

A teoria antropológica do didático como proposta metodológica para analisar recursos digitais

Matheus Souza de Almeida

Universidade Federal de Pernambuco
Recife, PE — Brasil

✉ profalmeida.matheus@gmail.com

ORCID [0000-0003-1782-763X](https://orcid.org/0000-0003-1782-763X)

Elisângela Bastos de Mélo Espíndola

Universidade Federal Rural de Pernambuco
Recife, PE — Brasil

✉ elisangela.melo@ufrpe.br

ORCID [0000-0002-3769-0768](https://orcid.org/0000-0002-3769-0768)



2238-0345 

10.37001/ripen.v13i4.3317 

Recebido • 05/02/2023

Aprovado • 10/08/2023

Publicado • 09/11/2023

Editor • Gilberto Januario 

Resumo: O objetivo deste artigo é analisar recursos digitais para o ensino e a aprendizagem de Matemática, apresentando a Teoria Antropológica do Didático como proposta metodológica. Para tanto, os dados foram coletados a partir das informações gerais disponíveis na plataforma digital PhET, a saber: descrições gerais dos recursos digitais *Explorador da Igualdade: Básico* e *Explorador da Igualdade*, materiais de ensino e propostas de atividades enviadas por professores. Ademais, os recursos digitais foram manuseados, a fim de determinar suas praxeologias matemáticas: os tipos e subtipos de tarefas e suas respectivas técnicas e tecnologias. Dentre os resultados, destaca-se que a combinação dos aspectos ostensivos é indispensável para o trabalho com as praxeologias matemáticas envolvendo os recursos digitais. Em suma, considera-se que a adoção da TAD como possibilidade metodológica permite analisar não apenas a organização matemática, como pode também subsidiar reflexões acerca da praxeologia didática, das relações pessoais e institucionais em torno do objeto matemático.

Palavras-chave: Teoria Antropológica do Didático. Praxeologia Matemática. Ostensivos. Tecnologias Digitais em Educação Matemática. Álgebra Escolar.

The anthropological theory of the didactic as a methodological proposal to analyze digital resources

Abstract: This article presents an analysis of digital resources for mathematics teaching and learning based on the anthropological theory of the didactic as a methodological proposal. Thus, data were collected from the general information available on the PhET digital platform: general descriptions of the digital resources *Equality Explorer: Basics* and *Equality Explorer*, teaching resources, and activities proposals sent by teachers. Furthermore, digital resources were handled to determine their mathematical praxeologies: the types and subtypes of tasks and their respective techniques and technologies. Combining ostensive aspects is highlighted among the research results as indispensable for working with mathematical praxeologies involving digital resources. In short, the results reveal that adopting the ATD as a methodological possibility allows analyzing not only the mathematical organization but can also support reflections about the didactic praxeology and the personal and institutional relations around the mathematical object.

Keywords: Anthropological Theory of the Didactic. Mathematics Praxeology. Ostensives. Digital Technologies in Mathematics Education. School Algebra.

La teoría antropológica de la didáctica como propuesta metodológica para analizar los recursos digitales

Resumen: El objetivo de este artículo es analizar los recursos digitales para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, presentando la teoría antropológica de la didáctica como propuesta metodológica. Para ello, se recolectaron datos de la información general disponible en la plataforma digital PhET: descripción general de los recursos digitales *Explorador de Igualdades: Básico y Explorador de Igualdad*, recursos didácticos y propuestas de actividades enviadas por los profesores. Además, se manejaron recursos digitales para determinar sus praxeologías matemáticas: los tipos y subtipos de tareas y sus respectivas técnicas y tecnologías. Entre los resultados de la investigación, se destaca que la combinación de aspectos ostensivos es indispensable para trabajar con praxeologías matemáticas que involucran recursos digitales. En definitiva, se considera que adoptar la TAD como posibilidad metodológica permite analizar no solo la organización matemática, sino que puede sustentar reflexiones sobre la praxeología didáctica y las relaciones personales e institucionales en torno al objeto matemático.

Palabras clave: Teoría Antropológica de la Didáctica. Praxeología Matemática. Ostensivos. Tecnologías Digitales en la Educación Matemática. Álgebra Escolar.

1 Introdução

O uso de recursos digitais e não digitais pelos professores em suas práticas educativas pode favorecer a aprendizagem dos alunos, desde que pensado em consonância com os saberes escolares e as metodologias de ensino. É com essa compreensão que o papel dos recursos (tais como: livros didáticos, materiais manipulativos, jogos matemáticos etc.) nos processos de ensino e aprendizagem de Matemática tem sido objeto de investigação de algumas pesquisas no campo da Educação da Matemática (Trouche, Gueudet & Pepin, 2020; Bittar, 2017, 2022; Almouloud, 2015; Grando, 2015; Miranda & Adler, 2010).

Segundo Gueudet e Trouche (2016), os professores selecionam, adaptam e concebem artefatos específicos para o seu desenvolvimento profissional, denominados de recursos. Arelada a essa noção, tomamos a concepção de recurso, em um sentido amplo, como proposta por Adler (2000): a partir do verbo em inglês *re-source*, recurso (*resource*) pode ser compreendido como tudo aquilo que *realimenta* ou *reconfigura* o trabalho docente. Logo, com base na autora, recurso é tanto substantivo (objeto) quanto verbo (ação).

Nessa perspectiva, Adler (2000) preconiza que a atividade do professor envolve um conjunto de recursos, classificados em três categorias: (i) *recursos humanos*, que incluem as ações dos professores e o conhecimento pedagógico do conteúdo incorporado por eles; (ii) *recursos culturais*, que dizem respeito aos conceitos disponibilizados na cultura e às ferramentas como o tempo e o idioma; e (iii) *recursos materiais*, a exemplo: softwares educacionais, materiais manipulativos, documentos curriculares, entre outros objetos tangíveis que podem ser empregados nos processos de ensino e aprendizagem (Miranda & Adler, 2010). Neste artigo, damos ênfase à análise dos recursos materiais, em particular os digitais.

Convém ressaltar que, com o advento do ensino remoto, acarretado pela pandemia da Covid-19, todas as categorias de recursos supramencionadas continuaram sendo utilizadas, em configurações e modos exploratórios para cada realidade educacional específica, mediante interações *on-line* ou *off-line*, síncronas ou assíncronas. Assim sendo, concebemos os *recursos didáticos digitais* como tudo que pode realimentar ou reconfigurar a atuação profissional dos professores, encontrando-se disponíveis e compartilhados, essencialmente, por meio da *internet*, para serem utilizados com uma intencionalidade didática.

Ademais, a partir do desenvolvimento de um projeto de pesquisa, ao longo de dois anos (2020-2022), sobre os recursos para o estudo das relações de igualdade matemática, consideramos que não somente a análise da implementação dos recursos digitais nas aulas de

Matemática é relevante, mas também a avaliação sistemática desses recursos, em uma etapa antecedente ao seu uso em sala de aula — com base em pressupostos teórico-metodológicos do campo da Didática da Matemática.

Nesse cenário, lançamos a seguinte questão: como a Teoria Antropológica do Didático pode nortear metodologicamente a análise de recursos digitais? Pretendendo responder esse questionamento, focamos no tema da Álgebra Escolar que, conforme Bosch (2019, p. 52), “tem estado no cerne do desenvolvimento da TAD desde o seu início e pode fornecer uma rica ilustração dos diferentes tratamentos que esta estrutura de pesquisa propõe”.

Portanto, objetivamos analisar recursos digitais para o ensino e a aprendizagem de Matemática, apresentando a Teoria Antropológica do Didático como proposta metodológica. Nos tópicos subsequentes, delineamos a fundamentação teórica, para então discorrermos sobre a dimensão metodológica, as análises dos resultados, bem como a respeito das ponderações acerca do panorama geral das discussões e reflexões apresentadas neste artigo.

2 Teoria Antropológica do Didático

A Teoria Antropológica do Didático (TAD), inserida no campo da Didática da Matemática da tradição francesa, foi desenvolvida por Yves Chevallard como uma extensão da Teoria da Transposição Didática, proposta pelo mesmo autor (Chevallard, Bosch & Kim, 2015; Bosch & Gascón, 2014). O prolongamento entre essas teorias foi motivado pela *problemática ecológica*¹ que possibilitou o debate a respeito das condições instituídas quanto aos distintos objetos do saber a serem ensinados (Araújo, 2009; Barbosa, 2017).

Ao teorizar sobre a dimensão antropológica da Matemática (e dos fenômenos didáticos), Chevallard (1996) vai além do sistema didático “professor-aluno-saber”, proposto por Brousseau, e insere a didática no campo da Antropologia, buscando dar enfoque nas organizações didáticas referentes aos processos de ensino e aprendizagem das organizações matemáticas.

Chevallard (1999) construiu a apresentação da TAD de forma axiomática. De modo geral, a TAD fornece aparatos teóricos que fundamentam as investigações sobre “as condições de possibilidade e funcionamento de sistemas didáticos, entendidos como relações sujeito-instituição-objeto” (Almouloud, 2007, p. 111).

A princípio, o teórico amparou-se nestes três conceitos primitivos: *objetos*, *pessoas* e *instituições*. Além disso, têm-se as *relações*, conceitos também essenciais para a TAD, que possibilitam as transformações dos elementos constituintes desse tripé e permitem que eles continuem a existir, ou não, considerando o fator temporal. Chevallard (1999) as classifica como: *relações pessoais* de um *sujeito* com um *objeto* e *relações institucionais* de uma *instituição* com um *objeto*.

Na TAD, tudo é *objeto* (O), incluindo as próprias pessoas, isto é, “o objeto é qualquer entidade, material ou imaterial, que existe, ao menos, individualmente” (Chevallard, 2018, p. 31). Segundo o referido teórico, qualquer produto, dotado de intencionalidade, da atividade humana é um *objeto*. Outro conceito fundamental é a noção de *pessoa* (X), que não deve ser objeto da alusão corriqueira “todo indivíduo é uma pessoa”, pois, para Chevallard (2018), a *pessoa* muda ao decorrer do tempo a partir de suas relações, ou seja, objetos passam a existir para X, outros mudam, ou até mesmo deixam de existir. Nessa transformação, o que muda é a pessoa, o indivíduo continua invariante. Assim, a relação pessoal de um *sujeito* X com um

¹ “A problemática ecológica se apresenta, de imediato, como um meio de questionar o real” (Araújo, 2009, p. 32).

objeto O é designada no sistema por $R(X, O)$, que diz respeito a todas as interações possíveis de X com O em determinados momentos históricos de X .

Já a *instituição* (I), como afirma Chevallard (2018), consiste em um dispositivo social, “completo”, que pode ter uma extensão bem curta no seio social, permitindo e impondo a seus sujeitos modos próprios de fazer e de pensar, concebidos na TAD como as praxeologias; além de possibilitar a existência de um determinado saber. Destarte, todo saber existe pelo menos em uma instituição I . São exemplos de instituições: a sala de aula, o estabelecimento escolar, Secretarias de Educação, Ministério da Educação, entre outros.

A relação institucional de uma *instituição* I com um objeto O é designada por $R(I, O)$, que concerne à existência de um objeto O para uma *instituição* I , quando O é conhecido por I . Nesse caso, O é um *objeto institucional*. Conforme Chevallard (2018), uma *relação institucional* é dita ideal quando existe uma conformidade entre esta e a *relação pessoal*; em outros termos, quando $R(I, O)$ se assemelha a $R(X, O)$ do “bom sujeito” de I . Isso não implica, necessariamente, que a “melhor” *instituição* seja aquela constituída por “bons sujeitos”, mas sim a *instituição* cujos sujeitos permitem transformações nas relações institucionais.

De acordo com Chevallard (2018), uma *pessoa* X torna-se *sujeito* de uma *instituição* I ; logo, o *objeto* O existente em I existirá também para X , sob a exigência de $R_I(O)$. Nesse sentido, $R(X, O)$ constrói-se ou muda mediante a exigência de $R(I, O)$. É com essa visão que Chevallard define aprendizagem. “Para ele, há aprendizagem a partir do momento em que a relação pessoal $R(X, O)$, de um indivíduo X com um objeto O , se modifica” (Araújo, 2009, p. 35).

Além disso, um *objeto* O pode existir em diferentes instituições ou até mesmo pode ser visto distintamente em diversas instituições. E mais, o *objeto* O pode mudar, evoluir, envelhecer ou desaparecer ao decorrer do tempo em uma *instituição*. As instituições, assim como as pessoas e os saberes, constituem-se, pois, como dispositivos mutáveis, dependendo do tempo e do contexto histórico, social e cultural.

Para ilustrar melhor os conceitos discutidos até então, tomemos, brevemente, o objeto matemático *Relações de Igualdade* (O_{RI}), um dos saberes fundamentais para o trabalho introdutório com a álgebra escolar. Esse saber matemático é objeto para as instituições Base Nacional Comum Curricular — BNCC (I_{BNCC}) e Currículo de Pernambuco — CPE (I_{CPE}) do governo federal brasileiro e do governo estadual pernambucano, respectivamente; uma vez que ele existe nas orientações curriculares da área de Matemática propostas nesses documentos oficiais (Brasil, 2018; Pernambuco, 2019), especificamente nas habilidades do Ensino Fundamental. Ou seja, há relações institucionais $R(I_{BNCC}, O_{RI})$ e $R(I_{CPE}, O_{RI})$ nesse contexto.

Além disso, o *objeto* (O_{RI}) deve existir ainda em outras instituições, tais como a escola e a sala de aula, a fim de que os sujeitos (professores com a finalidade de ensinar e avaliar, e os alunos com o objetivo de aprender) pertencentes a essas instituições também estabeleçam relações pessoais $R(X, O_{RI})$ com o referido objeto. Portanto, os “bons sujeitos”, na atualidade do sistema educacional do Brasil, são aqueles que conhecem o O_{RI} e desenvolvem as habilidades conforme I_{BNCC} e I_{CPE} .

Um recorte da TAD refere-se ao desenvolvimento da noção de praxeologia, que permite a modelização das práticas sociais, particularmente, das atividades matemáticas. No subtópico adiante, nos aprofundamos nesse conceito.

2.1 Organização Praxeológica

Como preconiza Chevallard (2018, p. 34), “a noção de praxeologia é o coração da TAD”. Uma organização praxeológica ou praxeologia diz respeito a um tipo de *tarefa* (T), uma

técnica (τ) para realizar uma tarefa (t) específica do tipo T , uma *tecnologia* (θ) que explica e justifica a técnica utilizada para executar as tarefas do tipo T , e, por fim, uma *teoria* (Θ) que fundamenta a tecnologia (e todos os elementos da organização praxeológica) (Chevallard, 2018). Nesse sentido, o autor afirma que a *estrutura praxeológica pontual* [T, τ, θ, Θ] (que toma T como um “ponto” de partida) é composta por duas partes: um *bloco prático-técnico* [T, τ], ou o “saber-fazer” (práxis); e um *bloco tecnológico-teórico* [θ, Θ], ou “saber” (logos).

Ainda com base em Chevallard (2018), pontuamos que um fato essencial na noção de praxeologia é que, em um viés antropológico, não há *práxis* desvinculada de um *logos*. Entretanto, independentemente da posição institucional do observador (pesquisador frente às praxeologias do professor e dos alunos, professor frente às praxeologias dos alunos etc.), o bloco tecnológico-teórico é dificilmente visível, parecendo, pois, ausente.

Segundo Chevallard (1999), é importante estabelecer uma distinção entre a *praxeologia matemática* e a *praxeologia didática*. A *praxeologia matemática* abrange a estruturação da realidade matemática para a sala de aula, composta com foco nos tipos de tarefas (T) — matemáticas realizadas —, técnicas (τ) — matemáticas explicadas —, de tecnologias (θ) justificadas e de teorias (Θ) relativas aos objetos matemáticos a serem estudados ou construídos (Araújo, 2009).

Por outro lado, a *praxeologia didática* acontece a partir da execução de uma organização matemática. Essa organização praxeológica surge não mais com a intenção de realizar uma atividade matemática, como, por exemplo, determinar o termo desconhecido em uma relação de igualdade, mas com a preocupação de estudar como ensinar a calcular o termo desconhecido em uma igualdade matemática. Para tanto, Chevallard (1999) distingue seis momentos didáticos que possibilitam analisar a praxeologia didática: (i) o primeiro encontro com a praxeologia matemática; (ii) a exploração do tipo de tarefa e o desenvolvimento de uma técnica; (iii) a elaboração do ambiente tecnológico e teórico; (iv) a institucionalização; (v) o trabalho com a técnica; e (vi) a avaliação².

Neste trabalho, tomamos, mais à frente, a noção de praxeologia matemática, a fim de destacar as tarefas, técnicas e tecnologias identificadas no uso dos recursos digitais.

2.2 Ostensivos e Não-Ostensivos

Vimos até aqui que, na TAD, toda atividade humana realizada em uma *instituição* é passível de ser modelada pelo quarteto praxeológico [T, τ, θ, Θ] (Chevallard, 2018). Segundo Kaspary e Bittar (2018), esses componentes podem ser identificados e manipulados por intermédio de algum manifesto material, designado por *ostensivo*.

Mediante a manipulação ou reconhecimento dos ostensivos como sons, símbolos, grafismos, gestos e desenhos que construímos, acessamos e tocamos em uma representação das coisas que vivem no mundo das ideias, como os conceitos e teoremas, designados por *não-ostensivos* (Chevallard, 1994). Para facilitar a compreensão desse conceito fundamental na análise da atividade matemática, consideremos o objeto não-ostensivo *Relações de Igualdade*. Nesse caso, um objeto ostensivo bastante utilizado para representar essa ideia nas aulas de Matemática pelo professor, ou até mesmo no livro didático, é a balança de dois pratos.

Ressaltamos que “assumimos os ostensivos como ingrediente primário da técnica” (Kaspary; Bittar, 2018, p. 406). Ou seja, destacamos os aspectos ostensivos dos recursos

² “Sob dois aspectos: a avaliação das relações pessoais e a avaliação da relação institucional, ambas em relação ao objeto construído, que se articulam com o momento da institucionalização, permitindo relançar o estudo, demandar a retomada de alguns dos momentos e, eventualmente, do conjunto do trajeto didático” (Barbosa & Lima, 2019, p. 1361).

digitais, a fim de descrever as técnicas para a realização das suas tarefas matemáticas.

Retornando às noções fundamentais da abordagem antropológica, diremos que a aplicação de uma técnica se traduz por uma *manipulação de ostensivos regulada por não-ostensivos*. Os ostensivos constituem a parte perceptível da atividade, isto é, na realização da tarefa esses objetos podem ser vistos tanto pelos observadores como pelos atores. Na análise do trabalho matemático, os elementos ostensivos fazem parte do real empírico, acessível aos sentidos. Em contrapartida, a presença de tal ou tal não-ostensivo em uma determinada prática pode ser apenas induzida ou suposta a partir das manipulações de ostensivos institucionalmente associados (Bosch & Chevallard, 1999, p. 11, destaque dos autores, tradução de: Kaspary & Bittar, 2018, p. 406).

Por fim, cabe pontuar que um ostensivo possui duas facetas em uma atividade: a semiótica e a instrumental. A dimensão semiótica se refere aos significados evocados por um certo ostensivo; enquanto a dimensão instrumental tange a sua função operacional (Chevallard, 1994). Neste estudo, damos ênfase mais sobre o caráter instrumental dos ostensivos, não descartando a relevância da dimensão semiótica.

3 Aspectos metodológicos

Caracterizamos o tipo da presente pesquisa como documental, já que, segundo Bailey (1994) e Mogalakwe (2006), é um método que busca analisar as informações, contidas nos documentos, sobre os fenômenos que se pretende investigar. Nesse sentido, o pesquisador precisa utilizar técnicas para selecionar, interpretar, categorizar, identificar as potencialidades e limitações dos recursos materiais, documento comumente de cunho escrito proveniente do domínio público ou privado (Payne & Payne, 2004; Mogalakwe, 2006). Assim, uma vez que buscamos compreender o fenômeno estudado, por meio dos documentos coletados, levando em conta as informações disponíveis na própria fonte, a abordagem da pesquisa é qualitativa (Patton, 2005).

No cenário desta investigação, para a produção e análise dos dados, damos enfoque aos recursos digitais *Explorador da Igualdade: Básico* (EIB) e *Explorador da Igualdade* (EI), disponibilizados na plataforma digital *Physics Education Technology* (PhET). A PhET, vinculada à Universidade do Colorado Boulder, foi desenvolvida pelo laureado Nobel Carl Wieman em 2002 e oferece simulações na área de Matemática e Ciências, de forma gratuita, lúdica e interativa; norteadas por pesquisas educacionais realizadas com alunos e professores (Universidade do Colorado Boulder, 2022).

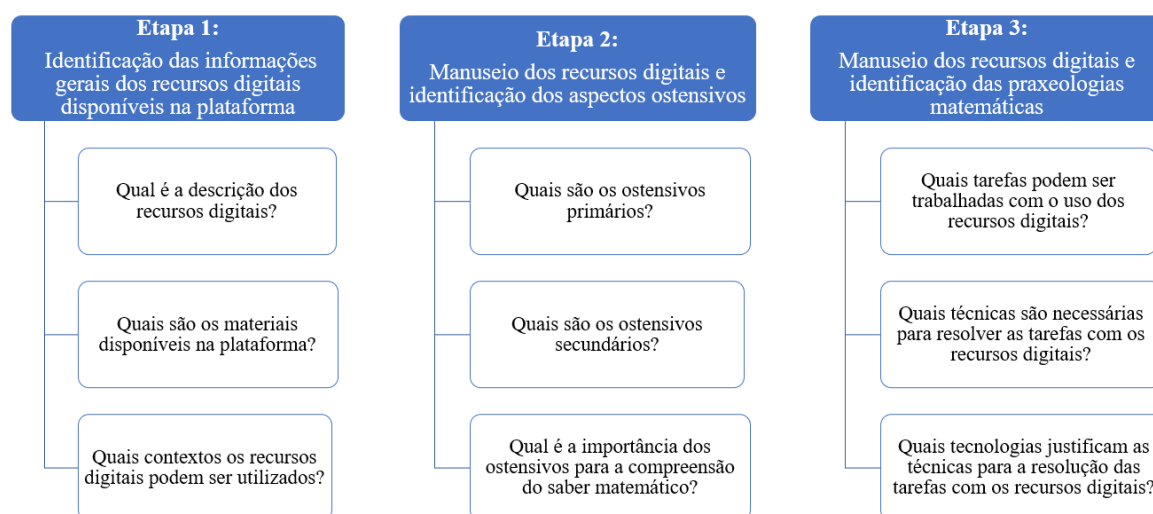
No que concerne à metodologia da análise dos dados, em um primeiro momento, selecionamos as informações gerais apresentadas na PhET a respeito do EIB e EI, a saber: descrição dos recursos digitais (tópicos matemáticos que podem ser abordados e objetivos de aprendizagem) e dicas para professores. No segundo momento, buscamos manusear os recursos digitais e identificar os seus aspectos ostensivos. No terceiro momento, realizamos simulações interativas com os recursos digitais a fim de determinar as praxeologias matemáticas que lhes são concernentes.

Na Figura 1, ilustramos a organização metodológica da pesquisa e as perguntas específicas que nortearam as análises em cada etapa.

Na *Etapa 1 — Identificação das informações gerais dos recursos digitais disponíveis na plataforma*, o pesquisador (e/ou professor) deve levantar as descrições, os materiais vinculados, os contextos de aplicação percorridos pela própria plataforma propositora dos

recursos digitais. Sem perda de generalidade, no nosso contexto, os recursos digitais são as simulações interativas, mas poderia ser um vídeo interativo ou um jogo digital, por exemplo.

Figura 1: Organização metodológica da pesquisa



Fonte: Elaboração própria

Na *Etapa 2 — Manuseio dos recursos digitais e identificação dos aspectos ostensivos*, o pesquisador (e/ou professor) deve procurar categorizar os ostensivos primários (aqueles que são fundamentais para o estudo do saber matemático, isto é, o entendimento dos elementos não-ostensivos) e os secundários (aquelas ferramentas que auxiliam no aprimoramento do modo de utilização dos recursos digitais, sem ter relação direta com o objeto matemático), além de questionar-se sobre a relevância dos ostensivos como ingredientes indispensáveis para a atividade matemática — um pontapé para a última etapa.

Na *Etapa 3 — Manuseio dos recursos digitais e identificação das praxeologias matemáticas*, o pesquisador (e/ou professor) deve determinar as tarefas e subtarefas que podem ser trabalhadas com os recursos digitais, as técnicas que possibilitam a resolução dessas tarefas e as tecnologias que ajudam na compreensão da justificativa do emprego das técnicas.

Enfatizamos que, como mencionado na seção anterior, enxergamos os ostensivos dos recursos digitais em uma dimensão instrumental, haja vista que temos a finalidade de compreender as possíveis operacionalidades deles nos processos educacionais.

4 Resultados e discussão

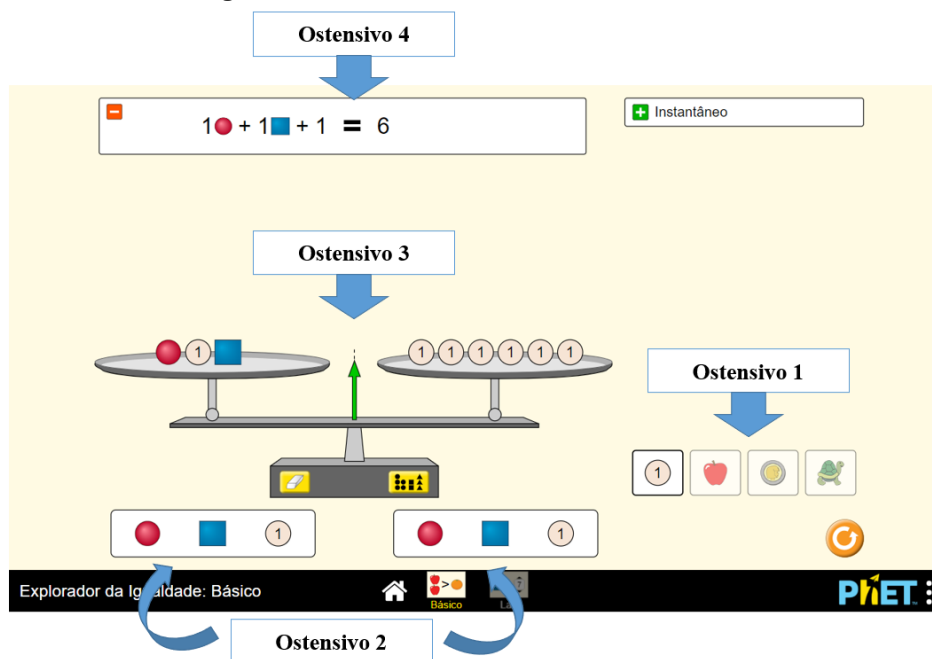
Ao analisarmos as informações gerais dos recursos digitais *Explorador da Igualdade: Básico* (EIB) e *Explorador da Igualdade* (EI), é possível identificar as relações institucionais $R(I, O_{SI})$ entre a Universidade do Colorado Boulder e as simulações interativas (SI), assim como as relações pessoais $R(X, O_{SI})$ entre os professores e as SI por meio da análise dos planos de aulas publicados na plataforma PhET.

Neste estudo, levando em consideração as relações institucionais $R(I_{BNCC}, O_{RI})$, isto é, as orientações curriculares propostas pelo recente documento normativo da educação brasileira acerca das relações de igualdade no ensino de álgebra escolar, buscamos estabelecer relações pessoais, enquanto pesquisadores, com os referidos recursos digitais. Desse modo, damos enfoque aos resultados produzidos a partir da etapa 2 e 3 (ver Figura 1 exposta anteriormente).

4.1 Explorador da Igualdade: Básico

A priori, na análise dos recursos materiais (passíveis de manipulação virtual) do EIB, identificamos quatro tipos de ostensivos no *modo* básico, que contribuem diretamente para o estudo das relações de igualdade, são eles: O_1 — *Tipos dos objetos*; O_2 — *Objetos a serem inseridos na balança de dois pratos*; O_3 — *Balança de dois pratos*; e O_4 — *Sentença matemática com o sinal de igualdade*.

Figura 2: Ostensivos da tela do EIB no *modo* básico



Fonte: Adaptada pelos autores a partir da plataforma PhET

Com relação à Figura 2, pontuamos que o O_3 — *Balança de dois pratos* pode contribuir para o entendimento da igualdade matemática enquanto noção de equivalência, ou seja, o sinal de igualdade pode ser compreendido em uma perspectiva relacional. A analogia estabelecida entre O_3 e o não-ostensivo *Relações de Igualdade* acontece por intermédio da relação que se faz entre cada lado da balança com cada membro da igualdade. Assim, quando os pratos da balança estão equilibrados, temos uma situação de equivalência. Essa noção é constatada por meio do O_4 — *Sentença matemática com o sinal de igualdade*, que explicita com a simbologia “=” quando há um equilíbrio em O_3 , como sinalizado na seta verde entre os pratos da balança (ver Figura 2). Por outro lado, quando os pratos estão desequilibrados, essa seta fica cinza, revelando uma desigualdade entre as massas dos objetos inseridos em cada prato.

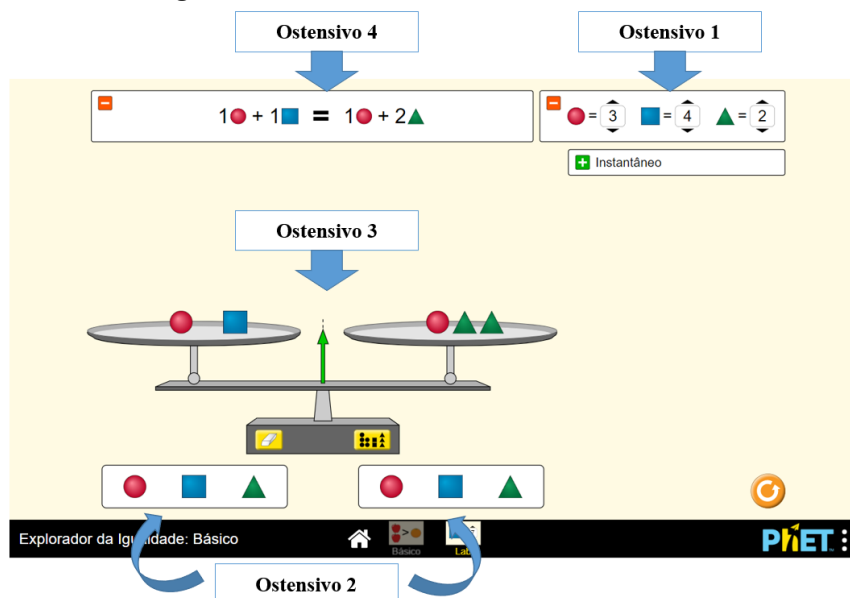
A fim de visualizar esses ostensivos no estudo do tema em cena, precisamos, antes de tudo, inserir ou retirar objetos da balança, mobilizando o O_2 — *Objetos a serem inseridos na balança de dois pratos*; o que remete às operações feitas em uma igualdade. Os objetos inseridos e retirados sofrem influência do O_1 — *Tipos de objetos*, o que permite escolher quais os tipos de objetos (sólidos geométricos, frutas, moedas e animais) a serem utilizados nas simulações.

No modo *lab* (ver Figura 3), diferentemente da seção básica, o O_1 — *Tipos dos objetos* possibilita que os alunos possam, além de escolher o tipo de objeto (esfera, cubo e pirâmide) a ser mobilizado na simulação, atribuir os valores desses objetos, que variam de 1 a 20.

Outro aspecto a ser observado é a existência de outros ostensivos secundários, que facilitam a manipulação do *Explorador da Igualdade: Básico*, por exemplo: a *borracha* (ícone de borracha),

que retira todos os objetos da balança caso os alunos queiram propor outra situação, e o *empilhador de objetos* (📦), que empilha cada tipo de objeto um em cima do outro, dando uma organização nos objetos inseridos na balança de dois pratos. Não daremos ênfase à manipulação dessas e de outras ferramentas pois não fazem parte do objetivo deste estudo.

Figure 3: Ostensivos da tela do EIB no modo básico



Fonte: Adaptada pelos autores a partir da plataforma PhET

Como supracitado, de acordo com Kaspary e Bittar (2018), consideramos os ostensivos como o ingrediente primário da técnica. Ressaltamos, pois, que os quatro principais ostensivos do EIB, retrodescritos, estão permeados na análise das praxeologias matemáticas, porque eles são essenciais para a mobilização das técnicas na resolução das tarefas com o uso do referido recurso digital.

No Quadro 1, apresentamos seis subtipos de tarefas relacionadas à tarefa *T — Elaborar e resolver problemas com o uso do Explorador da Igualdade: Básico*. É indispensável salientar que os subtipos de tarefas não estão dispostos explicitamente na plataforma PhET, eles foram identificados pelos pesquisadores mediante as constantes análises das funcionalidades do EIB.

Quadro 1: Elementos das praxeologias matemáticas identificados no uso do *Explorador da Igualdade: Básico*

Tipos de Tarefas	Descrição das técnicas	Tecnologias
t₁: Mostrar, por meio da balança interativa, uma relação de igualdade entre quantidades equivalentes de objetos.	τ₁: Escolher o tipo de objetos (O ₁) e colocar os objetos (O ₂) em ambos os lados da balança (O ₃) do EIB até obter o seu equilíbrio, que pode ser observado por meio da igualdade (O ₄).	θ₁: Noção de igualdade em uma situação-problema envolvendo equilíbrio. θ₂: Interpretação do sinal de igualdade como equivalência.
t₂: Determinar, por meio da balança interativa, diferentes sentenças de adições de objetos que resultem na mesma soma.	τ₂: Aplicar τ ₁ . Relacionar os objetos (O ₂) apresentados em cada lado da balança (O ₃) aos seus valores numéricos (O ₁). Observar as igualdades matemáticas, a fim de constatar as relações (O ₄), que podem ser salvas com a ferramenta	θ₁, θ₂ θ₃: Identificação de equivalência entre sentenças de igualdade envolvendo operações numéricas de adição.

	de captura de tela.	
t₃: Mostrar, por meio da balança interativa, que a relação de igualdade existente entre dois membros permanece quando se adiciona um mesmo objeto a cada membro.	τ₃: Aplicar τ_1 . Adicionar um mesmo tipo de objeto (O_1 e O_2) em ambos os lados da balança (O_3) para verificar seu equilíbrio e verificar a igualdade (O_4) entre as operações de adição.	θ₁, θ₂, θ₃ θ₄: Princípio aditivo de equivalência.
t₄: Mostrar, por meio da balança interativa, que a relação de igualdade existente entre dois membros permanece quando se subtrai um mesmo objeto a cada membro.	τ₄: Aplicar τ_1 . Subtrair um mesmo tipo de objeto (O_1 e O_2) em ambos os lados da balança (O_3) para verificar seu equilíbrio e verificar a igualdade (O_4) entre as operações de adição.	θ₁, θ₂, θ₃, θ₄
t₅: Determinar o termo desconhecido, em uma relação de igualdade envolvendo adição e subtração, por meio da balança interativa.	τ₅: Colocar apenas em um ou ambos lados da balança os seguintes objetos: esfera vermelha e/ou cubo azul (O_1 e O_2). Adicionar esferas com o numeral “1” em um ou dois lados da balança (O_3). Subtrair um mesmo número em ambos os lados da balança até chegar ao valor do objeto (esfera vermelha ou cubo azul).	θ₁, θ₂, θ₃, θ₄
t₅: Determinar o termo desconhecido em uma relação de igualdade envolvendo adição, subtração, multiplicação e divisão, por meio da balança interativa.	τ₆: Colocar em um ou ambos os lados da balança os seguintes objetos: esfera vermelha e/ou cubo azul (O_1 e O_2). Adicionar esferas com o numeral “1” em um ou dois lados da balança (O_3). Subtrair a mesma quantidade em ambos os lados da balança, verificando o equilíbrio entre eles. Retirar a metade da massa em ambos os pratos, que na igualdade representa a divisão de ambos os membros, para chegar ao valor do objeto esfera vermelha ou cubo azul.	θ₁, θ₂, θ₃, θ₄ θ₅: Princípio multiplicativo de equivalência.

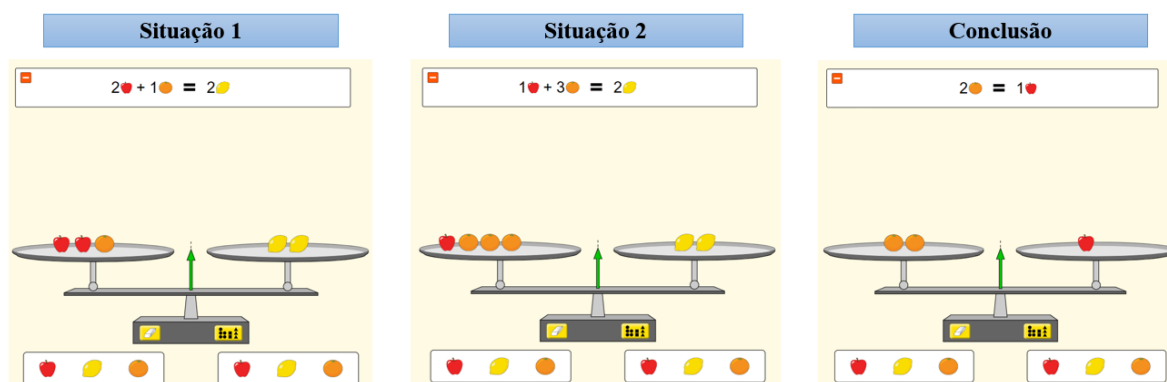
Fonte: Adaptado de Oliveira, Almeida e Espíndola (2021)

Para efeito de ilustração, exemplificamos na Figura 4 como o subtipo de tarefa **t₁**, disposto no Quadro 1, pode ser explorado com a finalidade de compreender a utilização do EBI no ensino introdutório de álgebra escolar, com foco na aprendizagem dos alunos acerca do tema *Relações de Igualdade*.

Elucidamos que o subtipo de tarefa **t₁** — *Mostrar, por meio da balança interativa, uma relação de igualdade entre quantidades equivalentes de objetos* — fundamental para qualquer experimentação com o EIB acerca da noção de equivalência (**θ₁, θ₂**), pois os alunos precisam colocar objetos equivalentes em ambos os lados da balança de dois pratos (**τ₁**), de modo que os

pratos fiquem em equilíbrio. Como apresentado na Figura 4, temos três relações de igualdade equivalentes entre si. Em cada uma delas, há uma equivalência entre os objetos em ambos os membros da igualdade. Nesse exemplo, partindo das situações 1 e 2, chegamos à conclusão.

Figura 4: Exemplos de t_1 com o uso do EIB no modo *básico*



Fonte: Adaptada pelos autores a partir da plataforma PhET

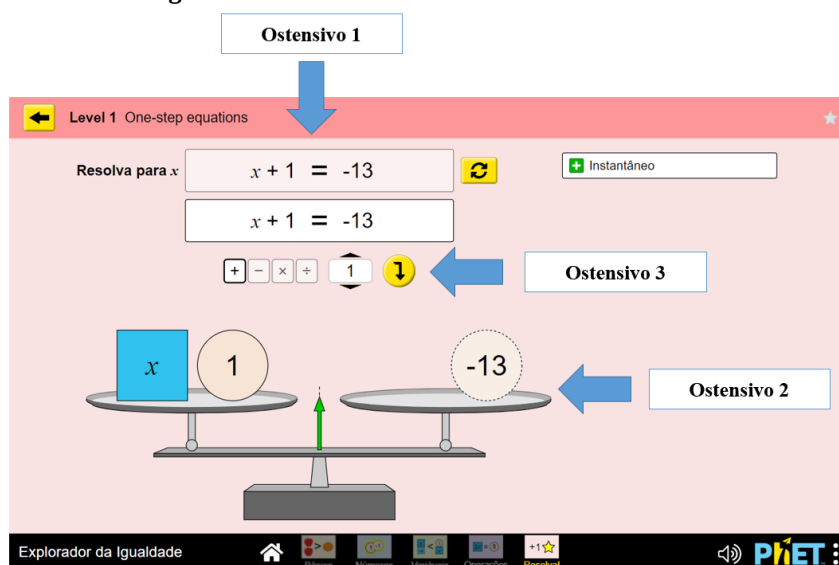
Mediante ilustrações como essa, espera-se que os alunos percebam por meio de diversas situações propostas, as propriedades matemáticas subjacentes e consigam generalizar algebricamente. Por motivo de brevidade, não elencamos o detalhamento de cada tarefa proposta no Quadro 1. Apesar disso, reconhecemos que outras simulações podem ser realizadas no mesmo segmento.

No bloco técnico-prático, destacamos seis tarefas e seis técnicas que, por sua vez, são justificadas por cinco tecnologias. Certamente, não esgotamos as possibilidades de criar outros tipos de tarefas com o *Explorador da Igualdade: Básico*.

4.2 Explorador da Igualdade

Como ilustrado na Figura 5, identificamos três tipos de ostensivos no modo *Resolva!* do *Explorador da Igualdade* (EI): O_1 — Equação polinomial do 1º grau em linguagem alfanumérica; O_2 — Balança de dois pratos como uma metáfora da equação polinomial do 1º grau; e O_3 — Operadores para resolver a equação polinomial do 1º grau.

Figura 5: Ostensivos da tela do EI no modo *Resolva!*



Fonte: Adaptada pelos autores a partir da plataforma PhET

Diferentemente do EIB, o EI já apresenta as equações polinomiais do 1º grau, por intermédio dos ostensivos O_1 e O_2 , quando o usuário abre um determinado nível na seção *Resolva!*, enquanto O_3 precisa ser manuseado pelo usuário para resolver a situação problema proposta em O_1 e O_2 .

Para a determinação das subtarefas referentes a esse recurso digital, recorremos aos resultados da tese produzida por Araújo (2009) que versa sobre o ensino de equações, alicerçada pela TAD.

No Quadro 2, dispomos alguns exemplos da tarefa T_1 — *Resolver equação polinomial do 1º grau com o uso do Explorador da Igualdade nos níveis 1, 2, 3, 4 e 5 da seção Resolva!* — no que tange aos subtipos: $t_{1.1}$ — *Resolver uma equação do tipo $ax + b = c$* e $t_{1.2}$ — *Resolver uma equação do tipo $a_1x + b_1 = a_2x + b_2$* (Araújo, 2009). Salientamos que o EI atualiza as equações a cada acesso, ou seja, são propostas várias situações. Tal fato inviabilizou quantificarmos todos os exemplos apresentados na plataforma.

Quadro 2: Exemplos de subtipos de tarefas identificadas no uso do *Explorador da Igualdade* na seção *Resolva!*

Níveis propostos na plataforma	Exemplos	Subtipos de tarefas
Nível 1 — Equações para resolver com, no mínimo, um passo	$10x = -180$	$t_{1.1}$
	$3 = x - 4$	
	$(1/9)x = -8$	
	$113 = x + 5$	
Nível 2 – Equações com coeficientes negativos para resolver com, no mínimo, um passo	$-x = 12$	
	$-(1/7)x = 4$	
	$4 = -(1/2)x$	
	$-130 = -5x$	
Nível 3 – Equações para resolver com, no mínimo, dois passos	$117 = 9x + 9$	
	$5x + 6 = -19$	
	$-216 = 10x - 6$	
	$-7x + 2 = 198$	
Nível 4 – Equações com frações para resolver com múltiplos passos	$(-2/7)x + 1 = 9/7$	
	$(3/10)x + 1/10 = 5/2$	
	$1 = (2/3)x + 5/3$	
	$-136/3 = (8/3)x - 8/3$	
Nível 5 – Equações com variáveis em ambos os lados para resolver com múltiplos passos	$7x + 2 = 6x - 23$	$t_{1.2}$
	$-3x - 101 = 6x - 5$	
	$7x - 8 = 5x - 14$	
	$-9x - 7 = -10x + 1$	

Fonte: Elaboração própria

Como disposto no Quadro 2, do nível 1 a 4, as tarefas referem-se ao subtipo $t_{1.1}$ e, no nível 5, as tarefas referem-se ao subtipo $t_{1.2}$. Para a resolução desses tipos de subtarefas, os alunos devem ser levados a mobilizar a técnica τ_{NTC} — *Neutralizar termos ou coeficientes* (NTC), que se caracteriza por isolar a incógnita, efetuando a mesma operação nos dois membros da equação (Araújo, 2009). Por conseguinte, a técnica τ_{NTC} é justificada pelas seguintes tecnologias:

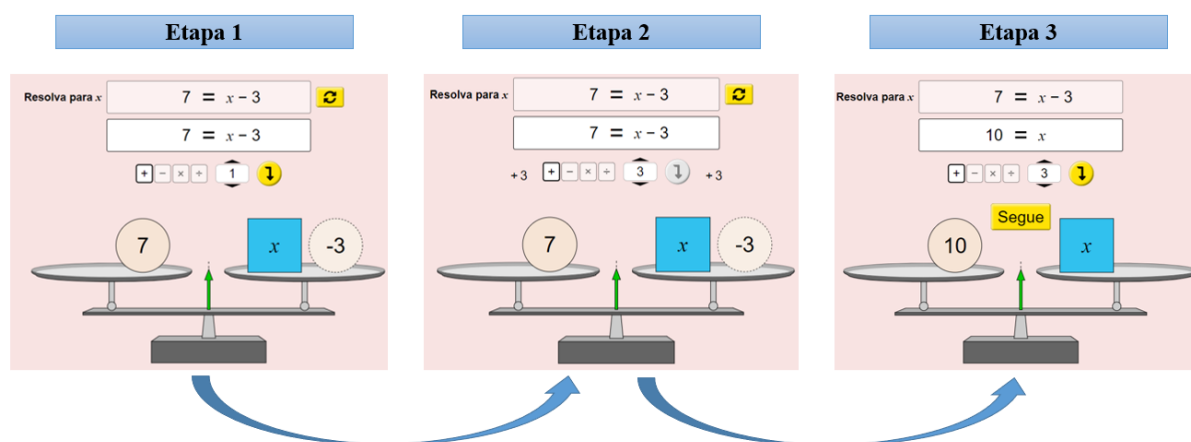
- Princípios de equivalência entre equações com as soluções ou raízes iguais (0_{PEE}):
 - Princípio aditivo: quando adicionamos (ou subtraímos) os dois membros de uma equação pela mesma quantidade, obtemos uma nova equação equivalente à primeira.
 - Princípio multiplicativo: quando multiplicamos (ou dividimos) os dois membros de

uma equação pela mesma quantidade (diferente de zero), obtemos uma nova equação equivalente à primeira (Araújo, 2009).

Pontuamos que a técnica τ_{NTC} para resolver os subtipos de tarefas $t_{1.1}$ e $t_{1.2}$ no uso do *Explorador da Igualdade* requer um detalhamento, principalmente se os alunos utilizarem apenas os ostensivos do recurso digital para solucionar a situação proposta. Reforçamos que é por meio do O_3 que os alunos podem aplicar τ_{NTC} .

Por motivo de brevidade, discutiremos adiante (ver Figura 6) um exemplo quanto ao subtipo de tarefa $t_{1.1}$, destacando o bloco prático-técnico $[T, \tau]$ e a tecnologia que identificamos por meio da manipulação do EI.

Figura 6: Exemplo do subtipo $t_{1.1}$ do EI no nível 1 da seção *Resolva!*



Fonte: Adaptada pelos autores a partir da plataforma PhET

Como supramencionado, ao abrir a tela no nível 1 do modo *Resolva!*, os alunos deparam-se com uma equação polinomial do 1º grau para resolvê-la com, no mínimo, um passo. No caso da Figura 6, para resolver a equação $7 = x - 3$ (apresentada na etapa 1, por meio de O_1 e O_2) em um passo, os alunos precisam neutralizar o termo -3 , com a finalidade de isolar a incógnita x . Para isso, eles devem efetuar a operação $+3$ nos dois membros da equação (proposta na etapa 2, por meio de O_3). Essa neutralização do termo é justificada pelo princípio aditivo de equivalência entre equações. Por último, obtém-se a solução da equação (ver etapa 3), que é $x = 10$.

Deve-se ainda notar que os operadores de O_3 pertencem ao conjunto $\{-10x, -10, -9x, -9, -8x, -8, -7x, -7, -6x, -6, -5x, -5, -4x, -4, -3x, -3, -2x, -2, -x, -1, 0, 1, x, 2, 2x, 3x, 4, 4x, 5, 6, 6x, 7, 7x, 8, 8x, 9, 9x, 10, 10x\}$ e, dependendo do termo da equação, os alunos precisam neutralizá-lo por partes. No caso mencionado anteriormente, o operador $+3$ pertence ao conjunto, o que permitiu solucionar a equação com apenas um passo. Então, embora o *Explorador da Igualdade* possa contribuir para o entendimento da igualdade enquanto uma equivalência usando O_3 — pois é necessário operar em ambos os lados das equações apresentadas na plataforma —, o conjunto dos operadores é restrito, prolongando os passos para resolver certas tarefas.

Outro fator limitante do recurso digital refere-se à técnica específica para resolver as tarefas na própria plataforma. Nesse sentido, outras técnicas comumente utilizadas pelos alunos — tais como: Teste de igualdade por tentativa e erro; e Transposição de termos ou coeficientes com operações inversas — podem ser mobilizadas a partir de outras abordagens didáticas, com o estímulo do uso de diferentes recursos, por exemplo, o lápis e o papel.

De modo geral, visando ampliar o estudo desse objeto matemático para o contexto do

uso de recursos digitais na Educação Matemática, assim como fizemos na subseção anterior, evocamos nesta subseção alguns elementos da praxeologia matemática no ensino de equações polinomiais do 1º grau, propostas na tese de Araújo (2009). Esse movimento nos permitiu constatar a possibilidade de dois subtipos de tarefas, cujas expressões de 1º grau são redutíveis à forma canônica. Essas subtarefas podem ser resolvidas com a técnica de neutralização de termos ou coeficientes (τ_{NTC}), justificada pelo princípio de equivalência entre equações (θ_{PEE}).

5 Considerações finais

Com o objetivo de analisar recursos digitais para o ensino e a aprendizagem de Matemática, apresentando a Teoria Antropológica do Didático como proposta metodológica, elencamos alguns exemplos para efeito de ilustração. Grosso modo, não esgotamos as discussões e reflexões acerca do uso dos recursos digitais *Explorador da Igualdade: Básico e Explorador da Igualdade*. Outras exemplificações podem ser encontradas nos trabalhos de Oliveira, Almeida e Espíndola (2021) e Almeida, Espíndola e Oliveira (2022).

Neste artigo, estabelecemos relações pessoais com os recursos digitais ao nos debruçarmos sobre conceitos de ostensivo e praxeologia matemática, preconizados na Teoria Antropológica do Didático. Tal articulação conceitual proporcionou-nos constatar a necessidade do trabalho simultâneo com os ostensivos dos recursos digitais como uma possibilidade de desenvolver a compreensão acerca do saber matemático em cena, por meio da praxeologia matemática, considerando o bloco prático-técnico e a tecnologia.

Acreditamos que outros aspectos dos recursos digitais podem ser investigados com base na TAD. Quanto à implementação desses recursos em sala de aula, o pesquisador pode buscar analisar as relações pessoais que os professores e alunos possuem com esses recursos digitais. No que concerne às demandas curriculares do sistema escolar de cada contexto sociocultural, podem-se investigar as relações institucionais estabelecidas pelos documentos normativos sobre os saberes matemáticos em jogo e a integração dos recursos digitais no ensino de Matemática a fim de compreender como eles podem ser explorados a partir de tais perspectivas.

Portanto, consideramos que não concluímos as possibilidades metodológicas de analisar sistematicamente os recursos digitais, tomando como pressuposto teórico a TAD. Além disso, acreditamos que outras teorias podem ser agregadas à análise de recursos digitais com fins didáticos.

Agradecimentos

Este artigo resulta de um projeto de pesquisa intitulado “Do cálculo do termo desconhecido à equação do 1º grau: recursos para o estudo de relações e propriedades de igualdade no Ensino Fundamental”, financiado pela Fundação de Amparo à Ciência e Tecnologia do Estado de Pernambuco (FACEPE) e desenvolvido no âmbito do grupo de pesquisa LCAPE — Laboratório Científico de Aprendizagem, Pesquisa e Ensino (certificado pelo CNPq e vinculado à UFRPE).

Referências

- Adler, J. (2000). Conceptualising resources as a theme for teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 3(3), 205-224.
- Almeida, M. S.; Espíndola, E. B. M. & Oliveira, M. E. N. (2022). Equações do 1º grau: uma análise das organizações matemáticas identificadas no explorador da igualdade. In *Anais do VIII Encontro Pernambucano de Educação Matemática*, Caruaru, PE.

- Almouloud, S. A. (2015). Teoria Antropológica do Didático: metodologia de análise de materiais didáticos. *UNION-Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 11(42), 9-34.
- Almouloud, S. A. (2007). A teoria antropológica do didático. *Fundamentos da didática da matemática*. (Cap. VII, pp. 111-128). Curitiba, PR: Ed. UFPR.
- Araújo, A. J. (2009). *O ensino de álgebra no Brasil e na França: estudo sobre o ensino de equações do 1º grau à luz da teoria antropológica do didático* (Tese de Doutorado). Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE.
- Bailey, K. (1994). *Methods of Social Research*, Fourth Edition, New York: The Free Press.
- Barbosa, E. J. T. (2017). *Praxeologia do professor: análise comparativa com os documentos oficiais e do livro didático no ensino de equações polinomiais do primeiro grau* (Tese de Doutorado). Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, PE.
- Barbosa, E. J. T. & Lima, A. P. A. B. (2019). Praxeologias do Professor: análise comparativa do livro didático no ensino de equações polinomiais do primeiro grau. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 33(65), 1357-1378.
- Bittar, M. (2022). A methodological proposal for textbook analysis. *The Mathematics Enthusiast*, 19(2), 307-340.
- Bittar, M. (2017). A Teoria Antropológica do Didático como ferramenta metodológica para análise de livros didáticos. *Zetetiké*, 25(3), 364-387.
- Bosch, M. (2015). Doing research within the anthropological theory of the didactic: the case of school algebra. In: *Selected regular lectures from the 12th international congress on mathematical education* (pp. 51-69). Clam: Springer International Publishing.
- Bosch, M. & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs: objet d'étude et problématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, 19(1), 77-24.
- Bosch, M. & Gascón, J. (2014). Introduction to the Anthropological Theory of the Didactic (ATD). In: A. Bikner-Ahsbahs & S. Prediger (Eds.), *Networking of theories as a research practice in mathematics education*, (pp. 67-83). Clam, Switzerland: Springer.
- Brasil. (2018). *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: Ministério da Educação, DF.
- Chevallard, Y. (2019). Introducing the anthropological theory of the didactic: An attempt at a principled approach. *Hiroshima journal of mathematics education*, 12(1), 71-114.
- Chevallard, Y. (2018). A teoria antropológica do didático face ao professor de matemática. In: S. A. Almouloud, L. M. S. Farias & A. Henriques (Eds.). *A teoria antropológica do didático: princípios e fundamentos*. (1ª ed., pp. 31-50). Curitiba, PR: CVR.
- Chevallard, Y. (1999). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: L'approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.
- Chevallard, Y. (1996). Conceitos Fundamentais da Didática: as perspectivas trazidas por uma abordagem antropológica. In: Brun, J. (Ed.). *Didáctica Das Matemáticas*. Tradução de M. J. Figueredo. (pp. 115-153). Lisboa: Instituto Piaget.
- Chevallard, Y.; Bosch, M. & Kim, S. (2015, February). What is a theory according to the anthropological theory of the didactic?. In *CERME 9-Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2614-2620).

- Grando, R. C. (2015). Recursos didáticos na Educação Matemática: jogos e materiais manipulativos. *Revista Eletrônica Sala de Aula em Foco*, 5(2), 393-416.
- Gueudet, G. & Trouche, L. (2009). Towards new documentation systems for mathematics teachers?. *Educational studies in mathematics*, 71(3), 199-218.
- Kaspary, D. & Bittar, M. (2018). Ostensivos como ingrediente primário do estudo da evolução praxeológica. In: S. A. Almouloud, L. M. S. Farias & A. Henriques (Eds.). *A teoria antropológica do didático: princípios e fundamentos*. (1ª ed., pp. 395-410). Curitiba, PR: CVR.
- Miranda, H., & Adler, J. (2010). Re-sourcing mathematics teaching through professional development. *Pythagoras*, 2010(72), 14-26.
- Mogalakwe, M. (2006). The use of documentary research methods in social research. *African Sociological Review/Revue Africaine De Sociologie*, 10(1), 221-230.
- Oliveira, M. E. N.; Almeida, M. S. & Espíndola, E. B. M. (2021). Praxeologias Matemáticas: relações de igualdade e princípios de equivalência a partir do explorador básico de igualdade da plataforma digital PhET. In *Anais do XIV Encontro Gaúcho de Educação Matemática*, Pelotas, RS.
- Patton, M. Q. (2005). Qualitative research. *Encyclopedia of statistics in behavioral Science*.
- Payne, G. & Payne, J. (2004). *Key Concepts in Social Research*. London: Sage Publications.
- Pernambuco. (2019). *Currículo de Pernambuco: Ensino Fundamental*. Recife: Secretaria de Educação de Pernambuco, PE.
- Trouche, L.; Gueudet, G. & Pepin, B. (2020). Documentational approach to didactics. In *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 237-247). Cham: Springer International Publishing.
- Universidade do Colorado Boulder. (2022). *Physics Education Technology – PhET Interactive Simulations*. Recuperado de <https://phet.colorado.edu/>