Sociedade Brasileira de Educação Matemática

RIPEM

Applets na aprendizagem de frações: um olhar para o ensino remoto emergencial a partir da gênese instrumental

Vania Sara Doneda de Oliveira
Secretaria de Estado de Educação do Paraná
Campo Mourão, PR — Brasil
vania.oliveira28@escola.pr.gov.br
0000-0001-5229-1880

Maria Ivete Basniak
Universidade Estadual do Paraná
Campo Mourão, PR — Brasil
basniak2000@yahoo.com.br
0000-0001-5172-981X

2238-0345

10.37001/ripem.v13i3.3539

Recebido • 21/02/2023
Aprovado • 28/03/2023
Publicado • 10/09/2023

Editor • Gilberto Januario

Resumo: Este artigo investiga as contribuições dos *applets* Barras Cuisenaire, Quadriláteros e Fraction Models na aprendizagem de frações na perspectiva da medição em aulas assentes no Ensino Exploratório de Matemática desenvolvidas no Ensino Remoto de Emergência. Trata-se de uma pesquisa qualitativa de cunho interpretativo, realizada com alunos de duas turmas do 6º ano do Ensino Fundamental. O *applet* Barras Cuisenaire permitiu, aos alunos, mobilizar estratégias para realizar comparações multiplicativas entre as barras e estabelecer equivalência de frações, compreendendo a representação simbólica e a sinalização de magnitude numérica; o *applet* Quadriláteros realizar a medição dos quadriláteros (lados, perímetros e áreas) e; o *applet* Fraction Models validar ou não a mesma magnitude das representações fracionárias e decimais. A associação dos três *applets* favoreceu que os alunos compreendessem a propriedade produto que, ao multiplicar duas frações diferentes de zero e um, o resultado da multiplicação pode ser menor do que um dos dois fatores.

Palavras-chave: Frações como Medida. Ensino Exploratório de Matemática. Instrumentalização. Instrumentação. Números Racionais.

Applets in learning fractions: a look from instrumental genesis to emergency remote teaching

Abstract: This article investigates contributions by the *applets Barras Cuisenaire*, *Quadriláteros* and *Fraction Models* for learning fractions from the perspective of measurement in classes based on Exploratory Mathematics Teaching developed during the Emergency Remote Teaching. It is about a qualitative interpretative research was performed with students of 6th grade groups of Elementary School. The *applet Barras Cuisenaire* allowed students mobilize strategies to carry out multiplicative comparisons among the *rods* and establish equivalence of fractions understanding symbolic representation and numerical magnitude signaling; the *applet Quadriláteros* performing quadrilateral measurement (sides, perimeters, and areas), and; the *applet Fraction Models* they validate or not the same magnitude of fractional and decimal representations. Associating the three *applets* favored students to understand the product property, which when multiplying two fractions different from zero and one, multiplication result may be less than one of the two factors.

Keywords: Fractions as Measure. Exploratory Mathematics Teaching. Instrumentalization. Instrumentation. Rational Numbers.

Applets en el aprendizaje de fracciones: una mirada a la enseñanza remota de emergencia desde la génesis instrumental

Resumen: Este artículo investiga las contribuciones de los *applets* denominados barras Cuisenaire, cuadriláteros y modelos de fracciones en el aprendizaje de fracciones desde la perspectiva de la medición en las clases a partir de la enseñanza exploratoria de las Matemáticas desarrollada en la enseñanza remota de emergencia. Se trata de una investigación cualitativa interpretativa, realizada con estudiantes de dos secciones del 6° grado de la Educación básica. El *applet* barras Cuisenaire permitió a los estudiantes movilizar estrategias para realizar comparaciones multiplicativas entre barras y establecer equivalencias de fracciones, incluyendo representación simbólica y señalización de magnitud numérica; el *applet* cuadriláteros permitió realizar la medición de los cuadriláteros (lados, perímetros y áreas) y; el *applet* modelos de fracciones permitió la validación o no las magnitudes de representaciones fraccionarias y decimales. La asociación de los tres *applets* ayudó a los estudiantes a comprender la propiedad del producto que indica que al multiplicar dos fracciones distintas de cero y uno, el resultado de la multiplicación puede ser menor que uno de los factores.

Palabras clave: Fracciones como Medida. Enseñanza Exploratoria de las Matemáticas. Instrumentalización. Instrumentación. Números Racionales.

1 Introdução

Em nossa prática docente, identificamos a nossa dificuldade em ensinar e, consequentemente, dos alunos em compreenderem os números racionais como campo diverso dos números naturais. Esta dificuldade é saliente quando, por exemplo, adicionam frações de numeradores diferentes somando seus numeradores e denominadores, e pode estar associada ao ensino de frações centrado na perspectiva parte-todo (Escolano & Gairín, 2005; Lamon, 2012). Com uma perspectiva diferente para o ensino de frações, Powell (2018; 2019a) utiliza as *Barras Cuisenaire* físicas para que os alunos possam progredir das frações não-simbólicas para as simbólicas, sob a perspectiva da medição.

Compreendemos a tecnologia como produção humana (Vieira Pinto, 2005) que está inserida no cotidiano das pessoas para atividades vinculadas à comunicação pessoal e/ou situações de trabalho, e admitimos Tecnologias Digitais (TD) como "um conjunto de tecnologias que permite, principalmente, a transformação de qualquer linguagem ou dado em números, isto é, em zeros e uns (0 e 1)" (Ceale, 2014, n.p.). Assim, neste trabalho, adotamos o termo TD para nos referirmos aos artefatos que utilizam tecnologia digital em seu processo de desenvolvimento, como computador, *tablet*, celular, internet, *software*s, objetos de aprendizagem, *applets*[1], entre outros.

Neste sentido, a Gênese Instrumental (GI) de Rabardel (1999) como lente teórica-metodológica nos permitiu compreender esquemas desenvolvidos pelos alunos no uso dos *applets* e consequentemente, para a resolução das tarefas, elucidando como acontecem as mobilizações complexas do pensamento quando o artefato é transformado em instrumento. Bittar (2011, p. 169) afirma que "é importante destacar que esta abordagem teórica pode ser, e é utilizada para investigar a aprendizagem com instrumentos, ou seja, para estudar como o aluno aprende na presença de instrumentos". Assim, o GI permitiu compreender e analisar como o uso de artefatos está associado ao conhecimento utilizado pelos alunos para realizar determinada tarefa.

[1] Consideramos um *applet* uma aplicação que é executada dentro de um *site* ou programa maior e que não necessita de instalação no artefato utilizado como, por exemplo, animações, simuladores, jogos, entre outros.

Especialmente no momento em que o mundo foi assolado pela pandemia causada pela doença COVID-19 e o Ensino Remoto de Emergência (ERE) tornou-se uma realidade, discutir tecnologia no espaço escolar, ou permeando esse espaço, não é uma opção, mas uma necessidade. As instituições de ensino precisaram se adaptar de forma emergencial ao novo contexto. Isto levou à adoção forçada de TD para práticas de ERE que ocorreram sem nenhum planejamento (Moreira, Henriques & Barros, 2020). Desta forma, o ERE "ganhou protagonismo em um momento de crise, colocando os docentes frente aos desafios de construir novas formas de ensinar-aprender, ressignificando suas práticas pedagógicas" (Valente, Moraes, Sanchez, Souza & Pacheco, 2020, p. 10).

Compreendemos que, no ERE, a TD é utilizada como meio de acesso, e sem ela não há ERE. Entretanto as metodologias de ensino utilizadas por muitos professores no contexto do ERE apenas corroboraram práticas tradicionais de ensino (Moreira *et al*., 2020; Valente *et al*, 2020). Apesar disso, consideramos ser necessário e possível incorporar, mesmo no ERE, novas metodologias de ensino que sirvam de mediação entre as representações, conceitos e relações matemáticas. Assim, investigamos as contribuições dos *applets Barras Cuisenaire*, *Quadriláteros* e *Fraction Models* na aprendizagem de frações na perspectiva da medição em aulas assentes no Ensino Exploratório de Matemática (EEM) desenvolvidas no ERE. Trocar o cenário de lápis e papel para simuladores, *software*s de geometria dinâmica, entre outros, além de acelerar o processo de visualização das representações, conceitos e relações matemáticas, possibilita construir, desconstruir e reconstruir tais representações de forma dinâmica.

As frações não possuem uma definição ou concepção única, mas assumem diferentes interpretações, sendo um emaranhado de ideias com múltiplos significados, se articulando individualmente e entre si, dentre as quais destacam-se: parte-todo, razão, operador, quociente e medida e operador (Kieren, 1976; 1980; Behr, Lesh, Post & Silver, 1983; Escolano & Gairín, 2005; Lamon, 2012). Acreditamos que o ensino de frações deve considerar essas diferentes interpretações como discutimos brevemente na subseção que segue.

2 Introdução ao ensino de frações

Segundo Kieren (1976; 1980), Behr *et al. (*1983) e Lamon (2012), a compreensão do conceito de frações é fundamental para o desempenho matemático dos alunos, além de ser essencial em outros conteúdos da Matemática, como Álgebra (Bailey, Hoard, Nugent & Geary, 2012; Torbeyns, Schneider, Xin, & Siegler, 2015; Powell, 2018; 2019a). Ademais, Kieren (1976; 1980), Behr *et al*. (1983) e Lamon (2012) sublinham a necessidade de que os alunos sejam apresentados a diferentes interpretações de números racionais (Kieren, 1980).

Behr *et al*. (1983, p. 91), afirmam que "os conceitos de número racional estão entre as ideias matemáticas mais complexas e importantes que as crianças encontram durante o Ensino Fundamental". Embora Behr *et al*. (1983) acreditem que a interpretação parte-todo é fundamental para o conceito de número racional e o considerem importante para o ensino das demais interpretações, professores e autores de livros didáticos parecem utilizar essa interpretação como definição de fração. Lamon (2012) critica essa abordagem, salientando que a palavra *fração* não remete unicamente à interpretação parte-todo, o que gera obstáculos à compreensão dos números racionais:

> [...] a restrição da instrução à interpretação de parte-todo deixou os alunos com uma noção empobrecida dos números racionais, e cada vez mais os professores estão se tornando conscientes das interpretações alternativas, e referindo-se a elas como *operador*, *medida*, *proporção* e *quociente*. As comparações parte-todo estão em pé de igualdade com as outras interpretações e não merecem mais a distinção de serem

sinônimos de *frações*. (p. 23, grifos do autor)

Escolano e Gairín (2005) e Lamon (2012) alertam que a introdução ao conceito de número racional pela interpretação parte-todo conduz a obstáculos epistemológicos, devido à necessidade de realizar uma dupla contagem (do todo e das partes tomadas) utilizando os princípios dos números naturais. Ainda segundo esses autores, são os fins didáticos que justificam a introdução ao estudo de frações por essa interpretação, porque permite que os alunos consigam manipular rapidamente as representações fracionárias/símbolos, sem compreender sua densidade fracionária e magnitude numérica, que estão associadas à ideia de medida.

Portanto, assim como Powell, acreditamos que a introdução do ensino de frações deve ser realizada com a interpretação das frações como medida, visto que essa relação de comparação multiplicativa entre quantidades vai ao encontro do surgimento histórico das frações (Powell, 2018; 2019a; Roque, 2012), e assim, favorecem que os alunos percebam a necessidade de um novo campo numérico, os números racionais. Como citado anteriormente, em seus estudos, Powell (2018; 2019a) utiliza as *Barras Cuisenaire* físicas em suas pesquisas sobre o ensino de frações na perspectiva da medição.

Buscamos considerar essas questões em nossos estudos, que são permeadas por nuances do contexto em que a pesquisa se desenvolveu, as quais apresentamos na seção que segue.

3 Caracterização da pesquisa e coleta de dados

Trata-se de uma pesquisa qualitativa de cunho interpretativo, cujos dados empíricos foram coletados entre os meses de setembro e outubro de 2020, em duas turmas do 6º Ano do Ensino Fundamental. A primeira autora foi a professora de matemática em 2020. Em meados de agosto, foi enviado um formulário elaborado pela professora-pesquisadora solicitando informações sobre dias e horários para aulas síncronas (*lives*), tipo de dispositivo disponível (computador, *notebook*, celular) e tipo de conexão com internet (*wi-fi* ou dados móveis). Do total de setenta e um (71) alunos, trinta (30) retornaram o formulário e os termos de assentimento e consentimento da pesquisa preenchidos.

Para nossa investigação, estruturamos aulas assentes no EEM para serem desenvolvidas no ERE, para as quais planejamos e elaboramos quatro tarefas de natureza exploratória. Para cada tarefa, foi proposto um ou mais *applets* com intuito de favorecer a compreensão dos alunos sobre frações como medida, e que eles identificassem as diferenças entre as propriedades dos números naturais e números fracionários, como *sinalização de magnitude numérica* (algarismos maiores na fração não determinam a magnitude da fração); *representação simbólica* (há uma infinidade de representações fracionárias para uma mesma magnitude); *densidade* (número fracionário não possui antecessor ou sucessor imediato); e *produto* (multiplicar duas frações diferentes de 1 ou 0 entre si pode produzir um produto menor que um dos dois fatores) (Obersteiner, Dresler, Bieck & Moeller, 2019).

3.1 Organização e caracterização dos alunos e dos recursos disponíveis para o ERE

Os alunos que participaram da pesquisa são identificados por pseudônimos escolhidos por eles, conforme termos de assentimento e consentimento assinados. Na primeira coluna do Quadro 1, identificamos os grupos pela letra G e numeração sequencial. Na segunda coluna, ao lado do pseudônimo, identificamos o(s) equipamento(s) que dispunham para o ERE. Quanto ao tipo de conexão, apenas Boom, Flora e Maluquinha, todas do G3, tinham disponíveis apenas dados móveis. Todos os demais alunos tinham acesso à internet banda larga. Na terceira coluna informamos os dias e horários das *lives*.

Quadro 1: Organização dos encontros semanais

Grupos	Participantes e Artefatos Disponíveis	*Lives*
G1	Docinho (celular), Doguinha (*notebook* e celular), Florzinha (celular), Fofinha (celular), Lindinha (celular) e Thor (computador sem som e celular).	Terças-feiras às 8h
G3	Boom (celular), Flora (celular), Maluquinha (celular), Mazarect (*notebook*) e Olívia (computador).	Terças-feiras às 18h30min
G4	Anubis (*notebook* e celular), Bob (celular), Fifo (celular), Magrão (computador e celular), Spider-man (celular) e Ymercurius (computador e celular).	Quartas-feiras às 10h
G5	Luffy (computador e celular), Mulher Maravilha (celular), Poster (*notebook* e celular), Viúva Negra (celular), Zorro (celular).	Quartas-feiras às 14h40min
Todos os alunos das duas turmas de sexto ano, participantes e não participantes da pesquisa, que tivessem possibilidade de participar.		Sextas-feiras às 14h40min

Fonte: Dados da pesquisa (2020)

Desta forma, cada aluno deveria participar de duas (2) *lives* por semana via *Google Meet*[2], e seus registros do desenvolvimento das tarefas e sistematizações das aprendizagens matemáticas seriam postados no *Google Classroom*[3].

3.2 O EEM e a organização das aulas no ERE

O EEM é uma abordagem exigente para alunos e professores. Estudos (Ponte, 2005; Oliveira, Menezes & Canavarro, 2013; Basniak & Estevam, 2018; 2019) discutem que tarefas de natureza exploratória instigam os alunos a elaborar e a discutir diferentes estratégias para sua resolução, incentivando a comunicação das ideias individuais e a construção de ideias coletivas, oportunizando a reflexão e análise de informações em um trabalho colaborativo para a construção de aprendizagens matemáticas e negociação de significados. Por isso, o EEM é apontado como alternativa ao ensino tradicional ou direto (Ponte, 2005), em que prevalece a máxima: professor explica o conteúdo, passa exemplos, alunos assimilam e reproduzem a aprendizagem com exercícios de fixação.

Canavarro, Oliveira e Menezes (2012) sugerem que as aulas no EEM sejam planejadas e desenvolvidas em fases, que Cyrino e Teixeira (2015) admitem ser quatro: *Introdução da tarefa*, *Realização da tarefa*, *Discussão coletiva da tarefa,* e *Sistematização das aprendizagens*.

A fim de garantir a negociação de significados, elaboração e reelaboração de ideias, conceitos e relações matemáticas, as aulas assentes no EEM no contexto do ERE necessitam das TD para que seja possível a resolução de tarefas em grupo de forma síncrona, e posteriormente realizadas as discussões e sistematização das aprendizagens matemáticas, com todos os grupos de alunos, também de forma síncrona. Portanto, a organização das aulas aconteceu de forma diferente no ERE. Seguimos as orientações de Oliveira e Basniak (2021),

[2] *Google Meet* é uma solução desenvolvida pela empresa *Google,* que oferece serviço de comunicação por videoconferência gratuito para até 250 pessoas para instituições educacionais.

[3] É um recurso da *Google* de gerenciamento de conteúdo para instituições educacionais. Possibilita a criação de salas de aulas virtuais que facilitam a comunicação, compartilhamento de atividades, conteúdos, trabalhos e avaliações. Outros recursos da *Google,* como *Google Meet*, *Google Drive*, *Jamboard*, entre outros podem ser utilizados dentro do *Google Classroom*.

que trazem quadros com as ações intencionais do professor na prática do EEM no ERE para cada uma de suas fases. Organizamos a realização de uma *live* para cada grupo de alunos para cada introdução e desenvolvimento da tarefa, e uma segunda *live* para cada discussão coletiva da tarefa e sistematização das aprendizagens matemáticas com todos os alunos.

Estruturamos para cada aula tarefas a serem desenvolvidas utilizando *applets* específicos, como explicamos na seção que segue.

3.3 As tarefas e os *applets* sugeridos

Neste artigo, discutimos o uso, pelos alunos, dos *applets*: *Barras Cuisenaire, Fraction Models* e *Quadriláteros.* Os grupos resolveram quatro (4) tarefas, e a Tarefa 2 e Tarefa 4[4] foram subdivididas em parte 1 e parte 2. Cada tarefa foi desenvolvida na perspectiva do EEM, e foram planejadas para que todas as fases sugeridas por Cyrino e Teixeira (2016) fossem realizadas dentro da mesma semana. No Quadro 2 identificamos cada uma dessas tarefas, os objetivos e os *applets* utilizados.

Quadro 2: As tarefas de natureza exploratória, objetivos e *applets* sugeridos

Tarefa	Objetivo(s)	*Applet(s)* Sugerido(s)
Tarefa 1: Qual o comprimento?	- Compreender fração como medida.	- *Barras Cuisenaire*
Tarefa 2: Medindo com *Barras Cuisenaire* (Parte 1)	- Compreender relações de equivalência e representá-las algebricamente; - Compreender equivalência de frações; e - Compreender a representação fracionária.	- *Barras Cuisenaire*
Tarefa 2: Medindo com *Barras Cuisenaire* (Parte 2)	- Comparar frações; e - Compreender a adição de frações de mesma unidade de medida.	- *Barras Cuisenaire*
Tarefa 3: Jogo do Trem	- Comparar frações; e - Compreender adição e subtração de frações de unidades de medidas diferentes.	- *Barras Cuisenaire*
Tarefa 4: Área e Perímetro de Quadriláteros (Parte 1 e 2)	- Compreender multiplicação de frações; - Associar a representação decimal à representação fracionária; - Relacionar a multiplicação de frações e decimais ao cálculo de área de quadriláteros; e - Compreender os números racionais como campo diverso dos números naturais.	- *Barras Cuisenaire;* - *Quadriláteros;* - *Fraction Models.*

Fonte: Elaboração própria

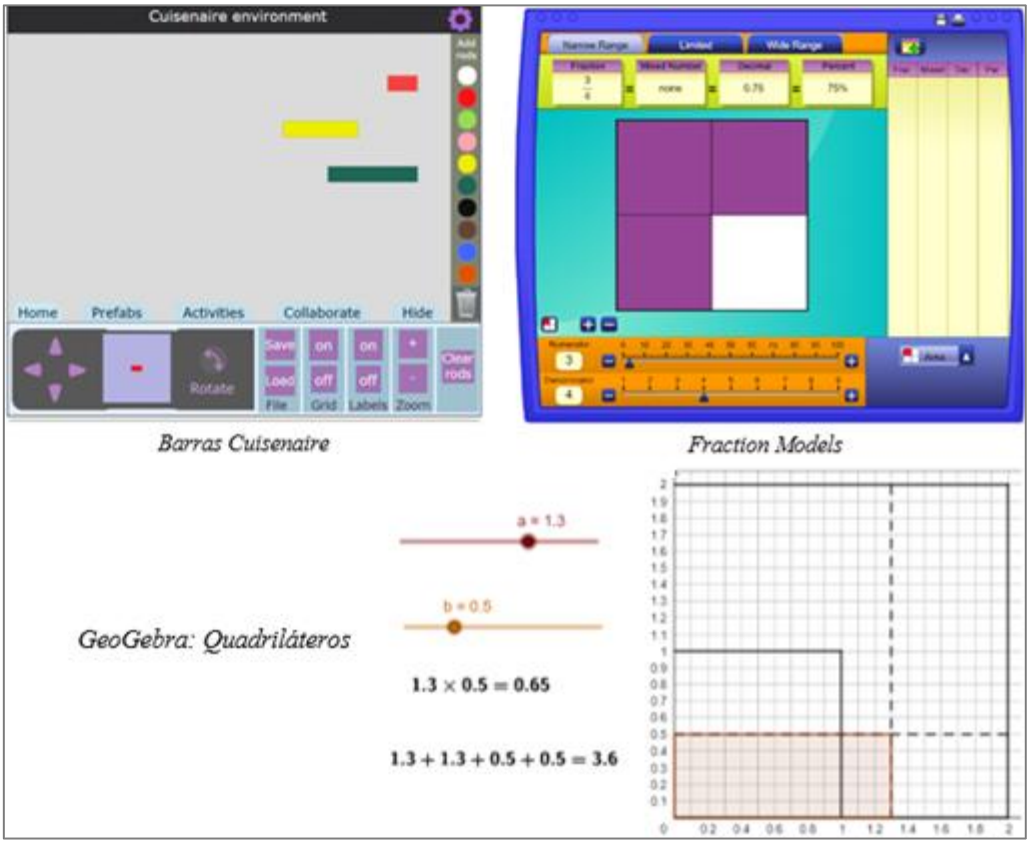
Para todas as tarefas sugerimos as *Barras Cuisenaire*, que apesar de não possuírem uma unidade de medida padronizada, como as barras físicas (centímetro), a barra branca pode ser tomada como referência para todas as demais barras: a barra vermelha mede duas brancas; a barra verde-clara, três brancas; e assim sucessivamente. Entretanto, como as barras não

[4] A Tarefa 4 foi planejada sem subdivisão, mas ao desenvolver as fases de *Introdução da Tarefa* e Realização da Tarefa com o G1, foi preciso subdividir, pois os alunos não conseguiram resolver toda a tarefa no tempo planejado. Desta forma, subdividimos a Tarefa 4 da seguinte forma: parte 1 com os itens *a* e *b*; e parte 2 com os itens *c* e *d*.

possuem um valor pré-estabelecido, a mesma barra pode assumir valores diferentes, dependendo da comparação realizada.

Para a Tarefa 4, sugerimos o *applet Quadriláteros*, no qual é possível construir quadrados e retângulos, alterando seu comprimento e largura ao mover o controle deslizante *a* e *b*, sendo possível visualizar, na tela, a área e o perímetro calculados. Também sugerimos o *applet Fraction Models,* no qual é possível escrever a representação fracionária na parte inferior do *applet* digitando no campo *Numerador* e *Denominador*; ou arrastando o indicador no valor desejado; ou ainda, clicando nos botões de menos ou mais, retornando, então, à representação pictórica, a forma mista da fração (caso tenha), a decimal e percentual. Na Figura 1 encontram-se os *applets* utilizados.

Figura 1: *Applets* utilizados no desenvolvimento das tarefas



Fonte: Dados da pesquisa (2020)

A GI nos forneceu subsídios para compreender a elaboração dos esquemas mentais no uso dos *applets* e a forma como os *applets* interferem no pensamento dos alunos e vice-versa, para a compreensão das frações como medida, como detalhamos, na seção que segue.

3.4 A Gênese Instrumental como lente teórica e metodológica

A GI, embasada na teoria da Ergonomia Cognitiva e nas ideias de Vygotsky, foi desenvolvida por Rabardel (1995) estudando a ação do sujeito mediada por um instrumento.

Esta perspectiva fundamenta-se no processo de transformação do artefato em instrumento, como uma construção intencional do sujeito que se apropria do artefato, e por meio do desenvolvimento de esquemas mentais de utilização, torna-o útil: constitui um instrumento, de acordo com os esquemas de utilização que atribui ao artefato.

Drijvers *et al*. (2010, p. 108) destacam que "Instrumento = Artefato + Esquemas e

Técnicas, para um determinado tipo de tarefa". Assim, o instrumento é mais que um artefato, sendo uma construção individual para cada pessoa, por meio de esquemas de utilização próprios (Rabardel, 1995; Bittar, 2011). Portanto, "o instrumento não é algo pronto e acabado; ele pode ser elaborado e reelaborado pelo sujeito ao longo das atividades realizadas com o artefato, agora um instrumento, uma vez que já sofreu a ação do sujeito" (Bittar, 2011, p. 162). Desta forma, o(s) esquema(s) de utilização associado(s) ao artefato pode(m) ser resultado(s) de "uma construção própria do sujeito, autonomamente ou através da apropriação de esquemas sociais pré-existentes" (Almeida & Oliveira, 2009, p. 88), sendo diferente para cada pessoa, pois "o instrumento como artefato é constituído no(s) uso(s) que o sujeito faz dele".

Além da distinção entre artefato e instrumento, as dimensões da instrumentalização e da instrumentação abordam a dupla relação entre sujeito e artefato. Enquanto na instrumentalização o sujeito se apropria do artefato e o adequa ao seu trabalho, na instrumentação as potencialidades e limitações do artefato colaboram para estruturar a atividade do sujeito (Rabardel, 1995; Almeida & Oliveira, 2009; Basniak & Estevam, 2019; Bueno & Basniak, 2020). Pensando nas TD que permeiam o processo de ensino e de aprendizagem, consideramos que, enquanto a instrumentação "refere-se à forma como o artefato afeta o comportamento e o pensamento do aluno", a instrumentalização "diz respeito à forma como o pensamento do aluno afeta o artefato" (Basniak & Estevam, 2019, p. 741). Assim,

> a gênese instrumental é um processo complexo que buscar a integração entre as características de artefato (potencialidade e limitações) e as atividades do sujeito. Este processo ocorre em duas direções: na direção interna do próprio sujeito, denominada instrumentação, e na direção externa, do artefato, denominada instrumentalização (Padilha & Bittar, 2013, p. 7).

Logo, para a análise dos dados sob a perspectiva da GI, consideramos:

- *Sujeito*: o aluno que, ao empregar esquemas individuais no artefato, transforma este artefato em instrumento único. Particularmente, dado o contexto de desenvolvimento da pesquisa, os artefatos/instrumentos, foco deste artigo, são os diretamente relacionados ao ensino e à aprendizagem de frações como medida: os *applet;*
- *Esquemas*: remetem ao "conjunto estruturado dos caracteres generalizáveis das atividades de utilização dos instrumentos" (Rabardel, 1999, p. 210);
- *Instrumento*: nasce da relação entre o sujeito e o objeto, em que o artefato somado ao(s) esquema(s) de utilização que esse sujeito emprega neste artefato, transforma-o em instrumento.

Explicitamos no Quadro 3 os descritores da instrumentação e instrumentalização associados aos *applets* relacionados ao nosso planejamento para o ensino de frações na perspectiva da medição.

Quadro 3: Elementos da GI, o sujeito e os *applets*

	Instrumentação	**Instrumentalização**
O sujeito	- Elabora ideias e/ou as generaliza a partir do que lê no *applet*; - Utiliza as ferramentas do *applet* para elaborar ideias e/ou generalizá-las;	- Compreende o funcionamento e manipula o *applet*; - Tem noção das possibilidades e limites do *applet*; - Consegue criar/adaptar o *applet* para resolver

	Instrumentação	Instrumentalização
	- Apropria-se das características e potencialidades do *applet* para realizar medições; e - Utiliza o *applet* para determinar e/ou comprovar frações equivalentes.	a tarefa; - Investiga os componentes e funcionalidades do *applet*; - Explora os recursos disponíveis no *applet*; e - Se apropria das características e potencialidades do *applet* para realizar a tarefa.
Barras Cuise-naire	- Realiza medições; - Estabelece relações comparativas; e - Estabelece relações de equivalência.	- Percebe barras sobrepostas; - Realiza comparações multiplicativas; - Utiliza as barras para elaborar ideias e/ou generalizá-las; e - Realiza comparações entre barras de mesma cor ou cores diferentes alinhadas lado-a-lado, e barras de mesma cor ou cores diferentes alinhadas abaixo.
Quadri-láteros	- Representa os quadriláteros solicitados; - Associa o comprimento e largura aos controles deslizantes; - Associa a representação decimal à fracionária; e - Identifica quando os quadriláteros não satisfazem as condições solicitadas.	- Move os controles deslizantes e observa as mudanças relacionadas ao comprimento, largura, área, perímetro e valores mostrados no *applet*; e - Utiliza o *applet* para encontrar/comprovar frações equivalentes.
Fraction Model	- Associa a representação decimal à representação fracionária; e - Faz uso de frações equivalentes.	- Altera numerador e denominador e observa as representações decimal, pictórica e percentual que o *applet* retorna; e - Compreende a unidade de medida escolhida.

Fonte: Elaboração própria

Reiteramos que esses descritores foram antecipados por nós a partir de nossa intenção com os *applets*. Na seção que segue, a partir da análise dos dados, identificamos aqueles que foram salientes durante as aulas.

4 Análise dos Dados

A fim de situar o leitor quanto ao uso dos *applets* pelos alunos, e o processo de GI ao longo das aulas, analisamos as resoluções e discussões das seguintes tarefas: Tarefas 1, por ser a primeira em que foram utilizadas as Barras Cuisenaire; Tarefa 3, dado o objetivo da tarefa, que exigia que os alunos compreendessem a magnitude de frações; e Tarefa 4, por utilizarmos outros *applets* além das Barras Cuisenaire. Para analisar a evolução dos alunos durante as tarefas, optamos por apresentar excertos de um mesmo grupo, o G1, por ter sido aquele que explicitou mais claramente suas dúvidas e (in)compreensões ao longo do desenvolvimento das tarefas. Cabe informar que, no momento de desenvolvimento da tarefa pelo grupo, muitas vezes a professora fechava a câmera e o áudio para que os alunos desenvolvessem um trabalho autônomo, e quando necessário, chamavam a professora pelo grupo de *WhatsApp*.

Para resolver a Tarefa 1, os alunos precisavam determinar o comprimento horizontal total da região do *applet* usando as barras, que inteiras, não completavam o comprimento.

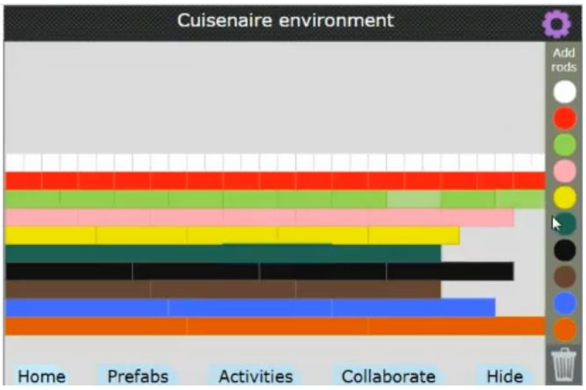
Quadro 4: Tarefa 1: *Qual o comprimento?*

Acessem o link https://nrich.maths.org/cuisenaire/responsive.html 1) Ao clicar nos círculos coloridos nas ferramentas à direita, aparecem barras de tamanhos e cores diferentes. Para selecionar a barra que irão utilizar cliquem na cor desejada. a) Utilizando barras da mesma cor, determinem qual o comprimento horizontal da região do *applet*. Façam isso para todas as cores. b) Vocês já perceberam que algumas cores de barras não completam o comprimento horizontal total da região do *applet*. Como vocês podem explicar aos colegas o comprimento horizontal total da região do *applet* usando essa barra (que não completa o comprimento) na explicação?

Fonte: Dados da pesquisa (2020)

Após ler a tarefa com os alunos, a professora perguntou quem poderia compartilhar a tela para a resolução da tarefa, e o grupo indicou o Thor. Ele alinhou todas as barras no *applet* conforme exposto na Figura 2.

Figura 2: Realização da Tarefa 1 pelo Grupo 1



Fonte: Dados da pesquisa (2020)

Qualquer uma das *Barras Cuisenaire* pode ser usada como referencial de unidade de medida, visto que não possuem um valor fixo de unidade. Assim, olhando para as barras dispostas (instrumentação), os alunos precisavam decidir (instrumentalizar) como fariam para responder à questão, estabelecendo como unidade de medida a cor utilizada para medir o comprimento horizontal do *applet*. Entretanto, inicialmente, passaram a usar aproximações/estimativas para as partes das barras que faltavam para completar o comprimento horizontal da região do *applet*, sem nomear as barras utilizando cores diferentes. Por exemplo, em relação à barra azul, concluíram que a medida do comprimento era de 3,30 barras azuis. Iniciou-se, então, uma discussão sobre como nomear o pedaço da barra azul que faltava para completar o comprimento horizontal do *applet*.

> Docinho: Ô professora! Então a gente pode colocar os bloquinhos brancos ali, e ver quanto que dá? [instrumentalização].
>
> Professora: Vocês sabem que são nove [barras] brancas para uma azul, certo? Vocês me falaram isso antes.
>
> Lindinha: Certo.
>
> Professora: Que uma azul são nove brancas. Mas, para completar aquele pedaço, quantas branquinhas completam [...]?

Docinho: Três. Completam três, professora.

Professora: Coloque as branquinhas lá [instrumentação]. Vocês enxergam que são três que faltam. Só que, na tarefa, não fala que pode completar com três brancas, você tem que falar em azul. Que pedaço é esse, que medida que é essa em relação à azul?

Docinho: Professora, assim, se fosse medir a azul contando com as brancas ali, daria três quadradinhos.

Professora: Então é três o quê?

Docinho: Três e trinta.

Professora: Três o quê?

Thor: [digita no chat da reunião] nonos.

Professora: Thor digitou lá.

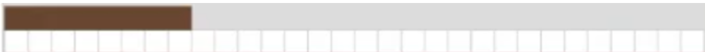
Docinho: Três nonos.

Tarefa 1 – G1. Realização da Tarefa, 15/09/2020

A partir dos questionamentos da professora, os alunos usaram a barra branca como unidade de medida e passaram a realizar comparações multiplicativas entre as barras, utilizando o *applet* para validar as ideias iniciais.

Para a barra marrom, optaram por alinhá-la acima das barras brancas e, ao comparar o que o *applet* retornou (instrumentação), concluíram que a barra marrom media oito (8) barras brancas (Figura 3).

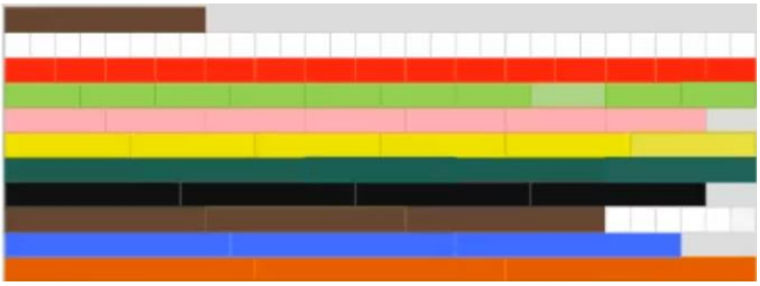
Figura 3: Realização da Tarefa 1 pelo Grupo 1



Fonte: Dados da pesquisa (2020)

Doguinha equivocou-se ao nomear a parte que faltava para completar o comprimento horizontal de $\frac{3}{8}$. Thor, percebendo isso, começou a dispor seis (6) barras brancas no espaço que faltava para completar o comprimento horizontal do *applet* (instrumentalização), alinhadas com a barra marrom (entre as barras azuis e pretas), conforme a Figura 4.

Figura 4: Realização da Tarefa 1 pelo Grupo 1



Fonte: Dados da pesquisa (2020)

Doguinha: A marrom é três oitavos.

Thor: [Escreve no chat da reunião depois de dispor as barras brancas ao lado direito das barras marrons] 6 oitavos.

[...]

Docinho: Para completar ali, faltam seis barras brancas, e não três. Igual ao que o Thor colocou ali, então são seis oitavos.

Lindinha: Ah, tá, então vão ser três barras [inteiras] e seis oitavos.

Tarefa 1 – G1. Realização da Tarefa, 15/09/2020.

Thor, não podendo justificar suas ideias falando, utilizou o *applet*, mobilizando uma estratégia de resolução (completar o pedaço que faltava das barras marrons utilizando as brancas como unidade de medida), e depois ele escreveu no *chat 6 oitavos*. O artefato (*applet*) foi transformado em instrumento por meio da estratégia de comparação, e a instrumentalização foi identificada quando Thor encontrou uma estratégia utilizando o artefato para comprovar/demonstrar sua ideia para os colegas. Para as demais barras que não completavam o comprimento horizontal, Thor, a pedido dos colegas, completou com barras brancas os comprimentos das barras rosas, pretas e azuis, conseguindo medir esses *pedaços*.

A Tarefa 3 teve início com o *jogo do trem* (Quadro 5).

Quadro 5: Tarefa 3: *Jogo do Trem*

Acessem o link https://nrich.maths.org/cuisenaire/responsive.html

3) Vamos fazer o jogo do trem. Chamaremos de *vagão* cada barra e de *trem* o alinhamento horizontal de um ou mais *vagões*.

Para isso cada grupo deve se dividir em duplas ou jogam dois e um espera, para jogar na próxima rodada. Cada dupla ou jogador escolhe um vagão. O jogo do trem funciona assim:

- Cada dupla ou jogador só utilizará o vagão escolhido para jogar, ou seja, sempre a barra de mesma cor.
- O vagão escolhido por cada jogador (ou dupla) serão colocados alinhados verticalmente na tela.
- Inicia o jogo quem escolher o vagão mais curto.
- Joga sempre quem tem o trem mais curto, até que fique com o trem maior que adversário.
- O jogo acaba quando os trens ficarem do mesmo tamanho.
- Ganha o jogo a dupla ou jogador que colocar o último vagão.

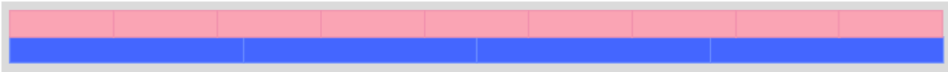
Após jogarem algumas vezes respondam:

a) Qual(is) a(s) melhor(es) estratégia(s) para ganhar o jogo? Após a finalização de uma rodada do jogo, considerando cada um dos trens separadamente, escreva a fração que o vagão de cada trem representa em relação ao seu trem inteiro.
b) Observando as frações escritas no item a, construam trens do mesmo tamanho de cada vagão de cada um dos jogadores. Mas há uma condição: os trens devem ser da mesma cor. Escrevam as frações equivalentes, respectivas aos trens e vagões.
c) Considerando as frações que o vagão de cada trem representa em relação ao seu trem inteiro do item a, qual dessas duas frações é maior?
d) Considerando as frações que o vagão de cada trem representa em relação ao seu trem inteiro do item a, qual o resultado da soma dessas frações? Expliquem representando com as barras Cuisenaire.
e) Considerando as frações que o vagão de cada trem representa em relação ao seu trem inteiro do item a, qual o resultado da subtração da fração maior menos a fração menor? Expliquem representando com as barras Cuisenaire.

Fonte: Dados da pesquisa (2020)

Esse jogo utiliza as *Barras Cuisenaire* e pode ser jogado individualmente ou em duplas, de forma que cada jogador ou dupla escolhe apenas uma cor de barra para jogar, conforme regras citadas na Tarefa 3 (Quadro 5). Após algumas rodadas do jogo, os alunos deveriam escolher uma delas e registrar no caderno ou arquivo a fração que o vagão de cada trem representava em relação ao seu trem inteiro. O G1 escolheu a rodada abaixo (Figura 5).

Figura 5: Realização da Tarefa 3 pelo Grupo 1



Fonte: Dados da pesquisa (2020)

O G1 identificou corretamente as frações como a representação de $\frac{1}{4}$ para o vagão azul e $\frac{1}{9}$ para o rosa. Ao comparar essas frações, para determinar qual das frações era maior, Docinho, depois de ter anunciado que $\frac{1}{4}$ era maior que $\frac{1}{9}$, voltou atrás e disse que não achava que isso estava certo, que ela acreditava ser ao contrário. Frente ao questionamento da professora sobre sua dúvida, Lindinha explicou, como pode ser lido no excerto a seguir, que Docinho estava comparando apenas os denominadores da fração.

> Professora: Mas o que você está vendo, Docinho? Você está vendo que a azul é maior. Por que você não está entendendo que a fração da azul é maior?
>
> Lindinha: Professora, ela está dizendo que o 1/9 é maior que 1/4 porque o 9 é maior que o 4.
>
> Tarefa 3 – G1. Realização da Tarefa, 15/09/2020.

Apesar de ver que barra azul $\frac{1}{4}$ era maior que a rosa $\frac{1}{9}$, a aluna não havia compreendido a propriedade de *sinalização de magnitude numérica* da fração, e assim, não conseguia compreender que a fração $\frac{1}{4}$ é maior que $\frac{1}{9}$, pois o número 9 é maior que o número 4 no conjunto dos números naturais. Frente ao exposto por Lindinha, Docinho afirmou que não se deve comparar as frações pelos números (referindo-se ao denominador), mas pelas *Barras Cuisenaire.* A professora precisou intervir, explicando que as *Barras Cuisenaire* e suas respectivas frações representam a mesma magnitude. Depois, a professora solicitou que o G1 comparasse as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{10}$. Para isso, alinharam as barras brancas e amarelas verticalmente no *applet,* como se fossem fazer o jogo do trem, sendo capazes de realizar a comparação entre as barras. O uso do *applet* possibilitou que os alunos visualizassem e compreendessem a magnitude dessas frações na perspectiva da medição, revelando o processo de instrumentação.

Na Tarefa 4, outros *applets,* além das *Barras Cuisenaire* foram utilizados.

Quadro 6: Tarefa 4: *Área e Perímetro de Quadriláteros*

4) Abram o arquivo do GeoGebra *Quadriláteros* disponível em https://www.geogebra.org/geometry/gvd5vbsq. Movimentem os controles deslizantes *a* e *b*, observem o que ocorre na figura representada e respondam. a) O que é alterado na figura representada pelo GeoGebra com a movimentação dos controles deslizantes *a* e *b*? b) Considerando que a área de quadrados e retângulos é o resultado da multiplicação do comprimento pela largura e que perímetro é a soma de todos os lados, utilize o arquivo do GeoGebra *Quadriláteros* disponível em https://www.geogebra.org/geometry/gvd5vbsq e o *applet* Fraction Models disponível em https://www.nctm.org/Classroom-Resources/Illuminations/Interactives/Fraction-Models/, para completar a tabela referente aos lados, perímetros e áreas dos quadriláteros em suas representações decimais e fracionárias.

	Retângulo 1		Quadrado 2		Retângulo 3	
	Repre-sentação decimal	Repre-sentação fracionária	Repre-sentação decimal	Repre-sentação fracionária	Repre-sentação decimal	Repre-sentação fracionária
Comprimento	0,2				0,7	
Largura	0,6			$\frac{9}{10}$		
Perímetro						
Área					0,35	

	Quadrado 4		Retângulo 5		Quadrado 6	
	Repre-sentação decimal	Repre-sentação fracionária	Repre-sentação decimal	Repre-sentação fracionária	Repre-sentação decimal	Repre-sentação fracionária
Comprimento			4,5			
Largura						
Perímetro			13			$\frac{24}{5}$
Área	1					

c) Retomem a tarefa anterior. Observem as tabelas e respondam: Qual(is) diferença(s) existe(m) na multiplicação dos Números Racionais, quando comparada(s) aos Números Naturais. É possível afirmar que na multiplicação dos Números Racionais os resultados sempre aumentam? Expliquem o raciocínio de vocês e, se necessário, explorem mais o arquivo do GeoGebra, testando diferentes valores

Fonte: Dados da pesquisa (2020)

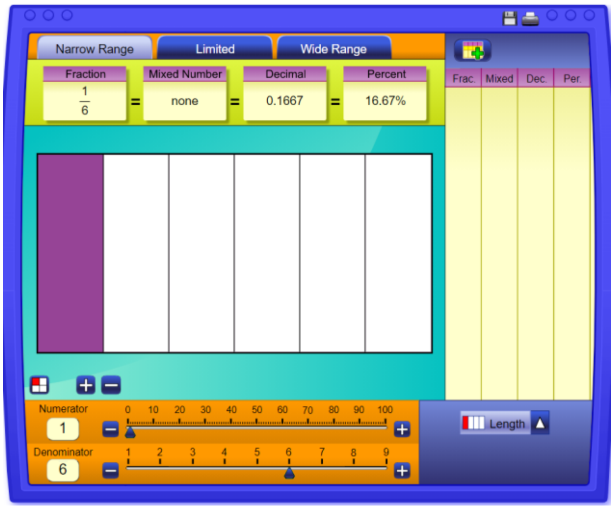
Na fase de resolução da *tarefa* 4 parte 1, Lindinha, do G1, foi escolhida pelo grupo para compartilhar a tela do celular com o *applet Quadriláteros* para que o grupo pudesse discutir a sua manipulação (esquemas de utilização do artefato). Depois de manipular o *applet Quadrilátero* e escolher a versão para computador para melhorar a visualização, ela começou a arrastar para direita e para esquerda os controles deslizantes *a* e *b* (instrumentação). Depois de algum tempo de discussão do grupo sobre o uso do *applet* (instrumento), Docinho descreveu a relação entre os controles deslizantes e os lados do quadrilátero:

> Docinho: Eu fiz assim na primeira: Quando movimentamos o controle a, ele [comprimento] vai para um lado e para o outro; e quando movimentamos b [controle deslizante b], ele [largura] vai para cima e para baixo; mas também, quando movimentamos o a e o b, a gente forma quadriláteros que podem ser alto, baixo, largo e comprido. O a [controle deslizante a] forma o comprimento e o b [controle deslizante b], a altura.
>
> Tarefa 4 – G1. Realização da Tarefa, 20/10/2020.

Depois, para o item *b* da tarefa, a primeira preocupação do grupo foi que, para completar a tabela, teriam que usar dois *applets*. Considerando que no ERE para as discussões em grupo não é possível compartilhar a tela de ambos os *applets* ao mesmo tempo, a professora chamou a atenção para que observassem os valores e cálculos que apareciam abaixo dos controles deslizantes no *applet Quadrilátero*. Com esses questionamentos, os alunos perceberam que tais valores estavam relacionados ao perímetro e à área dos quadriláteros e, portanto, os valores solicitados na Tabela 4, referente à representação decimal dos Retângulos 1, 3 e 5 e dos Quadrados 2, 4 e 6, estavam explícitos no *applet*.

Já para realizar as conversões da representação fracionária para decimal ou vice-versa, os alunos utilizaram outro *applet*, o *Fraction Models*. Neste *applet,* o aluno indica o numerador e o denominador (instrumentalização), e o *applet* retorna uma figura de área, representação fracionária, número misto (se houver), decimal e porcentagem, as quais os alunos precisavam interpretar (instrumentação). Os alunos do G1 utilizaram esse *applet* para conferir se a representação decimal do Retângulo 1 (tabela da Tarefa 4), dois décimos (0,2), seria igual à representação fracionária, $\frac{2}{10}$. Para isto, eles colocaram 2 no numerador e 10 no denominador, e o *applet* retornou a notação decimal 0,2. No entanto, ao conferir se o perímetro do Retângulo 1, cuja representação decimal é 1,6, colocaram no *applet* o 1 no numerador e o 6 no denominador (instrumentalização). Como resultado, o *applet* mostrou o decimal 0,1667, conforme a Figura 6.

Figura 6: Uso do *applet Fraction Models* pelo Grupo 1



Fonte: Dados da pesquisa (2020)

Com isso, concluíram que a representação fracionária não era a desejada (instrumentação). Então, a professora perguntou para o grupo como é feita a leitura de 1,6 e Docinho respondeu dezesseis (16) décimos. Frente a isso, a professora incentivou-os a inserir essa informação no *applet*. Lindinha, quem estava compartilhando a tela, inseriu 16 no espaço destinado ao numerador e 10 no denominador, e com isso verificaram que a representação decimal no *applet* resultou em 1,6. A seguir, para verificar se estavam corretos quanto à representação fracionária da medida da área, 0,12, perceberam que o *applet Fraction Models* é limitado ao denominador 25, e por isso chamaram a professora para auxiliar.

> Docinho: E doze cem avos… Aqui tem 100? [procurando no applet como inserir 100 no denominador].
>
> Lindinha: Não, só chega até o 25… Professora, tá online?
>
> Professora: Oi, gente, pode falar.
>
> Docinho: Aqui não tem 100! [referindo-se ao applet Fraction Models].
>
> Professora: E agora?
>
> Docinho: É que ali na área, eu acho que é 12/100 (doze cem avos) mas aqui não tem 100.
>
> Tarefa 4 – G1. Realização da Tarefa, 20/10/2020.

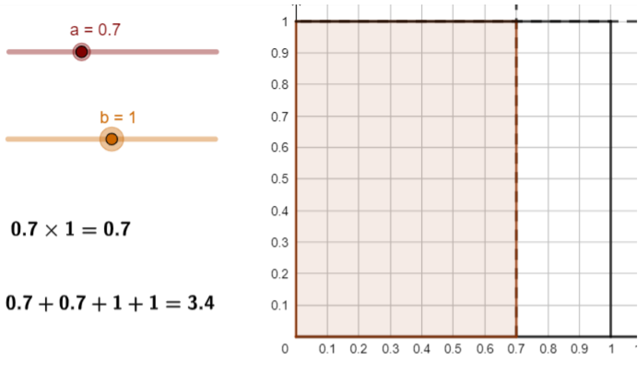
O *Fraction Models* é limitado à unidade de medida 100 (denominador), indo no máximo até 25. A professora explicou que o *cem avos* (fração de denominador cem) deve ser lido como centésimos, e pediu para que continuassem a tarefa completando a tabela referente aos demais quadriláteros, e enquanto isso, fossem pensando em como comprovar.

Passaram, então, a completar a tabela, referente ao Quadrado 2, cuja única informação era a largura, na representação fracionária, $\frac{9}{10}$. Para completar o comprimento, área e perímetro, tanto na representação decimal quanto fracionária, não tiveram dificuldades. Primeiro utilizaram o *Fraction Models,* inseriram 9 no numerador e 10 no denominador, para converter a representação fracionária $\frac{9}{10}$ para a decimal 0,9. Então, abriram o *Quadriláteros*, arrastaram os controles deslizantes *a* e *b* até a medida 0,9, e encontraram o perímetro e a área para completar a tabela referente às representações decimais (instrumentalização). Depois, retornaram no *Fraction Models* para conferir se o perímetro que escreveram na representação fracionária estava correto: inseriram 36 no numerador e 10 no denominador, e verificaram que era 3,6. Também ficaram inseguros quanto à representação fracionária da medida da área 0,81, pois já tinham constatado que o *Fraction Models* é limitado até o denominador 25. Então, mesmo com dúvidas, escreveram $\frac{81}{100}$, e prosseguiram com a resolução da tarefa referente ao Retângulo 3. Para este retângulo, foi informado o comprimento 0,7 e área 0,35.

> Docinho: [...] Então coloca aí, Lindinha, 0,7 de comprimento [arrasta o controle deslizante a até a medida 0,7].
>
> Lindinha: Já coloquei.
>
> Docinho: Agora vai colocando a largura [arrastar o controle deslizante b] até dar 0,35 ali, no vezes [no valor da área].
>
> Lindinha: Olha, 3,4 [Lindinha arrasta o controle deslizante b até a medida 1].
>
> Tarefa 4 – G1. Realização da Tarefa, 20/10/2020.

Essa discussão resultou na Figura 7:

Figura 7: Uso do *applet Quadriláteros* pelo Grupo 1



Fonte: Dados da pesquisa (2020)

> Docinho: Não, ali 0,7 vezes tal, tem que dar o resultado 35 [referente a 0,35 na medida da área].
>
> Lindinha: É o de mais, né? [referente ao cálculo do perímetro].
>
> Docinho: Não, o de vezes [referente à área].
>
> Lindinha: Aí! [Lindinha arrasta o controle deslizante b até o valor 0,5].
>
> Docinho: Ah, então é 0,5 a largura!

Lindinha: Porque você escolheu o 35? [referindo-se a 0,35].

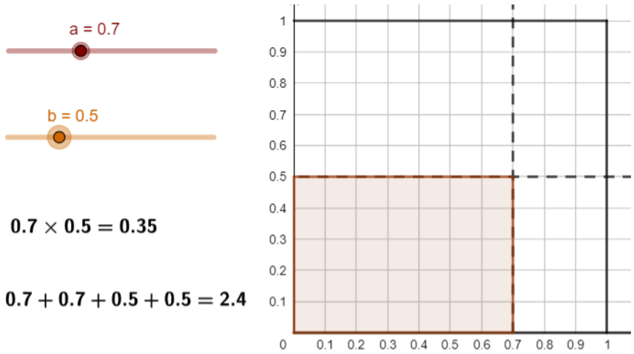
Docinho: Porque ali, na área que a professora mandou no grupo [referente a tabela da tarefa], está 0,35, aí eu falei para você colocar o resultado 35 para ver qual que era o resultado da largura.

Lindinha: Ah, entendi!

Docinho: Agora o perímetro é 2,4. Então, ali na largura, vai ficar 5/10, o perímetro vai ficar 24/10 e a área 35/100.

Tarefa 4 – G1. Realização da Tarefa, 20/10/2020.

Figura 8: Uso do *applet Quadriláteros* pelo Grupo 1



Fonte: Dados da pesquisa (2020)

Quando os alunos representam o quadrilátero solicitado, associam comprimento e largura aos controles deslizantes dos quadriláteros, e vinculam a representação decimal à representação fracionária, revela-se a instrumentação. Já a ação de mover os controles deslizantes observando as mudanças relacionadas ao comprimento, largura, área, perímetro e valores mostrados no software está relacionada com a instrumentalização.

Nossa intenção era que os alunos concluíssem que, ao multiplicar frações cujos fatores sejam menores que 1 o produto é menor que os fatores; quando o produto é igual a 1, os fatores são também 1; e quando os fatores são maiores que um, o produto é maior que os fatores, ou seja, diferentemente dos números naturais, que o produto é sempre maior que os fatores, nas frações, essa não é uma regra. Assim, para completar a tabela da Tarefa 4, referente as representações do Quadrado 4, a única informação dada foi a da medida da área, 1, na representação decimal. Não houve dificuldades para encontrar a medida do comprimento e da largura, mas os alunos ficaram em dúvida quanto à representação fracionária dos números naturais. No momento do diálogo, que pode ser lido no excerto abaixo, Lindinha compartilhava o *applet Quadriláteros*.

Professora: [...] Mas que fração vocês poderiam escrever para representar um?

Docinho: Um um? [referindo-se à fração 1/1].

Professora: O que vocês acham? Tem outra?

Docinho: Não sei professora… é um inteiro.

Lindinha: 1/2 professora?

[...]

Docinho: Tá, vou lá no outro applet [referindo-se ao Fraction Models e passa a compartilhar a tela]. Dá 1 por 1 professora, 1 no numerador e outro 1 no denominador [insere no Fraction Models 1 no numerador e 1 no denominador, que retorna com a representação decimal igual a 1].

Lindinha: E na de baixo [referindo-se ao perímetro] vai dar 4, o resultado do perímetro.

Docinho: Então vai dar 4 por 4... deixa eu ver… [insere no Fraction Models 4 no numerador e 4 no denominador, que retorna com decimal igual a 1]... [Então, depois de alguns segundos de silêncio, a aluna coloca 16 no numerador e 4 no denominador, e verifica que essa fração 16/4, retorna o decimal 4]. Dá 16/4professora.

Lindinha: Então coloca 16/4 [referindo-se ao preenchimento da tabela referente ao Quadrado 4, na representação fracionária do perímetro].

Docinho: E na área...

Lindinha: Vai ser 1/1.

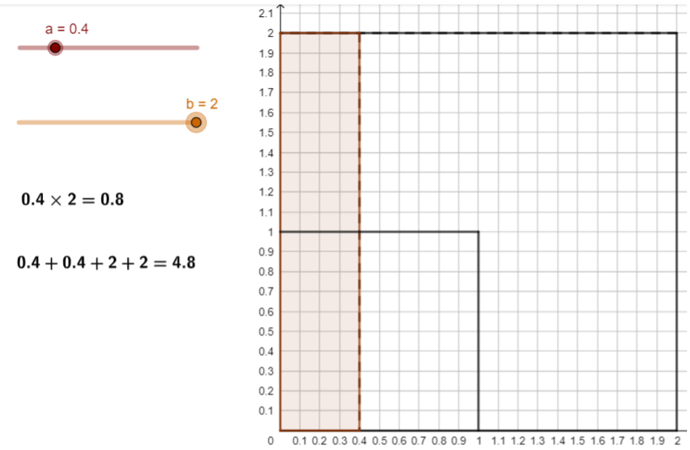
Tarefa 4 – G1. Realização da Tarefa, 20/10/2020.

A intenção de colocarmos comprimento e largura medindo 1 foi para que os alunos compreendessem que, na multiplicação de números racionais, multiplicar duas frações diferentes de 1 entre si pode produzir um resultado (produto) menor que um dos dois fatores. O comprimento e largura 1 seriam parâmetros para compreenderem isso.

Conforme disposto na tabela da Tarefa 4, referente Retângulo 5, as informações que os alunos tinham para preencher as representações decimais e fracionárias eram comprimento, 4,5; e perímetro, 13. Para encontrar a largura, precisariam subtrair, de 13, o dobro do comprimento, 9; e depois dividir o resultado por 2. No entanto, encontraram o seguinte problema: o *applet Quadriláteros* só aceita comprimento e largura até 2 de medida. Ao tentarem arrastar o controle deslizante *a* para a medida 4,5, perceberam essa limitação (instrumentalização). Depois de alguns minutos de discussão sobre essa questão, sem concluírem como fazer, decidiram deixar para responder essa questão sobre o Retângulo 5 depois, e trabalhar com o próximo quadrilátero, o Quadrado 6.

Na tabela da Tarefa 4, referente ao Quadrado 6 só foi informada a representação fracionária do perímetro, $\frac{24}{5}$. Então, Docinho, utilizando o *Fraction Model,* inseriu 24 no numerador e 5 no denominador, e concluiu que a representação decimal era 4,8 (instrumentação e instrumentalização). Lindinha estava compartilhando o *Quadrilátero,* e moveu os controles deslizantes *a* e *b* para que o perímetro medisse 4,8. No entanto, o quadrilátero deveria ser um quadrado.

Figura 9: Uso do *applet Quadriláteros* pelo Grupo 1



Fonte: Dados da pesquisa (2020)

Docinho: Professora, mas daí o perímetro em representação fracionária deu 24/5, mas a forma decimal deu 4,8 [observando que Lindinha encontrou um retângulo de perímetro 4,8 e não um quadrado].

Professora: Ok, então coloca lá 4,8 no perímetro da tabela [referente à conversão fracionária para a decimal].

Docinho: Mas vai ficar aquele retângulo, professora [referindo-se à Figura 9].

Professora: Mas deveria ser um quadrado, não é?

Docinho: É.

Professora: Então vocês precisam descobrir que medida é para todos os lados. Essas medidas são iguais, e somadas devem medir 4,8.

Docinho: Coloca tudo no máximo, Lindinha [referindo-se aos controles deslizantes a e b].

Professora: Lembra o que é perímetro?

Docinho: Aham, agora vai diminuindo [referindo-se aos controles deslizantes a e b] para dar 4,8 ali [referente ao resultado da soma do perímetro abaixo dos controles deslizantes].

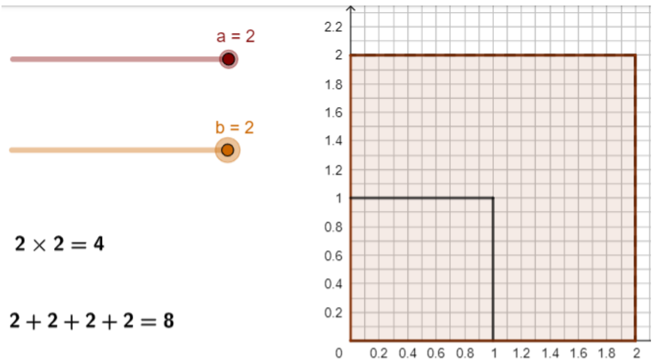
Lindinha: Nos dois? [referente aos controles deslizantes a e b].

Docinho: É.

Lindinha: [Coloca os controles deslizantes a e b no máximo, 2, conforme a Figura 10].

Tarefa 4 – G1. Realização da Tarefa, 20/10/2020.

Figura 10: Utilização do *applet Quadriláteros* pelo Grupo 1



Fonte: Dados da pesquisa (2020)

No excerto acima, Docinho percebeu que o quadrilátero formado está errado (instrumentação), apesar de a medida do perímetro estar certa. Então, a professora interveio para que eles lembrassem do conceito de perímetro do quadrado. Nesse momento, Lindinha encontrou uma estratégia: colocar os controles deslizantes *a* e *b* no máximo, ou seja, com medida 2, e ir diminuindo-os até atingir o perímetro desejado, 4,8, cujo quadrilátero formado deve ser um quadrado. Notamos que a instrumentação é destacada quando os alunos se apropriam das características e potencialidades do *applet* para realizar medições, e observam as mudanças do perímetro e figura formada, relacionadas às alterações dos controles deslizantes. Eles continuaram a discussão:

Docinho: Agora vai diminuindo [referente ao controle deslizante a] para dar 4.8 [referente ao perímetro].

Lindinha: [Vai arrastando o controle deslizante a para a esquerda, ou seja, diminuindo a medida, e para em 1,4].

Docinho: Vai mais, mais para cima. Mais... [querendo dizer para Lindinha mover o controle deslizante a para à esquerda].

Lindinha: Espera aí… [move o controle deslizante a até 1,2]

Docinho: Mais, Lindinha. Para cima, não é para baixo [querendo dizer para Lindinha mover o controle deslizante a para à esquerda].

Lindinha: [Move o controle deslizante a até a medida 2 novamente, e passa a mover o controle deslizante b até 1,7].

Docinho: Isso! Não! Volta...

Lindinha: [Move o controle deslizante b até o 2].

Docinho: Aí! Não… Espera. Um pouquinho para baixo [referente a mover o controle deslizante b para à esquerda].

Lindinha: [Diminui o controle deslizante b até a medida 0,4].

Docinho: Aí, agora diminui o outro [referente ao controle deslizante a].

Lindinha: [Diminui o controle deslizante a até a medida 0,4 também]... Mas daí vai diminuir o outro também [referente ao perímetro].

Professora: Então comprimento e largura têm que ser maiores, não é?

Lindinha: [Começa a aumentar as medidas dos controles deslizantes a e b de maneira igual: arrasta o controle deslizante b até 0,7, e a seguir, o controle deslizante b até 0,7. Observa o perímetro, 2,8, e move o controle deslizante a e depois o b até 1].

Docinho: Deixa o a no 8 [referindo-se ao 0,8].

Lindinha: [Arrasta o controle deslizante a até 2 e começa a diminuir, até atingir 1,4].

Docinho: Aí! Agora aumenta o outro [referindo-se ao controle deslizante b].

Lindinha: [Arrasta o controle deslizante b até atingir 1,4].

Docinho: Professora, não tem como… Você fez isso antes para ver se dava certo?

Professora: [Risos] Lógico que tem! Está passando um pouquinho, não está? Então diminui as duas medidas um pouquinho...

Docinho: Diminui um, depois o outro [referindo-se ao controle deslizante a e b].

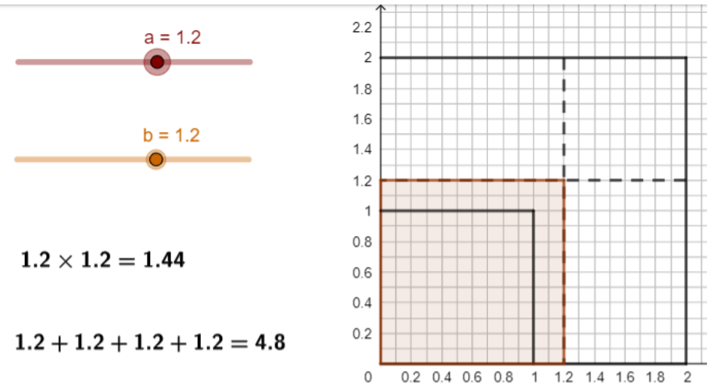
Lindinha: [Arrasta o controle deslizante a para a esquerda até atingir 0,7, e a seguir, arrasta para a direita, aumentando a medida de a até 1,2].

Professora: Pensa assim, no Quadrado 4, você tinha comprimento 1 e largura 1, o perímetro deu 4, e vocês querem 4,8. Então, não é um pouquinho maior do que 1?

Lindinha: [Move o controle deslizante b até 1,2] Consegui professora! O perímetro deu 4,8 e na área deu 1,44.

Tarefa 4 – G1. Realização da Tarefa, 20/10/2020.

Figura 11: Utilização do *applet Quadriláteros* pelo Grupo 1

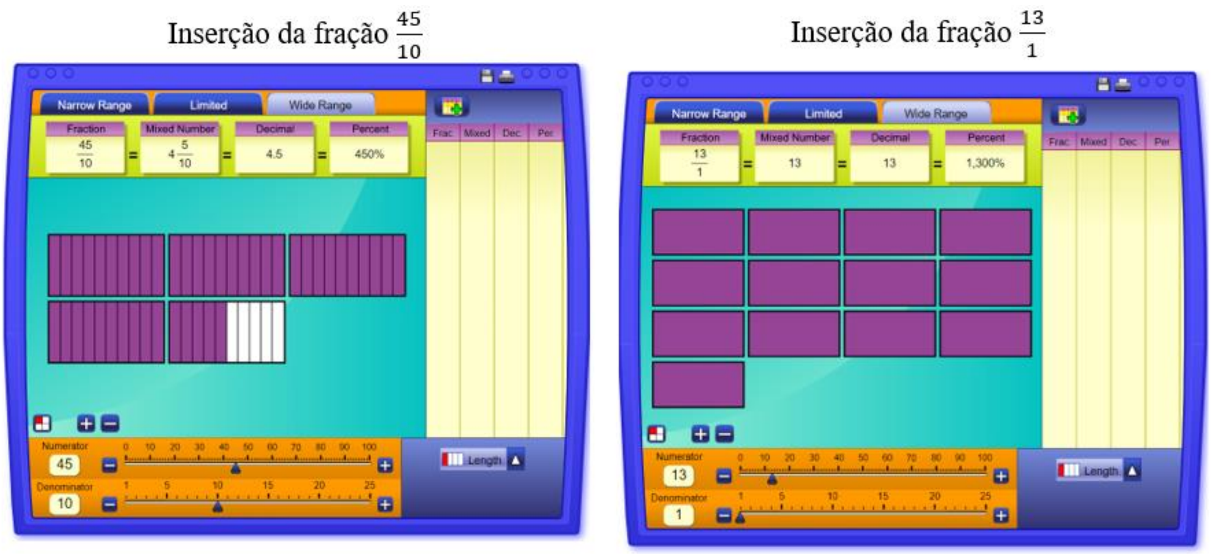


Fonte: Dados da pesquisa (2020)

Neste trecho da resolução da Tarefa, os processos de instrumentação e instrumentalização estão intimamente ligados. A instrumentação é revelada quando os alunos: compreendem o funcionamento e a limitação do *applet* (os controles deslizantes são movidos um de cada vez, a medida máxima possível é 2), depois elaboram uma estratégia de resolução (colocando os controles deslizantes no máximo, 2, e depois diminuindo). A instrumentalização é percebida quando os alunos: compreendem o funcionamento e manipulam o *applet* (eles inserem a mesma medida em cada controle deslizante e verificam se o perímetro é 4,8, e se a figura formada é um quadrado).

A seguir, o grupo voltou para a tabela da Tarefa 4, coluna referente ao Retângulo 5. A professora relembrou que o perímetro é comprimento mais comprimento mais largura mais largura. Depois, pediu para refletirem sobre um retângulo de números inteiros como, por exemplo, de comprimento 2 e perímetro 16. Então, os alunos discutiram e concluíram que, nesse exemplo, a largura seria 6. Notamos que sem o apoio do *applet,* eles não conseguiram refletir sobre a situação apresentada no Retângulo 5, sendo necessária a intervenção da professora. Esse grupo, para fazer as representações fracionárias, precisaram do *applet Fraction Models* para ter certeza de que 4,5 é $\frac{45}{10}$ e 13 é $\frac{13}{1}$ (Figura 12), evidenciando o processo de instrumentação. Como já haviam passado duas horas de *live*, decidimos continuar a tarefa no dia seguinte[5].

Figura 12: Utilização do *applet Fraction Models* pelo Grupo 1



Fonte: Dados da pesquisa (2020)

No dia seguinte, para resolver o item *c* da Tarefa 4, os alunos precisavam observar a tabela e responder quais seriam as diferenças existentes entre a multiplicação de números racionais e naturais. Depois de muitas discussões sobre essa questão, a professora pediu para que eles observassem novamente a tabela, e comparassem o comprimento e a largura do Retângulo 1, com sua área, ou seja, comparassem 0,2 e 0,6 com 0,12; ou ainda, na representação fracionária, $\frac{2}{10}$ e $\frac{6}{10}$ com $\frac{12}{100}$. No entanto, apesar deles saberem que precisavam encontrar as frações equivalentes para comparar as frações, não sabiam como fazer isso. Ressaltamos que, nas Tarefas 2 e 3, abordamos equivalências de frações utilizando as *Barras Cuisenaire*. Entretanto, o grupo não lembrou de utilizar a multiplicação para encontrar as frações

[5] Foi o único grupo com o qual realizamos um encontro fora do planejado. Isso porque, depois do desenvolvimento da tarefa com o G1, subdividimos a tarefa para os demais grupos, sendo realizados os itens *a* e *b* em uma semana; e os itens *c* e *d* na semana seguinte.

equivalentes, mas lembraram das *Barras Cuisenaire*.

Professora: O que nós fizemos para encontrar as frações equivalentes?

Docinho: A gente usou as barras, professora.

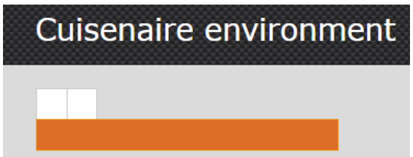
[...]

Lindinha: [Abre o applet das Barras Cuisenaire].

Professora: Então monta ali, 2 décimos, o que é 2 décimos?

Tarefa 4 – G1. Realização da Tarefa, 21/10/2020.

Figura 13: Utilização do *applet Barras Cuisenaire* pelo Grupo 1



Fonte: Dados da pesquisa (2020)

Docinho: Com o vermelho era mais fácil [referente à Lindinha ter optado por usar 2 barras brancas ao invés da barra vermelha].

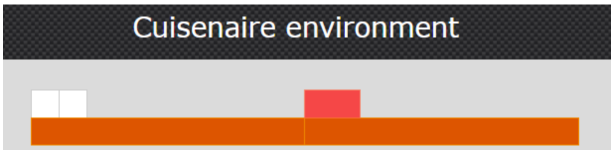
Professora: Agora, você tem que fazer isso equivalente a 100. Então, quantas barras laranja você vai ter que colocar aí?

Docinho: 90.

Professora: Então diminui o zoom [...]. Mas olha só, vocês vão conseguir imaginar uma coisa, coloca uma barra laranja ali do lado, a Docinho falou que tem que ser mais 9… 90. Só que, para cada barra laranja que você for colocar, tem que colocar mais 2 décimos, então coloca 2 décimos ali nessa barra [Lindinha adiciona a barra vermelha em cima da barra laranja].

Tarefa 4 – G1. RT, 21/10/2020.

Figura 14: Utilização do *applet Barras Cuisenaire* pelo Grupo 1



Fonte: Dados da pesquisa (2020).

Professora: Aí, agora imagina isso quantas vezes.

Docinho: Dá 20.

Professora: Então vai ser 20 o que?

Docinho: 20 centésimos.

Tarefa 4 – G1. Realização da Tarefa, 21/10/2020.

O grupo precisou das *Barras Cuisenaire* para compreender que $\frac{2}{10} = \frac{20}{100}$ e comparar $\frac{20}{100}$ e $\frac{12}{100}$. Depois de analisarem cada um dos quadriláteros apresentados na tabela, o G1, na fase de Discussão Coletiva da Tarefa 4, parte 2, apresentou suas conclusões da seguinte forma:

> Docinho: Nos números racionais, nem sempre o resultado é maior que o fator, pois quando fizemos as equivalências, os resultados deram que alguns davam maior [sic], outros menores e outros iguais. Quando o zero vem antes da vírgula ou ponto, o resultado vai ser menor do que os fatores. Quando qualquer número sem ser zero vir antes da vírgula ou ponto, o resultado vai ser maior que o fator. Quando os números dão iguais, o resultado e o fator vão ser iguais.
>
> Tarefa 4 – G1. Realização da Tarefa, 30/10/2020.

A limitação do *applet Fraction Models* quanto à unidade de medida 25 não impediu que os alunos do G1 comparassem ou convertessem decimais e frações de unidade de medida 100, porque utilizaram as *Barras Cuisenaire*. Reforçamos que, apesar de a professora ter sistematizado, na Tarefa 3, a equivalência de frações por meio das *Barras Cuisenaire* e também pela operação de multiplicação, eles não lembraram dessa última possibilidade, mas lembraram das *Barras Cuisenaire*.

5 Considerações Finais

Nosso objetivo foi investigar as contribuições dos *applets Barras Cuisenaire*, *Quadriláteros* e *Fraction Models* na aprendizagem de frações na perspectiva da medição em aulas assentes no EEM desenvolvidas ERE. Para isso, buscamos evidências dos processos de instrumentação e instrumentalização promovidos pela utilização dos *applets* no contexto do ERE em aulas assentes no EEM para a aprendizagem de frações na perspectiva de medição.

Pelo fato de as *Barras Cuisenaire* não possuírem medida pré-estabelecida, existe a possibilidade de realizar diferentes comparações entre o comprimento das barras, favorecendo a compreensão de fração como medida, porque é indispensável escolher uma das barras para comparar, como a unidade de medida. Por exemplo, ao medir a barra verde-clara utilizando a barra verde-escura como unidade de medida, temos que a verde-clara mede metade $\left(\frac{1}{2}\right)$ da verde-escura; e se comparada a verde-clara com a azul, a mesma barra verde-clara mede a terça parte $\left(\frac{1}{3}\right)$ da barra azul, o que permitiu aos alunos, mobilizando estratégias para realizar comparações multiplicativas entre as barras, estabelecer equivalência de frações, compreendendo a propriedade *representação simbólica* (de que há uma infinidade de representações fracionárias para uma mesma magnitude). Além disso, ao terem que escolher e utilizar a unidade de medida mais conveniente para operar com frações de unidades de medidas diferentes, puderam compreender a propriedade dos números fracionários *sinalização de magnitude numérica*.

O *applet Quadriláteros* foi utilizado para realizar a construção e medição dos quadriláteros, seus perímetros e áreas; e o *Fraction Models* para validar se representações fracionárias e representações decimais tinham a mesma magnitude.

A associação dos três *applets*, na Tarefa 4, favoreceu que os alunos compreendessem as diferenças entre os números naturais e números fracionários, da propriedade *produto* (Obersteiner *et al.*, 2019), que ao multiplicar duas frações diferentes de zero e um, seu resultado pode ser menor do que um dos dois fatores.

Em vários momentos da pesquisa, percebemos a forma como os *applets* influenciaram os pensamentos dos alunos, na instrumentação quando, por exemplo, acreditavam que a fração $\frac{1}{9}$ era maior que $\frac{1}{4}$, sem olhar para as *Barras Cuisenaire*. Ficou explícito, também, como as compreensões dos alunos moldaram o uso dos *applets* na instrumentalização quando, por exemplo, eles utilizaram as *Barras Cuisenaire* para encontrar a fração equivalente à unidade de medida 100.

A inserção dos *applets* no nosso trabalho pedagógico possibilitou que estudantes com diferentes aparatos tecnológicos (celulares, *tablets*, computadores) pudessem discutir, refletir, visualizar e reconhecer as frações como medida. No entanto, sabemos que nem todos tiveram a oportunidade de participar das aulas por indisponibilidade de equipamento ou internet. Isso inviabilizou o trabalho com esses alunos, e nesse sentido, salientamos que não conseguiríamos planejar e desenvolver as tarefas aqui propostas, no contexto do ERE, sem o uso dos *applets* citados, especialmente das *Barras Cuisenaire*, nas quais as tarefas se alicerçam, sendo necessárias para as explorações e compreensões dos alunos.

Os resultados revelam o potencial das aulas assentes no EEM aliado aos *applets* sugeridos para a aprendizagem de frações na perspectiva da medição, visto que sem a intervenção da professora, as tarefas e os *applets* por si só se mostram limitados. Neste sentido, um planejamento detalhado das aulas nessa perspectiva, especialmente com a elaboração de um quadro de antecipação de ações dos alunos e do professor é indispensável para que os objetivos das tarefas sejam atingidos.

Uma diferença a ser destacada quanto à utilização dos *applets* no ensino presencial e no remoto é que, nas aulas presenciais, os alunos poderiam trabalhar e visualizar dois ou mais *applets* ao mesmo tempo, o que não acontece no ERE, pois não existe possibilidade de compartilhar duas telas ao mesmo tempo via *Google Meet*.

Apontamos a necessidade de outras investigações que analisem as potencialidades do EEM articulado às TD sob a lente teórica da GI para o ensino e a aprendizagem de frações na perspectiva da medição, bem como outras interpretações. Salientamos, também, que os recursos de comunicação, como computador, celular, *WhatsApp e Google Meet*, possibilitaram e são indispensáveis no desenvolvimento das aulas no ERE e, portanto, não são elementos neutros, e influenciam o ensino e o aprendizado no ERE. Contudo, neste trabalho, não analisamos sua relação com a aprendizagem das frações como medida, visto que teríamos que considerar outros descritores, o que pode ser investigado em outros trabalhos, a fim de compreender de que forma artefatos/instrumentos de comunicação influenciam o ensino e o aprendizado de Matemática no ERE.

Agradecimentos

Agradecemos ao PRPGEM (Programa de Pós-graduação em Educação Matemática) e CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo apoio concedido.

Referências

Almeida, A. C. & Oliveira, H. (2009). O processo de génese instrumental e a calculadora gráfica na aprendizagem de funções no 11.º ano. *Quadrante*, *18*(1 e 2), 87-118.

Bailey, D.; Hoard, M. K.; Nugent, L. & Geary, D. C. (2012). Competence with fractions predicts gains in mathematics achievement. *Journal of Experimental Child Psychology*, 113, 447-455.

Basniak, M. I. & Estevam, E. J. G. (2018). Uma lente para analisar a integração de Tecnologias Digitais ao Ensino Exploratório de Matemática. In: *VII Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática* (pp. 1-12). Foz do Iguaçu, PR.

Basniak, M. I. & Estevam, E. J. G. (2019). Uma lente teórica para analisar o potencial das tecnologias digitais no Ensino Exploratório de Matemática. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *32*(2), 738-747.

Behr, M. J.; Lesh, R.; Post, T. R. & Silver, E. A. (1983). Rational Numbers Concepts. In: R. Lesh & M. Landau (Ed.). *Acquisition of Mathematics Concepts and Process* (pp. 91-125). Londres.

Bittar, M. (2011). A abordagem instrumental para o estudo da integração da tecnologia na prática pedagógica do professor de Matemática. *Educar em Revista*, (especial), 157-171.

Bueno, A. C. & Basniak, M. I. (2020). Construcción de escenarios en GeoGebra en la movilización de conocimientos matemáticos por alumnos con altas habilidades/superdotados. *Paradigma*, 41(2,), 252-276.

Canavarro, A. P.; Oliveira, H. & Menezes, L. (2012). Práticas de ensino exploratório da matemática: O caso de Célia. In: *Actas do Encontro de Investigação em Educação Matemática 2012: Práticas de Ensino da Matemática* (pp. 255-266). Portalegre: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.

Ceale. (2014). *Glossário Ceale: Termos de alfabetização, leitura e escrita para educadores*. Belo Horizonte. Disponível em http://www.ceale.fae.ufmg.br/app/webroot/glossarioceale. Acesso em 8 set. 2020.

Cyrino, M. C. C. T. & Teixeira, B. R. (2016). O Ensino Exploratório e a Elaboração de um framework para os Casos Multimídia. In: M. C. C. T. Cyrino (Org.). *Recurso Multimídia para a Formação de Professores que Ensinam Matemática: elaboração e perspectivas* (pp. 81-99). Londrina, PR: EDUEL.

Drijvers. P.; Kieran, C.; Mariotti, M. A.; Ainley, J.; Andresen, M.; Chan, Y. C.; Dana-Picard, T.; Gueudet, G.; Kidron, I.; Leung, A. & Meagher, M. (2010). Integrating Technology into Mathematics Education: Theoretical Perspectives. In: C. Hoyles & J. B. C. Lagrange (Ed.) *Mathematics Education and Technology: Rethinking the Terrain* (pp. 89-133). Springer.

Escolano, R. V. & Gairín, J. M. S. (2005). Modelos de Medida para la Enseñanza del Número Racional en Educación Primaria. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 1, 17-35.

Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations os rational numbers. In: R. Lesh. (Ed.). *Number and measurement: papers from a research workshop* (pp. 101-144). Columbus, Ohio: ERIC/SMEAC.

Kieren, T. E. (1980). The rational number construct – its elements and mechanisms. In: T. Kieren. (Ed.) *Recent Research on Number Learning* (pp. 125-150). Columbus: Eric/Smeac.

Lamon, S. J. (2012). *Teaching fractions and ratios for understanding – essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. (3. ed). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers Mahwah.

Moreira, J. A. M.; Henriques, S. & Barros, D. (2020). Transitando de um ensino remoto emergencial para uma educação digital em rede, em tempos de pandemia. *Dialogia*, (34), 351-364.

Obersteiner, A.; Dresler, T.; Bieck, S. M.; Moeller, K. *et al*. (2019). Understanding fractions: Integrating results from athematics education, cognitive psychology, and neuroscience. In: A. Norton & M. W. Alibali (Ed.). *Constructing number: Merging perspectives from psychology and mathematics Education* (pp. 135-162). Cham: Springer.

Oliveira, H.; Menezes, L. & Canavarro, A. P. (2013). Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. *Quadrante*, *22*(2), 29-53.

Oliveira, V. S. D. & Basniak, M. I. (2021). O planejamento de aulas assentes no ensino exploratório de Matemática desenvolvidas no ensino remoto de emergência. *Educação Matemática Debate*, 5(11), 1-29.

Padilha, L. C. S. & Bittar, M. (2013). Apropriação da Tecnologia por Professores de Matemática para fins Pedagógicos: Uma Abordagem Instrumental. In: *XI Encontro Nacional de Educação Matemática* (pp. 1-15). Curitiba, PR.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In: GTI (Ed.). *O professor e o desenvolvimento curricular*. (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Powell, A. B. (2018). Melhorando a epistemologia de números fracionários: Uma ontologia baseada na história e neurociência. *Revista de Matemática, Ensino e Cultura*, *13*(29), 78-93.

Powell, A. B. (2019a). Measuring Perspective of Fraction Knowledge: Integrating Historical and Neurocognitive Findings. *Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática*, 1, 1-19.

Powell, A. B. (2019b). Aprimorando o Conhecimento dos Estudantes sobre a Magnitude da Fração: Um Estudo Preliminar com Alunos nos Anos Iniciais. *Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, 9(2), 50-68.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies: une approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: Armand Colin.

Rabardel, P. (1999). Éléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques. In: M. BailleuL (Ed.). *Actes de la Xème Ecole d'Été en Didactiques des Mathématiques. Houlgate* (pp. 202-213). IUFM de Caen.

Roque, T. (2012). *História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro: Zahar, versão Kindle.

Torbeyns, J.; Schneider, M.; Xin, Z. & Siegler, R. S. (2015). Bridging the gap: Fraction understanding is central to mathematics achievement in students from three different continents. *Learning and Instruction*, 37, 5-13.

Valente, G. S. C.; Moraes, E. B.; Sanchez, M. C. O.; Souza, D. F. & Pacheco, M. C. M. D. (2020). O ensino remoto frente às exigências do contexto de pandemia: Reflexões sobre a prática docente. *Research, Society and Development*, *9*(9), 1-13.

Vieira Pinto, A. (2005). *O conceito de tecnologia*. Rio de Janeiro, RJ: Contraponto.