243	81
6 — (Δ.......)	0,47 cm	0,24 cm	0,41 cm	1,41 cm	1.027,08 cm	23,41 cm²	54,96 cm²	729	243
.....									
Padrões percebidos	½ do valor anterior	½ do valor anterior	½ do valor anterior	½ do valor anterior	soma do valor anterior com o novo valor encontrado	b.h/2 multi-plicado pelo nº de Δ retirados	b.h/2 multipli-cado pelo nº de Δ que ficam	Nº de Δ da itera-ção ante-rior x 3	Nº de Δ da iteração anterior x 3

Fonte: Dados da participante *Su*.

O Quadro 5 apresenta valores calculados bem aproximados, assim como unidades corretas. Distingue-se dos demais, especialmente por ter ido além da 5ª iteração, registrando uma 6ª no lugar das reticências. Também, observa-se que indicou corretamente os padrões na última linha.

Como todos são profissionais em exercício no magistério, foi solicitado que indicassem como poderiam adequar a atividade realizada para as práticas profissionais com seus alunos nos anos iniciais. Escolheu-se, a título de ilustração, o registro feito por *Su*, por atuar como coordenadora pedagógica em tal nível de escolaridade, tendo uma visão mais global:

> *Para explorar a atividade poderíamos elaborar um objeto de encaixe, em E.V.A, que compreendesse até a iteração 2 da tabela, usando 3 cores diferentes correspondendo a cada etapa. Este objeto possuiria: 1 tabuleiro medindo 32cm x 28cm, sendo que este possuiria 2 bases (1 referente a parte inferior e a outra contendo um triângulo equilátero de lado 30cm, vasado, ao centro, sobreposto a base inferior); 1 triângulo equilátero de lado 15cm;3 triângulos equiláteros de lado 7,5cm;9 triângulos equiláteros de lado 3,75cm.*

No que diz respeito a como explorar a atividade com os aprendizes, esta estudante explica:

> *Entregar as peças e solicitar o encaixe de todas dentro do espaço triangular de lado 30cm da base/tabuleiro; explorar as medidas: classificação, seriação, maior, menor, organização e ocupação do espaço, critérios para a disposição das peças; multiplicação, divisão (frações), soma, subtração; cores; medida de área; medida de perímetro; Geometria Fractal (Estudante Su).*

Na construção realizada, assim como na indicação de como a atividade proposta poderia ser utilizada na Educação Básica, tudo indica que *Su* desenvolveu habilidades visuais como indicado por Giaquinto (2007). Além disso, parece ter um conhecimento relevante das habilidades constantes na BNCC, dentre as quais citou-se algumas neste trabalho.

Analisou-se, nesta etapa do estudo, o emprego da Geometria Fractal, ilustrada na construção concreta do Triângulo de Sierpinski. Acredita-se que um trabalho nessa direção possa favorecer o reconhecer, o comparar e o nomear figuras geométricas planas a partir do concreto. Também, o processo de características comuns nos triângulos que vão se formando, os padrões repetitivos dos diversos triângulos e as medidas de lado, perímetro e área podem contribuir para o desenvolvimento do pensamento geométrico dos estudantes.

Para finalizar-se a análise, apresenta-se, a seguir, dados relativos à construção da participante *Na*.

Quadro 6: Dados construídos por *Na*

Iteração	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0 — (ΔABC)	20 cm	10 cm	17,5 cm	60 cm	60 cm	175 cm²	175 cm^3	1	0
1 — (ΔCEF)	10 cm	5 cm	8,75 cm	30 cm	90 cm	43,75 cm²	131,25 cm²	3	1
2 — (Δ.......)	5 cm	2,5 cm	4,375 cm	15 cm	135 cm	10.937 5 cm²	120,31 25 cm²	9	3
3 — (Δ.......)	2,5 cm	1,25 cm	2,1875 cm	7,5 cm	202,5 cm	2,7343 75 cm²	117,578 125 cm²	27	9
4 — (Δ.......)	1,25 cm	0,625 cm	1,0937 5 cm	3,75 cm	303,75 cm	0,6835 9375 cm²	116,894 53125 cm²	81	27
5 — (Δ.......)	0,625 cm	0,3125 cm	0,5468 75 cm	1,875 cm	455,62 5 cm	0,1708 984375 cm²	116,723 632812 5 cm²	243	81
5 — (Δ.......)	0,3125 cm (...)	0,1562 5 cm (...)	0,2734 375 cm (...)	0,9375 cm (...)	683,43 75 cm (...)	0,0427 246094 (...) cm²	116,680 908203 1 (...) cm²	729 (...)	243 (...)
.....									
Padrões percebidos									

Fonte: Dados fornecidos por *Na***.**

A estudante utilizou o tamanho de folha idêntico ao de *Ka* e de *Ve*. É possível perceber o avanço nos dados fornecidos por ela em relação às primeiras, uma vez que buscou aproximações mais exatas. Na coluna 7, primeira linha, a participante se equivoca na unidade de medida de área, confundindo-a com a de volume. É relevante notar que fez as iterações 5 e 6, as quais a levaram a obter números decimais, fazendo até com quatro casas decimais.

Com relação aos dados percebidos da tabela, *Na* fez as seguintes considerações:

Nas colunas 1,2,3 e 4 o padrão numérico estabelecido para encontrar os resultados é dividir por 2. Ou pode ser observado em frações, na primeira linha tem-se 1 inteiro, na segunda ½, na terceira ¼, na quarta 1/8 ... e assim por diante, sempre multiplicando o denominador anterior por 2 para obter o *seguinte. Na coluna 5, o padrão numérico estabelecido é multiplicar por 1,5. Veja: 60 x 1,5=90 – 90 x 1,5=135 – 135 x 1,5=202,5... Na coluna 6, o padrão numérico estabelecido é a divisão por 4. Veja: 175:4=43,75 – 43,75:4=10,9375 – 10,9375:4=2,734357... Na coluna 7 o padrão numérico estabelecido para encontrar os resultados obtidos é: retirar o resultado da linha seguinte (logo abaixo, na diagonal) da coluna anterior: 175-43,75=131,25; 131,25-10,9375=120,312... Nas colunas 8 e 9 o padrão estabelecido é: multiplicar por 3 o número de triângulos retirados para obter o número de triângulos que ficam. Ou dividir por 3 o número de triângulos que ficam para obter o número de triângulos retirados. Ao observar o trabalho dos triângulos (Triângulo de Sierpinski) e a tabela proposta pelo professor, pode-se trabalhar com os alunos, especialmente, os dos anos iniciais do Ensino Fundamental.*

Essa participante parece ter percebido o estudo de forma mais contundente, como pode ser constatado tanto nos dados do Quadro 6 quanto em sua análise e conclusão. A partir disso, na sequência, ela tece considerações quanto a possibilidades de dar continuidade ao trabalho desenvolvido, aplicando-o em sua prática profissional em sala de atendimento especial — AEE:

Trabalho feito com pregos e linhas coloridas. Ao lado pode ser colocada uma legenda para orientar os alunos sobre as cores das linhas e os tamanhos dos triângulos. Além de área e perímetro, é possível trabalhar ainda a tabuada, pois, nas colunas 8 e 9, se multiplicarmos o número de triângulos retirados por 3, obteremos os triângulos que ficam:

3×1 = 3

3×3 = 9

3×9 = 27

3×27 = 81

3×81 = 243

3×243 = 729

3×729 = 2.187

Ao elaborar um plano para ser executado no AEE, é importante levar em conta aquilo que o aluno é capaz de realizar. Por exemplo, no caso de um aluno ter dificuldades motoras e o outro apresentar deficiência, as atividades devem ser diferenciadas.

Essa estudante questionou o professor-pesquisador se teria um tempo a mais para elaborar o fractal com a ideia de explorar pregos e linhas, o que lhe foi permitido. Ao final de uma semana, encaminhou o registro fotográfico do material (Figura 7).

Figura 7: Triângulo de Sierpinski em pregos e linhas

Fonte: Construto de *Na*.

Para finalizar a pesquisa descrita neste artigo, bem como analisar se o objetivo desta foi alcançado, julga-se pertinente averiguar como os estudantes associam o exercício realizado a habilidades oriundas da BNCC, identificando a quais anos escolares de sua prática profissional tais conteúdos podem ser adequados. Assim, para destacar que é possível introduzir concepções geométricas desde os primeiros anos escolares e, no caso, utilizar uma construção fractal para desenvolver habilidades, selecionou-se, no Quadro 7, o que foi apresentado pela participante *Na*, como dito antes, trabalhando em sala de AEE.

Quadro 7: Recorte de síntese elaborada por Na.

Público-Alvo	Atividade	Detalhamento	Habilidades BNCC
Alunos do Primeiro e segundo anos do Ensino Fundamental. Alunos com Deficiência Intelectual grave e baixa visão.	Pintura Numerais contagem Percepção sensorial	Apresentar o triângulo, pedir aos alunos para pintar os triângulos indicados e depois tirá-los. Contar quantos triângulos grandes, médios, pequenos... E escrever os numerais correspondentes, desenhando-os para ilustrar a contagem; Colar lixa, feltro e outros materiais para sentir com o tato as superfícies dos triângulos;	(EF15AR04) Experimentar diferentes formas de expressão artística (desenho, pintura, colagem, quadrinhos, dobradura, escultura, modelagem, instalação, vídeo, fotografia etc.), fazendo uso sustentável de materiais, instrumentos, recursos e técnicas convencionais e não convencionais. (EF01MA03) Estimar e comparar quantidades de objetos de dois conjuntos (em torno de 20 elementos), por estimativa e/ou por correspondência (um a um, dois a dois) para indicar “tem mais”, “tem menos” ou “tem a mesma quantidade”.

Fonte: Elaborado por *Na*.

A sugestão de atividade feita por *Na*, conforme consta no Quadro 7, indica sua preocupação em realizá-la de forma simples, mas, ainda assim, adequada ao segundo ano, incluindo alunos com Deficiência Intelectual grave e baixa visão. Sua prática profissional entende ser viável a inclusão de tais aspetos geométricos necessários ao desenvolvimento e integração dos alunos no ambiente escolar, atendendo ao que é preconizado pela BNCC.

Para finalizar a presente análise, apresenta-se o indicado por *Su*, que optou pelo componente Matemática para o 4º ano, na unidade temática número.

Quadro 8: Recorte de síntese elaborada por *Su*

Objetos de Conhecimento	Habilidades
Propriedades das operações para o desenvolvimento de diferentes estratégias de cálculo com números naturais	(EF04MA04) Utilizar as relações entre adição e subtração, bem como entre multiplicação e divisão, para ampliar as estratégias de cálculo.
Propriedades das operações para o desenvolvimento de diferentes estratégias de cálculo com números naturais	(EF04MA05) Utilizar as propriedades das operações para desenvolver estratégias de cálculo.
Números racionais: frações unitárias mais usuais (1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/10 e 1/100)	(EF04MA09) Reconhecer as frações unitárias mais usuais (1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/10 e 1/100) como unidades de medida menores do que uma unidade,

	utilizando a reta numérica como recurso.
Sequência numérica recursiva formada por múltiplos de um número natural	(EF04MA11) Identificar regularidades em sequências numéricas compostas por múltiplos de um número natural.

Fonte: Elaborado por *Su*.

A percepção de *Su* a respeito do potencial da atividade realizada com a introdução de Geometria Fractal, explorando a construção do Triângulo de Sierpinski em material concreto, dá uma visão de como atividades dessa natureza podem trazer contributos. No caso citado, *Su* discute como a atividade em questão poderia atender ao preconizado na BNCC quanto aos números, operações e sequências numéricas. Optou-se por esse conteúdo, uma vez que a Geometria, no entender deste pesquisador, está presente nas mais diversas áreas da Matemática, sendo motivadora para o que tem encaminhado como uma Didática para as demais disciplinas de um curso de formação de professores.

5 Considerações Finais

Apresentou-se, neste artigo, uma pesquisa realizada com estudantes de um curso de formação continuada de professores em um mestrado profissional em Ensino de Ciências e Matemática. O estudo envolveu seis participantes, todos atuando na Educação Infantil e nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, sendo que um também é coordenador pedagógico. A pesquisa, de cunho qualitativo, foi levada a efeito no primeiro semestre letivo de 2020, em pleno período de pandemia, tendo sido desenvolvida de modo remoto.

O artigo teve como objetivo primordial investigar como esses professores exploraram recursos materiais existentes no ambiente domiciliar para construir o Triângulo de Sierpinski, a fim de obter sequências e padrões a partir de elementos do referido ente geométrico. Além disso, os participantes deveriam analisar objetivos e habilidades constantes da BNCC, o que foi feito previamente à aula remota, bem como terem feito leituras relativas a sequências e padrões, especialmente na identificação da Sequência de Fibonacci em plantas que encontravam ao redor do ambiente domiciliar.

Na construção do triângulo, foram usados recursos disponíveis nas residências de cada um e feitas improvisações como, por exemplo, obter uma perpendicular a um segmento de reta (primeiro lado do triângulo equilátero a ser construído). Nessa perpendicular, repousaria o terceiro vértice, cujo desenvolvimento utilizou dois livros, como ilustrado em etapa anterior do artigo, na Figura 2.

A partir do uso de régua ou de trena, a medida do lado inicial foi transportada para a obtenção do terceiro vértice, sendo finalizado o triângulo equilátero inicial, bem como a determinação da iteração 0. A partir disso, localizaram-se os outros dois pontos médios, por meio de um procedimento utilizando régua ou trena, formando novos triângulos. Dessa maneira, em um processo repetitivo, o Triângulo de Sierpinski foi sendo construído, ao mesmo tempo em que um quadro era preenchido com as explorações geométricas em apreço.

Após a construção do triângulo, foi indicado que os participantes recortassem os triângulos centrais em cada iteração e fizessem uma colagem sobre a segunda folha, em cor diferenciada, de modo que os 'furos' ficassem em destaque colorido, diferenciando-se dos demais. Esse procedimento foi ilustrado na Figura 1.

Para finalizar, o pesquisador solicitou que tais profissionais da educação elaborassem síntese de adequação da atividade proposta no tocante a unidades temáticas, objetivos e habilidades constantes da BNCC para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Além disso, foi requisitado que fornecessem, a partir de suas experiências profissionais, possibilidades didáticas de replicarem o referido conteúdo.

Portanto, a pesquisa mostrou ser possível desenvolver conteúdos geométricos a partir de uma construção fractal para a Educação Infantil e/ou para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental, indo além do que usualmente é desenvolvido nas práticas pedagógicas em geral, adequando o nível de exigência para cada etapa. Entendeu-se que essa seria uma forma de não utilizar softwares de Geometria Dinâmica ou materiais de desenho geométrico — compassos e esquadros, por exemplo –, ilustrando, assim, que é possível desenvolver propostas pedagógicas inovadoras mesmo com parcos recursos. Conclui-se, com isso, que o objetivo da pesquisa e da atividade ministrada foram alcançados de modo satisfatório.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior — Brasil (CAPES) — Código de Financiamento 001.

Referências

Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. (2017). *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: Diário Oficial da União.

Giaquinto, M. (2007). *Visual Thinking in Mathematics: An Epistemological Study*. New York: Oxford University Press Inc.

Janos, M. (2009). *Matemática e Natureza*. São Paulo, SP: Livraria Editora da Física.

Jiang, B. & MA, D. (2018). How Complex Is a Fractal? Head/tail Breaks and Fractional Hierarchy. *Journal of Geovisualization and Spatial Analysis*, 6, 2-6.

Leivas, J. C. P. (2009). *Imaginação, intuição e visualização: a riqueza de possibilidades de abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática*. 294f. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Federal do Paraná. Curitiba, PR.

Loizos, P. (2015). Video, filme e fotografia como documentos de pesquisa, In: Bauer, M. W. & GASKELL, G. (Org). *Pesquisa Qualitativa com texto, imagem e som: um manual prático*. (13. ed., pp. 137-155). Petrópolis, RJ: Vozes.

Moreira, M. A. (2011). *Metodologias de Pesquisa em Ensino*. São Paulo, SP: Editora Livraria da Física.

Pickover, C. (2009). *The Math Book: 250 milestones in the History of Mathematics*. New York, Barnes & Noble.

Severino, A. J. (2016). *Metodologia do trabalho científico*. (24. ed., revista e atualizada). São Paulo, SP: Cortez.

Zimmermann, W. & Cunningham, S. (1991). *Visualization in teaching and learning mathematics: a project sponsored by the Committee on Computers in Mathematics Education of The Mathematical Association of America*. Washington: MAA.