Sociedade Brasileira de Educação Matemática

RIPEM

Semelhança de triângulos: interações em malhas e controle deslizante

Cristiano de Souza Brito
Secretaria Municipal de Educação de Pinheiral
Barra Mansa, RJ — Brasil
prof.cristianosb@gmail.com
0000-0002-2686-9850

Marcelo Almeida Bairral
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Niterói, RJ — Brasil
mabairral@hotmail.com
0000-0002-5432-9261

2238-0345

10.37001/ripem.v13i3.3543

Recebido • 20/11/2022
Aprovado • 04/04/2023
Publicado • 10/09/2023

Editor • Gilberto Januario

Resumo: Neste artigo discute-se sobre as interações de (futuros) professores ao realizar duas tarefas em uma versão multiusuário, *on-line*, virtual e síncrona do GeoGebra, o VMTcG. Ao analisar os dados, consideram-se os aspectos discursivos, as modalidades de arrastar pontos e as categorias de signos presentes no processo de mediação semiótica. O primeiro episódio envolve o uso da malha quadriculada em uma tarefa sobre congruência de triângulos, e o segundo, uma tarefa sobre a razão de semelhança a partir de um controle deslizante. Os dados possibilitam concluir que os processos de pensamento relacionados ao uso da malha quadriculada limitaram-se à exploração de propriedades e relações mais globais de aspecto ascendente, enquanto os relativos ao uso do controle deslizante podem representar uma forma mais potente de processo de pensamento, que implica tanto a observação global de propriedades como a validação de conjecturas.

Palavras-chave: Semelhança. Congruência. Triângulos. Proporcionalidade. VMTcG.

Triangle similarity: interactions in meshes and slider

Abstract: This article discusses the interactions of prospective teachers to perform two tasks in a multiuser, online, virtual and synchronous version of GeoGebra, the VMTcG. When analyzing the data, the discursive aspects, the modalities of dragging points and the categories of signs present in the process of semiotic mediation are considered. The first episode involves the use of the square grid in a task on congruence of triangles, and the second, a task on the similarity ratio from a slider. The data make it possible to conclude that the thought processes related to the use of the checkered grid were limited to the exploration of more global properties and relations of ascending aspect, while those related to the use of the slider may represent a more potent form of thought process, which it implies both the global observation of properties and the validation of conjectures.

Keywords: Similarity. Congruence. Triangles. Proportionality. VMTwG.

Similitud de triángulos: interacciones en mallas y control deslizante

Resumen: Este artículo analiza las interacciones de (futuros) docentes al realizar dos tareas en una versión multiusuario, en línea, virtual y síncrona de GeoGebra, el VMTcG. Al analizar los datos, se consideran los aspectos discursivos, las modalidades de los puntos de arrastre y las categorías de signos presentes en el proceso de mediación semiótica. El primer episodio involucra el uso de malla a cuadros en una tarea sobre congruencia de triángulos, y el segundo, una tarea sobre la relación de similitud de un control deslizante. Los datos nos permiten concluir que los procesos de pensamiento relacionados con el uso de la malla cuadros se limitaron a la exploración de propiedades y relaciones más globales de aspecto ascendente, mientras que los relacionados con el uso del control deslizante pueden representar una forma más potente de proceso de pensamiento, que implica tanto la observación global de propiedades como la validación de conjeturas.

Palabras clave: Semejanza. Congruencia. Triangulos. Proporcionalidad. VMTcG.

1 Introdução

No ano de 2020 vivenciamos um momento novo na história da humanidade por ocasião da pandemia da Covid-19, e, com isso, maneiras de comunicar-se, aprender e ensinar, que já existiam, tornaram-se ainda mais necessárias por conta do distanciamento físico.

O ensino remoto emergencial[1] permitiu repensar a possibilidade de aprender e ensinar mesmo a distância e com uso de dispositivos conectados à internet, e pesquisadores aprofundaram-se nos estudos de ambientes virtuais e síncronos. Esta pesquisa foi motivada pela necessidade de novos rumos ao ensino e aprendizado de geometria, em especial a semelhança de triângulos, buscando entender: que contribuições e interações síncronas no ambiente *Virtual Math Teams* (VMT) podem ser observadas no aprendizado de (futuros) professores? Utilizaremos a expressão "(futuros) professores" para indicar a inclusão no grupo de participantes tanto de licenciandos quanto de professores. O VMT possibilita a criação de espaços de trabalho utilizando o Desmos ou o GeoGebra, e este último é denominado *Virtual Math Teams com GeoGebra* (VMTcG).

O VMT agrega o Ambiente de Geometria Dinâmica (AGD) GeoGebra e permite arrastar pontos livres ou vinculados de uma figura, possibilitando a produção de hipóteses sobre as propriedades observadas (Arzarello, Olivero, Paola & Robutti, 2002), bem como a verificação de relações entre os objetos e a dinâmica das relações (Alqahtani & Powell, 2016). Por ser um ambiente multiusuário, o VMT constitui grupos colaborativos que exploram, questionam e aprendem juntos (Stahl, Koschmann & Suthers, 2008), envolvendo assim interação entre o indivíduo e a máquina e entre os próprios sujeitos. Consideramos não só a importância de um aprendizado individual, da mente consigo mesma, mas também a possibilidade de se aprender coletivamente.

De igual modo, entendemos que tarefas em um AGD possibilitam a produção de significados, sejam pessoais ou matemáticos, porém não de forma automática (Bussi & Mariotti, 2008). Faz-se necessário, portanto, um projeto didático que apoie os alunos nesses ambientes. Dessa forma, buscamos entender qual o papel da malha quadriculada, do roteiro da tarefa e do *chat* em uma tarefa geométrica, virtual e síncrona, para a configuração do pensamento de (futuros) professores. Enfatizamos que a malha quadriculada é um recurso disponível na zona gráfica do VMTcG, o *chat* é um dos espaços do VMTcG designado para troca de postagens e o roteiro da tarefa foi elaborado pelos autores (Brito, 2022).

Este artigo discute os aspectos empíricos da pesquisa de mestrado do primeiro autor[2], concluída no ano de 2022 e desenvolvida entre os anos de 2019 e 2022 no âmbito do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática (PPGEduCIMAT) da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro e tem por objetivos analisar as interações síncronas de (futuros) professores em tarefas *on-line* sobre semelhança de triângulos e estabelecer o papel da malha quadriculada e do controle deslizante para a configuração do pensamento geométrico desses

[1] Resolução CNE/CP nº 2, de 10 de dezembro de 2020. Disponível em: https://www.in.gov.br/en/web/dou/-/resolucao-cne/cp-n-2-de-10-de-dezembro-de-2020-293526006, acesso em 11 jan. 2023.

[2] Este artigo é recorte de uma dissertação de mestrado defendida no Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciência e Matemática (PPGEduCIMAT) da Universidade Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ), escrita pelo primeiro autor e orientada pelo segundo autor.

participantes. As bases teóricas que compõem nossa revisão de literatura e que auxiliaram na análise dos dados gerados no VMT serão explicitadas na próxima seção.

2 Semelhança, AGD e VMTcG: alguns estudos prévios

A semelhança de figuras planas, no geral, está relacionada à noção de medida, de ampliação e redução, conservando a proporção dos lados correspondentes e a igualdade dos seus respectivos ângulos.

Um exemplo clássico de aplicação da semelhança de figuras planas é a ação de deslizar os dedos sobre a tela de *smartphones*, *tablets* e outros dispositivos de toques em tela, com a finalidade de melhorar a visualização de uma imagem sem deformá-la. Também é comum em programas de computadores alterar o comprimento e a altura de figuras, mantendo a proporção dos lados correspondentes pelo arrastar da diagonal da imagem.

Entre outros exemplos, a semelhança também se aplica a áreas do conhecimento como a engenharia, a arquitetura, os estudos de fenômenos ópticos, a programação de videogames e do processamento de imagens digitais. Tais campos de estudo têm o objetivo profissional de controlar as dimensões e a proporcionalidade das formas envolvidas (Maciel & Almouloud, 2004; Powell & Alqahtani, 2021).

Dentro do campo matemático, a semelhança de figuras está relacionada à homotetia, às relações métricas no triângulo retângulo, à invariância das razões trigonométricas (Jaconiano, Barbosa, Concordido & Costa, 2019; González *et al*., 1990), à demonstração de teoremas matemáticos, como o teorema fundamental da proporcionalidade, e ao teorema de Tales (Pereira, 2017). Nesse sentido, Lima (2011, p. 31) comenta que "o conceito de semelhança, principalmente, de triângulos, ocupa um lugar bem destacado. Os livros em geral definem triângulos semelhantes como aqueles que têm 'ângulos iguais e lados homólogos proporcionais'. Esta definição se estende literalmente para polígonos".

Os triângulos compõem o único grupo de polígonos indeformáveis e "as duas condições que garantem a semelhança ocorrem sempre juntas [...] se os lados forem proporcionais, os ângulos correspondentes já serão automaticamente iguais, e vice-versa" (Machado, 2000, p. 25). Os triângulos apresentam características específicas de semelhança, que servem como base para entender a semelhança dos demais polígonos.

González *et al*. (1990) destacam que os critérios que estabelecem a semelhança de triângulos não estão bem esclarecidos para os sujeitos. Segundo o autor, existe uma interferência da linguagem matemática na linguagem cotidiana porque o uso da palavra "semelhante" tem significados diferentes, dependendo do tipo de contexto da linguagem empregada. Sobre a linguagem matemática, já abordamos como a matemática define figuras semelhantes, porém dois objetos semelhantes são considerados como iguais ou parecidos na linguagem cotidiana, que faz uso dessas expressões para comparar dois objetos semelhantes. Entretanto, do ponto de vista matemático, este conceito é bem mais específico: refere-se a figuras que tenham a mesma forma, podendo ou não ter tamanhos diferentes (Pereira, 2017).

Sobre os dois critérios, a igualdade de ângulos correspondentes e a proporcionalidade dos lados homólogos, González *et al*. (1990, p. 148) destacam:

> O primeiro dos critérios é, talvez, o mais fácil de identificar, salta à vista, mas o segundo, a razão de semelhança entre as figuras, conceito intimamente ligado ao de razão de proporcionalidade entre quantidades, necessita de ser efetivamente trabalhado com muitas atividades significativas o suficiente, para que sua aquisição seja alcançada.

Com base no mapeamento desenvolvido (Brito, 2022), que compõe a metodologia da pesquisa, identificamos algumas investigações que relatam a forma como alunos e (futuros) professores aplicam os conceitos de semelhança e de proporcionalidade em problemas matemáticos.

Galvão, Souza e Miashiro (2016), por exemplo, desenvolveram uma pesquisa sobre funções trigonométricas com licenciandos em matemática. Os autores constataram que a falta de domínio dos licenciandos sobre trigonometria no triângulo retângulo, no teorema de Pitágoras, nas medidas de ângulos (em graus e radianos) e na definição da função seno era resultado da pouca compreensão sobre a semelhança de triângulos.

Outros estudos envolvendo professores que ensinam matemática destacam o uso indiscriminado, e quase exclusivo, da regra de três como método de resolução de problemas geométricos, porém sem considerar os conceitos de proporcionalidade e de semelhança (Costa & Allevato, 2015; Tinoco, 1996). Nesse sentido, discute-se que o ensino de semelhança não deve ficar restrito ao como resolver, mas ao porquê de utilizá-lo a fim de evitar prejuízos à aprendizagem (Jaconiano *et al*., 2019; Menduni-Bortoloti & Barbosa, 2018).

Entendemos que o cenário exposto traz a necessidade de novas práticas no ensino de semelhança de triângulos, de forma que possibilite o desenvolvimento do pensamento proporcional e geométrico dos aprendizes. O conceito de proporcionalidade é muito importante para que as conexões sejam feitas, por ser um conteúdo integrador dos diversos ramos da matemática (Tinoco, 1996). E, mais que um conteúdo a ser ensinado, a proporcionalidade funciona como um "formador" de estruturas cognitivas necessárias para a compreensão de outros conceitos matemáticos, seja no campo numérico, seja no geométrico (Costa & Allevato, 2015). Nesse sentido, González *et al*. (1990) propõem trabalhar o conceito de semelhança a partir de ampliações e reduções de figuras e pela observação de características invariantes e variantes.

Com base na noção dialógica da matemática de Gattegno (1987, p. 10), entendemos que a atividade matemática consiste no "diálogo da mente de uma pessoa consigo mesma" e vai além do habitual "falar consigo", embora esteja relacionado a essa noção. Entretanto, tal noção é mais específica sobre a existência de uma consciência da atividade humana, praticada no que chamamos de ciência. Dessa forma, o autor considera a matemática como sendo "uma das conquistas da mente em ação sobre si mesma [...] é o mais claro dos diálogos da mente consigo mesma. A matemática é criada por matemáticos que conversam primeiro consigo mesmos e uns com os outros" (Gattegno, 1987, p. 16).

Para Gattegno (1987) a atividade matemática ocorre no diálogo da mente consigo mesma sobre observações de objetos, relações entre os objetos e relações entre relações ou dinâmicas. Consideramos que a atividade matemática de (futuros) professores em relação à semelhança de triângulos acontece a partir do diálogo consigo mesmos sobre observações de objetos (ângulos, lados e suas medidas), relações entre os objetos (correspondência dos ângulos, lados e dos pontos) e relações entre relações ou dinâmicas (congruência dos ângulos correspondentes, razão, proporção e proporcionalidade dos lados homólogos, bem como a semelhança entre os triângulos).

Com base na literatura relacionada à temática, consideramos importante estabelecer uma nova abordagem de semelhança de triângulos a partir do uso de AGD com o público de (futuros) professores. A lógica constituída de um AGD enfatiza o desenvolvimento da atividade matemática por meio de figuras em movimento ou deformáveis, como recurso para promover a exploração, a descoberta e a investigação de objetos matemáticos, seja através de *softwares* ou não (Arceo[3] 2009 *apud* Bairral & Barreira, 2017, p. 47). É importante ressaltar que esses processos não ocorrem automaticamente, mas precisam da mediação do professor durante as ações realizadas nos AGD (Arzarello *et al.*, 2002).

Dentre as particularidades de um AGD através de *softwares*, destacamos a possibilidade de arrastar pontos livres e transformar figuras, mantendo ou não as propriedades euclidianas (Bairral & Barreira, 2017). A ação de arrastar auxilia o indivíduo a produzir conjecturas pela observação e exploração dos movimentos de uma figura e pela descoberta de propriedades invariantes (Arzarello *et al*., 2002).

Essas particularidades podem ser potencializadas, ao constituirmos grupos de interação em ambientes virtuais síncronos, trabalhando na resolução de tarefas matemáticas de forma colaborativa (Powell, 2014). Com esse objetivo o VMT foi desenvolvido para que participantes pudessem interagir uns com os outros por meio de um *chat*, construir figuras e arrastar pontos na zona gráfica do GeoGebra.

Desta forma, com o GeoGebra agregado ao VMT, além da interação entre indivíduo e AGD, outros elementos são relacionados, como a interação entre os integrantes do coletivo constituído. Utilizamos o termo 'interação', cunhado de estudos de discurso, como sendo sinônimo de interlocução e no sentido de troca, reflexão e negociação de significados, com possibilidade de ocorrer entre dois ou mais locutores submetidos a normas comuns, seja na forma verbal ou escrita, seja com ou sem uso de tecnologia (Maingueneau, 2004; Oliveira & Bairral, 2020).

A interação relacionada ao uso do VMT tem como foco a colaboração entre os indivíduos, ou seja, a interação colaborativa, na qual o "o grupo se esforça para o trabalho e o aprendizado conjunto" (Oliveira & Bairral, 2020, p. 280), em que os estudantes "aprendem através das suas perguntas, perseguindo conjuntamente linhas de raciocínio, ensinando um ao outro e vendo como os outros estão aprendendo" (Stahl *et al.*, 2008, p. 4). Segundo os mesmos autores, essa forma de interação se distingue da cooperativa no sentido de que esta consiste em repartir a tarefa em subtarefas individuais que são juntadas em resultados parciais e compõem o resultado final. No caso da interação colaborativa a tarefa é realizada de forma conjunta — inclusive o discurso produzido pelo grupo não pertence a um indivíduo, mas ao coletivo constituído.

Além das particularidades e potencialidades de um AGD, vamos considerar os contextos do aluno e do professor, externos e internos. Trataremos na próxima seção do contexto interno. Aqui discorreremos sobre o contexto externo: é composto pelo computador com o AGD, incluindo as funcionalidades básicas de construir e arrastar, os signos que envolvem figuras, o roteiro da tarefa e até mesmo os gestos. Consideramos como signo tudo o que gera algum significado ao sujeito envolvido.

O AGD e suas funcionalidades compõem um micromundo no qual a lógica da geometria euclidiana está embutida (Mariotti, 2000) e é possível produzir traços gráficos, em que propriedades do objeto são preservadas graças ao funcionamento das ferramentas desse micromundo. Chamaremos esse micromundo de artefato (Bussi & Mariotti, 2008), e suas funcionalidades de arrastar serão classificadas como arrasto direto e indireto. Na primeira é possível arrastar um ponto sem interferir em outro, e na segunda existe a interferência no movimento de outros pontos e em elementos construídos a partir do ponto original.

Cabe ressaltar que o significado de artefato não se restringe ao AGD, mas é uma noção

[3] Arceo, E. D. B. (2009). *Geometría dinámica con Cabri-Géomètre*. (3. ed.). Metepec: Editorial Kali.

mais ampla, incluindo todo tipo de criação humana que possui caráter prático, tudo a que um indivíduo atribui uso e ao mesmo tempo transita na esfera do intelecto e do prático e vice-versa (Bussi & Mariotti, 2008).

Na próxima seção discutiremos sobre as modalidades de arrastar e os processos cognitivos (Arzarello *et al.*, 2002) relacionados ao contexto interno. Além disso, abordaremos as diferentes categorias de signos (Bussi & Mariotti, 2008).

3 Referencial Teórico

Partindo do princípio de que os ambientes virtuais *on-line* e síncronos podem proporcionar um espaço favorável ao aprendizado no âmbito individual e coletivo, entendemos que as interações colaborativas e o papel do VMT podem ser analisados através dos aspectos discursivos, das interações do indivíduo com o AGD por meio da ação de arrastar e dos significados que os indivíduos aplicam para cada forma de arrastar.

Assim, Arzarello *et al*. (2002) identificaram sete modalidades de arrastar em implementações com estudantes que utilizaram o Cabri-Géomètre. Os tipos de arrasto identificados são: arrasto aleatório, arrasto limite, arrasto guiado, arrasto no lótus fictício, arrasto vinculado, arrasto em curva e teste de arrasto. Essas modalidades estão relacionadas ao tipo de processo cognitivo ascendente, partindo da construção para a teoria, ou descendente, da teoria para a construção. Além disso, os autores relacionam o objetivo pelo qual o indivíduo arrasta um dado ponto às fases de resolução de um problema, sendo elas: a fase de descoberta, a construção de uma conjectura e a validação de uma conjectura.

Os mesmos autores enfatizam que as modalidades de arrasto podem e devem ser inseridas na cultura da sala de aula, a fim de estarem disponíveis aos estudantes. O Quadro 1 sintetiza as modalidades de arrastar propostas por Arzarello *et al*. (2002) e relaciona as fases de resolução para cada modalidade e os objetivos para os quais são utilizadas, e define cada modalidade segundo o processo cognitivo ascendente ou descendente.

Quadro 1: Síntese de modalidades de arrastar e processos cognitivos envolvidos

Fases da resolução do problema	Modalidades de arrastar	Caracterização	Objetivo pretendido com seu uso
Fase de descoberta	Arrasto aleatório	Consiste em movimentar pontos livres de forma aleatória a fim de descobrir regularidades da figura construída.	Explorar uma determinada tarefa (controle ascendente).
	Arrasto limite	Similar à função de arrasto aleatório, essa modalidade se aplica apenas aos pontos vinculados à figura (pontos semiarrastáveis).	Explorar uma determinada tarefa (controle ascendente).
	Arrasto guiado	Arrasta pontos livres da figura para lhe dar forma específica.	Explorar uma determinada tarefa (controle ascendente).
Construção de conjectura	Arrasto no *locus* fictício	O arrasto é mais intencional e permite descobrir algumas regularidades da figura, porém as propriedades locais ainda não são explícitas, permanecendo em *locus* fictício.	Produção de novas heurísticas e/ou reorganizador lógico de investigações precedentes (Transição de controle ascendente para descendente).
	Arrasto vinculado	O sujeito vincula um ponto ao lugar geométrico desejado e arrasta o ponto para manter a propriedade descoberta.	Torna visível na tela o *locus* fictício. (Transição do controle ascendente para o

			descendente).
Validação de uma conjectura	Arrasto em curva	Marcam-se novos pontos ao longo de uma curva para manter a regularidade da figura.	Controle descendente
	Teste de arrasto	O indivíduo arrasta pontos livres e pontos vinculados a objetos para verificar a permanência das propriedades iniciais.	Controle descendente

Fonte: Elaboração própria com base em Arzarello *et al*. (2002)

De forma prática, em uma atividade com AGD, compreender as modalidades de arrastar pode fornecer aos (futuros) professores ferramentas para analisar os processos cognitivos de aprendizes, acompanhando os momentos de resolução de um problema, que podem ser identificados pelo tipo de arrasto empregado (Arzarello *et al.*, 2002).

Compõem os tipos de arrasto da fase de descoberta o arrasto aleatório, o arrasto limite e o guiado. Nessa fase os aprendizes estão arrastando com o objetivo de explorar uma figura para entender o seu funcionamento. Essas modalidades fazem parte do fluxo de controle ascendente, partindo da construção para a teoria, pela exploração livre de regularidades, invariantes, dentre outros elementos dos objetos (Arzarello *et al*., 2022).

As modalidades de arrastar no *locus* fictício e o arrasto vinculado representam formas mais intencionais de arrastar e podem compor um momento crucial de mudança de controle ascendente para descendente. Os pesquisadores Alqahtani e Powell (2016, 2017b) realizaram um curso de formação com professores de matemática, de forma *on-line* e síncrona no VMTcG, e identificaram que o recurso de arrastar foi utilizado de forma mais proposital, na medida em que os professores não apenas verificavam as propriedades contidas na construção, mas também passavam a testar a validade da construção.

As tarefas propostas por Alqahtani e Powell (2016, 2017b) envolviam triângulos dependentes entre si, em que o arrasto indireto era necessário para a resolução do problema proposto. Os professores participantes da pesquisa utilizaram o recurso de arrastar em conjunto com a janela de álgebra, com o objetivo de entender as dependências das medidas dos ângulos e dos lados. Além disso, os docentes integrantes da pesquisa também " arrastaram um triângulo em cima do outro, ou como os professores chamavam, sobreposição ... de modo que em quase todas as tarefas após esta, eles discutiram alguma forma de congruência e semelhança de objetos" (Alqahtani & Powell, 2017b, p. 32).

Os autores ressaltam a importância de educadores compreenderem como seus alunos se apropriam dos ambientes virtuais colaborativos e como essa apropriação traz outra configuração ao pensamento geométrico dos aprendizes. Esses autores destacam dois aspectos em tarefas com um AGD: a manipulação dos objetos geométricos pelo recurso de arrastar e o discurso com base nas relações e dependências observadas do arrastamento desses objetos. O recurso de arrastar está relacionado ao contexto externo do aluno, ou seja, ao próprio AGD e aos ícones que permitem a manipulação dos objetos. A ação de arrastar está interligada ao discurso dos alunos, pois oportuniza ações que podem se tornar parte do discurso matemático, do pensamento e da comunicação de ideias geométricas (Alqahtani & Powell, 2017b).

Nesse sentido, Bussi e Mariotti (2008) discutem o papel dos artefatos e dos signos em uma dada tarefa matemática, abrangendo o contexto externo (o artefato) e o interno (os signos). Os artefatos atuam externamente e estão relacionados à sua perspectiva prática na tarefa, ou seja, à forma como o indivíduo atribui uso a eles. Por exemplo, há situações que são postas em jogo no uso de um martelo, que, de acordo com o objetivo do seu uso, seja de pregar ou retirar o prego, será necessário ter em conta a aplicação de mais ou menos força, considerando ou não a posição de ambos. Essas situações que são postas em jogo atribuindo uso ao martelo, configuram-no como um artefato. Em seguida, trataremos a respeito do contexto interno.

Além do aparato físico, um artefato como o VMT, através da função de arrastar, pode orientar internamente o comportamento de um indivíduo, ou seja, a sua atividade cognitiva. Apesar de distintos entre si, signo e artefato possuem em comum a função de mediação na resolução de uma tarefa, mas diferenciam-se na forma como orientam o comportamento humano. Vigotski denomina como "internalização" o processo "no qual os indivíduos transformam as atividades externas vinculadas aos artefatos em atividades internas que são ligadas aos signos" (Alqahtani & Powell, 2017a, p. 3), envolvendo, assim, "a reconstrução interna de uma operação externa" (Bussi & Mariotti, 2008, p. 751).

A internalização é conduzida por processos semióticos, o que, em outras palavras, significa que o processo envolve uma mediação semiótica, que consiste não apenas em fomentar a relação do conhecimento matemático com o aluno, mas também compreender os vínculos entre os signos e o conteúdo a ser estudado. Segundo Bussi e Mariotti (2008), existe um sistema de signos — signos de artefato, que relacionam o artefato a uma tarefa específica que se deseja alcançar — que possuem forte vínculo com os procedimentos realizados, e os meios semióticos pelos quais esses signos são produzidos variam desde gestos, palavras ou figuras.

O segundo sistema de signos — denominados signos matemáticos — é paralelo ao anterior e consiste na relação entre artefato e conhecimento matemático, expressa por signos que revelam propriedades embutidas no artefato. Esses dois sistemas não se relacionam espontaneamente, e por isso é importante que o professor entenda a evolução de signos de artefato para signos matemáticos. Em geral, o professor pode explorar os signos elaborados socialmente, com o objetivo de orientar a evolução de signos para o que é reconhecido como matemática, relacionando significados pessoais gerados pelo uso do artefato a significados matemáticos (Bussi & Mariotti, 2008).

Em linhas gerais, o professor que tem domínio tanto sobre os significados pessoais quanto sobre os significados matemáticos, poderá orientar a evolução dos signos do contexto do artefato, relacionados ao artefato e à experiência por seu uso, para signos matemáticos, como definições, conjecturas a serem provadas ou provas matemáticas.

Há uma categoria de signos, descrita por Bussi e Mariotti (2008) como signos pivô. Eles funcionam como pivôs ou dobradiças, pois permitem que signos do contexto do artefato evoluam para o âmbito matemático. Esses signos pertencem tanto ao domínio matemático quanto do artefato. Como o que está em jogo são signos, o professor pode usar os signos pivô como forma de relacionar os significados pessoais de seus alunos, orientando-os aos significados matemáticos. Essa dupla relação é denominada 'potencial semiótico' e representa mais do que relacionar o conhecimento matemático e o aluno, pois demanda um sistema de transformações de signos em outros signos. Daí não se tratar de um processo apenas de mediação, mas de mediação semiótica.

O artefato também desempenha o papel de mediador semiótico, porém não de forma automática, pois é necessária a orientação do professor para a evolução, de signos com ênfase no uso, para signos no contexto matemático. Cabe ressaltar ainda que "qualquer artefato será referido como ferramenta de mediação semiótica, desde que seja (ou se presume que seja) intencionalmente usado pelo professor para mediar um conteúdo matemático por meio de uma intervenção didática planejada" (Bussi & Mariotti, 2008, p. 754).

Apresentamos nesta seção os estudos teóricos que nortearam nossa pesquisa.

Acreditamos que eles podem trazer algumas contribuições para a prática docente no acompanhamento e na análise dos processos cognitivos dos alunos, ao interagirem com o artefato e com outros indivíduos. Na seção seguinte, exporemos os aspectos metodológicos da pesquisa.

4 Abordagem Metodológica

Pautaremos nossa abordagem metodológica, explicitando os caminhos escolhidos durante a pesquisa pelo primeiro autor, sob orientação do segundo. O conhecimento sobre a existência do VMT surgiu através de diálogos entre o autor e seu orientador devido à oportunidade de implementar tarefas que haviam sido planejadas antes do período da pandemia, mas só puderam ser aplicadas no período de isolamento físico. Cabe explicar que inicialmente pretendíamos aplicar uma sequência didática sobre semelhança de triângulos, com uso do GeoGebra para *smartphones*, a alunos do 8.º ano do Ensino Fundamental.

Devido ao período pandêmico e à prática do ensino remoto emergencial, sem perspectiva de retorno às aulas presenciais, foi possível dar continuidade à pesquisa com a participação de estudantes de licenciatura em matemática e mestrandos do PPGEduCIMAT. Ambos os segmentos estavam cursando, em modalidade remota, a disciplina *Ensino e Aprendizagem Matemática em Ambientes Virtuais* no ano de 2020, e essa foi a primeira vivência deles com o VMTcG e com as atividades propostas.

Esse período representou um momento de autoconhecimento do próprio autor como professor e pesquisador, pois necessitou definir novos rumos ao trabalho e conhecer o ambiente VMT. É importante ressaltar que a necessidade de distanciamento e a inserção no VMT nos desafiou a repensar o papel e a participação do professor na interação e no discurso matemático em sala de aula. De igual modo, buscamos compreender de que forma os aprendizes constroem seu conhecimento individualmente e coletivamente, em especial, dando atenção aos arrastos e às interações em grupo.

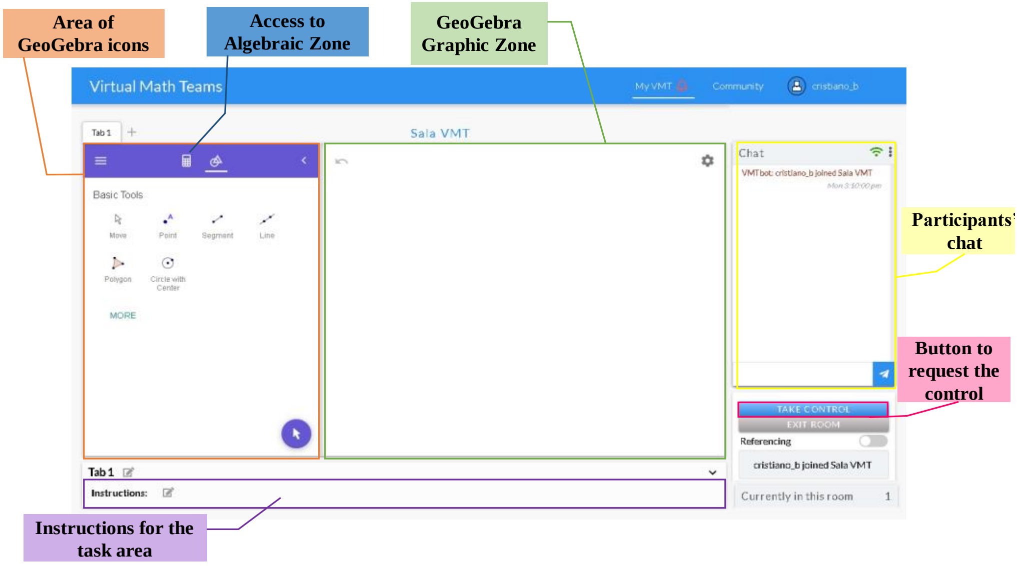
Passamos a fazer as devidas adaptações das tarefas inicialmente propostas para as situações presenciais com uso de *smartphones* para tarefas *on-line* e síncronas. O VMT permite ao usuário criar salas independentes, ou cursos com salas organizadas por turmas. O espaço de trabalho pode ser criado para uso do Desmos ou do GeoGebra. Nesse sentido, as atividades foram planejadas para ocorrer no período médio de duas horas e com a participação de três a quatro usuários por sala. Escolhemos esse modo de organização para favorecer o entendimento entre os participantes em meio ao fluxo elevado de dados gerados na área do *chat*.

A interface do VMTcG é composta de: área de ferramentas do GeoGebra, que denominaremos por ícones, zona gráfica do GeoGebra, zona algébrica, área do *chat*, botão de solicitação do controle, botão para referenciar postagens anteriores no *chat* e área para apresentação das instruções da tarefa. A Figura 1 apresenta a interface de uma sala do VMTcG e as subáreas que a compõem.

O botão de solicitação de controle permite a um usuário por vez utilizar os ícones do GeoGebra para realizar construções na zona gráfica, arrastar pontos e manipular um controle deslizante inserido. Enquanto isso, os demais participantes podem observar e compartilhar suas ideias pelo *chat*. Caso outro participante já tenha selecionado o botão '*take control*', a postagem '*Can I take control?*' é gerada automaticamente no *chat*, e o(s) solicitante(s) deve(m) aguardar a liberação do controle.

Todos os dados gerados pelas funcionalidades de uma sala do VMT são salvos em uma espécie de nuvem do próprio *site*, que pode ser acessada posteriormente, e os dados podem ser revistos em ordem cronológica. Esse recurso chamado de *Replayer* permitiu a análise dos dados das implementações realizadas na pesquisa de Brito (2022), inclusive através de dados em tabelas, gráficos e filtros gerados pelo próprio sistema. As funcionalidades de edição da sala são disponíveis apenas ao professor/elaborador da sala que pode inserir o enunciado de um problema na área para instruções da tarefa.

Figura 1: Subáreas da Interface do VMTcG



Fonte: Elaboração própria a partir do ambiente VMT

De uma sequência didática inicialmente planejada para ocorrer em sete encontros presenciais, passamos a uma sequência didática composta por três tarefas *on-line* e síncronas, com os seguintes objetivos de aprendizagem:

- *Tarefa 1* — Investigar o conceito de congruência de triângulos pela sobreposição de dois triângulos e identificação de ângulos e lados correspondentes.
- *Tarefa 2* — Distinguir fatores de variação e covariação de dois triângulos semelhantes por meio da comparação das razões de seus lados correspondentes.
- *Tarefa 3* — Verificar condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes, a partir da exploração do caso de semelhança de triângulos Ângulo-Ângulo (AA).

Em cada atividade proposta, buscamos nomear as salas do VMTcG sem mencionar o conceito de congruência ou semelhança de triângulos, para permitir a produção de argumentação e justificativa sem interferência direta, apenas através do direcionamento do enunciado da tarefa e, em alguns casos, com a interferência do professor mediador da sala. As tarefas são de natureza fechada, isto é, têm o foco nos procedimentos de construção, nas propriedades envolvidas na construção e nos conceitos já conhecidos pelos participantes (Barreira & Bairral, 2017).

Das três tarefas, nos concentraremos apenas na primeira e na segunda, pois envolvem dois recursos usados por alguns professores em tarefas com o GeoGebra: a malha quadriculada e o controle deslizante. Na próxima seção apresentaremos duas situações que compõem a análise dos dados e discutiremos o referencial teórico com base em uma tarefa *on-line* e síncrona desenvolvida com (futuros) professores de matemática sobre o conceito de semelhança de triângulos.

5 Resultados da análise

Para a análise dos resultados da primeira tarefa, sobre triângulos congruentes, e da segunda tarefa, sobre a razão de semelhança de triângulos, baseamo-nos no aporte teórico de Arzarello *et al*. (2002) para entender os objetivos com os quais os (futuros) professores arrastaram pontos livres de dois triângulos criados sem dependência entre eles e com uso da malha quadriculada.

A unidade de análise utilizada é a palavra, ou seja, os registros escritos dos participantes. E a partir desses registros destacados da interação no *chat*, recuperamos os momentos do uso do recurso de arrastar e associamos aos registros do *chat*. Buscamos as postagens anteriores e posteriores à ação de arrastar e, por fim, cruzamos os dados discursivos e gráficos para interpretar tal ação. Esse mesmo procedimento se deu para análise dos episódios 1 e 2, ou seja, da malha quadriculada e do controle deslizante.

No primeiro episódio, analisaremos a função do roteiro da tarefa, do *chat* e da zona gráfica no processo de mediação semiótica. No segundo episódio, descreveremos a análise pela perspectiva de Bussi e Mariotti (2008) para entender o papel do controle deslizante no processo de mediação semiótica e identificar o signo pivô e a relação dos signos de artefato e matemáticos.

5.1 Episódio 1: arrastando triângulos congruentes sobre a malha quadriculada

A primeira tarefa tinha como proposta a construção de dois triângulos sobre uma malha quadriculada, a comparação dos lados dos triângulos construídos distintamente e o arrasto dos pontos livres e não dependentes para formar triângulos congruentes. Essa tarefa ocorreu no contexto de uma disciplina ofertada pelo segundo autor a alunos de licenciatura de matemática e mestrandos em Educação em Ciências e Matemática no ano de 2020. O professor que mediou a sala foi o primeiro autor. Todas as participantes já haviam interagido no VMTcG em outras tarefas geométricas e possuíam experiência com o GeoGebra. Vamos identificá-las com os seguintes nomes fictícios: Nicole, Maria e Ivone. As duas primeiras eram alunas da licenciatura em matemática e Ivone cursava o mestrado.

Inicialmente todas se organizaram para que cada integrante pudesse participar controlando, uma por vez, o VMT e utilizar as ferramentas de construção. Construíram os dois triângulos e, seguindo o roteiro da tarefa, observaram a influência do movimento de um vértice para a determinação do comprimento dos demais lados e notaram a não dependência entre os triângulos.

As participantes Maria e Nicole ponderaram sobre a pergunta do roteiro: “a) Com a ferramenta selecionada, movimentem livremente os pontos dos vértices do triângulo e comentem o que vocês observam”. O Quadro 2 apresenta o trecho da interação entre as participantes.

Quadro 2: Fragmento (84-90, 98) retirado do *chat* do episódio 1

Índice	Participante	Postagem no *chat*
84	Nicole	Sobre a 5-a) os dois triângulos têm ângulos com medidas diferentes e o comprimento dos lados, diferente, porém, se os dois estivessem, de acordo com a malha, forem construídos nas mesmas posições, seriam iguais.
85	Nicole	Eu gostaria de fazer, mas não consigo pegar o controle

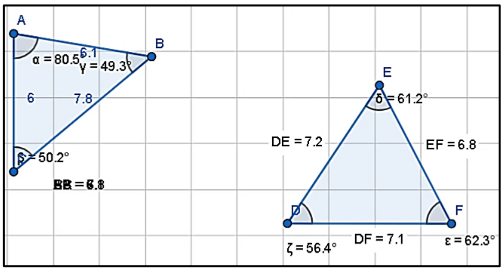
86	Nicole	[4]Posso pegar o controle?
87	Maria	Então o triângulo DEF deveria ter sido construído semelhante ao primeiro?
88	Nicole	Não sei, Maria. Mas se fosse construído semelhante, eles teriam ângulos e lados iguais.
89	Nicole	No momento, são triângulos completamente diferentes.
90	Maria	Entendi, achei que fosse para fazer diferente.
98	Ivone	Questão 5, letra B: Os triângulos ABC e DEF têm o comprimento dos lados e os ângulos iguais ao se movimentar na malha, observando a medida. Os lados AB=DE, BC=EF e AB=DF, nesse caso os triângulos podem ser escalenos ou isósceles.

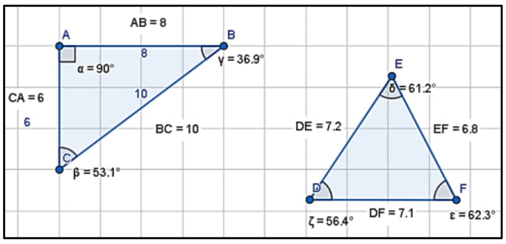
Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do VMT

As três discutiram sobre a possibilidade de igualar as medidas dos lados e dos ângulos pelo movimento dos pontos sobre a malha quadriculada. E em certo ponto buscaram interpretar o objetivo da tarefa (Quadro 2, índice 87). Tal questionamento possibilitou a interação entre as participantes na troca de informações sobre as propriedades dos triângulos que denominaram *semelhantes*, com ângulos e lados de medidas iguais (Quadro 2, índice 88). As observações de cada participante foram compartilhadas no *chat* com as demais integrantes do grupo, e através desse movimento emergiram conjecturas na busca de solucionar o problema.

Enquanto Maria e Nicole discutiram sobre o uso da malha quadriculada como uma forma de construir triângulos semelhantes (Quadro 2, índices 84-90), Ivone não havia se manifestado porque estava realizando modificações na zona gráfica. Porém, as ações tomadas por Ivone foram colocadas em prática devido às ideias compartilhadas no *chat* pelas demais integrantes sobre a possibilidade de colocar os vértices dos triângulos nas mesmas posições da malha quadriculada e formar triângulos iguais. O Quadro3 ilustra o momento em que Ivone utiliza a malha quadriculada seguindo as ideias compartilhadas por Nicole e Maria.

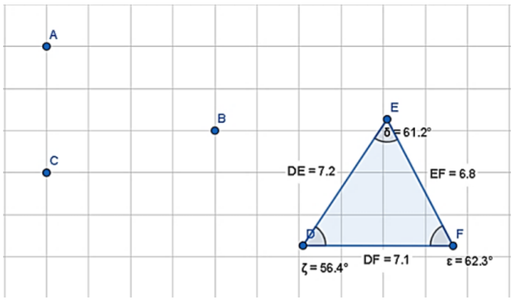
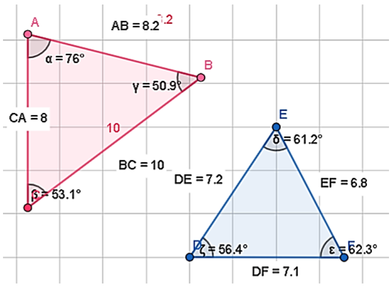
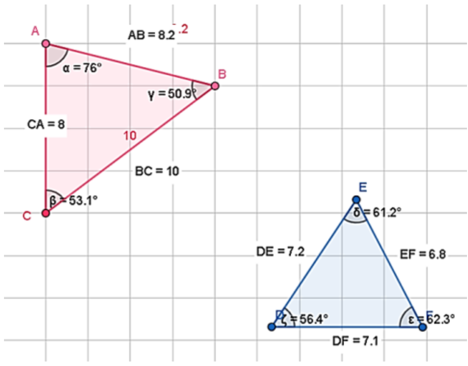
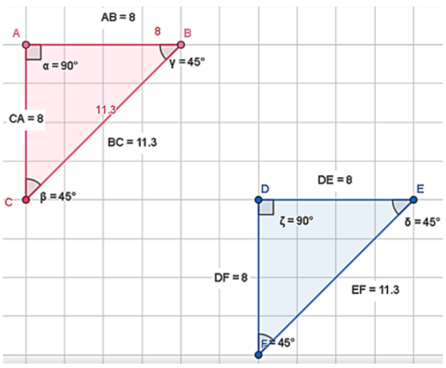
Quadro 3: Processos utilizados por Ivone ao arrastar sobre a malha quadriculada

<table>
<tr><th>Parâmetro</th><th>Captura do Replayer</th><th>Procedimentos de arrastar na malha</th></tr>
<tr><td>1</td><td>


(A)


(B)
</td><td>Ivone arrasta DEF e ABC sem alterar medidas (1A). Em seguida arrasta pontos A, B e C, formando triângulo retângulo (1B).</td></tr>
</table>

[4] O registro na plataforma está em inglês: *Can I take control?*.

2		Ivone reconstrói ABC, adicionando os pontos na malha quadriculada.
3		Ivone arrasta ponto C e depois o triângulo ABC, mantendo medidas.
4		Ivone arrasta ABC na malha, mantendo suas medidas, e arrasta DEF, mantendo medidas.
5		Ivone arrasta pontos livres dos triângulos na malha para formar triângulos retângulos isósceles com medidas iguais dos lados e ângulos correspondentes.

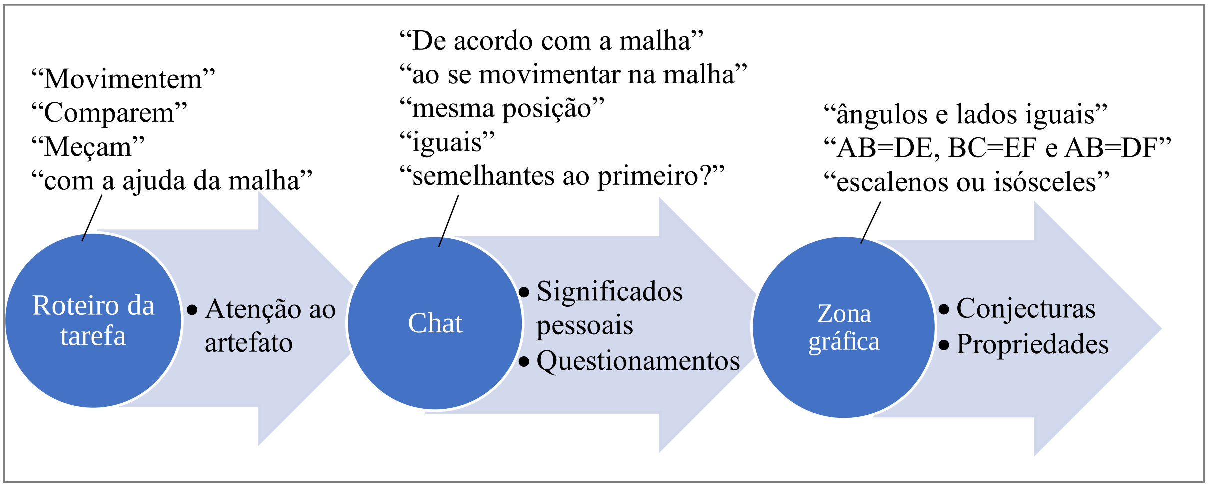
Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do *Replayer*

A sequência dos parâmetros de 1 a 5 apresenta a forma como Ivone arrastou os pontos livres da figura sobre a malha quadriculada para: i) formar um triângulo retângulo (Quadro 3, parâmetro 1, Figura B), ii) construir triângulo (Quadro 3, parâmetro 2), iii) ampliar a forma de arrasto na malha e reposicionar triângulos sem alterar medidas (Quadro 3, parâmetros 3 e 4) e criar estratégias para o próximo movimento, iv) construir o segundo triângulo retângulo isósceles congruente ao primeiro (Quadro 3, parâmetro 5).

As ações de Ivone estão relacionadas à continuidade das interações iniciadas no *chat* pelas outras integrantes, o que se concretiza na construção do triângulo retângulo isósceles e na postagem seguinte (Quadro 2, índice 98). As informações postas por Ivone confirmam a conjectura de Nicole, que relacionava a posição dos vértices dos triângulos na malha quadriculada e a igualdade das medidas dos lados. Ivone ainda adiciona uma informação que não havia sido inserida no *chat* sobre os tipos de triângulos que se enquadram na situação observada.

Esse trecho mostra a inter-relação entre os espaços do VMT, a zona algébrica e o *chat*, pois as observações dos participantes foram compartilhadas no *chat* e aplicadas na zona gráfica. Além disso, o roteiro da tarefa direcionou a atenção para o objetivo desta e para o próprio artefato, pela ação de arrastar, gerando signos relacionados ao uso do artefato. A partir desse uso surgiram questionamentos que possibilitaram explorar as possibilidades apontadas através do arrasto guiado, com objetivo de fazer uma construção específica de triângulos retângulos isósceles. A Figura 2 sintetiza o processo de mediação semiótica descrito no episódio analisado.

Figura 2: Processo de mediação semiótica composto por roteiro, *chat* e zona gráfica



Fonte: Elaboração Própria

Destacamos que cada componente tem o seu papel específico no processo de mediação, e que cada componente apoia um ao outro para o avanço das participantes durante a tarefa. O roteiro da tarefa desempenhou o papel de guiá-las tanto para o objetivo da tarefa quanto para o uso do VMTcG pelo recurso de arrastar e da malha quadriculada principalmente. Isso é evidenciado pelo uso que fizemos, no roteiro, das expressões "movimentem", "comparem" e "com a ajuda da malha movimentem". Inclusive as participantes utilizaram trechos do roteiro para solucionar ou pontuar os passos que estavam resolvendo (Quadro 2, índice 98).

Como a tarefa envolveu a construção e a manipulação de triângulos com pontos livres, durante sua realização as participantes enfatizaram a funcionalidade básica de um AGD — o movimento — com possibilidade de construir ou não triângulos congruentes. Como o movimento de um triângulo não implicou na alteração do outro, o papel de arrastar foi de evidenciar as propriedades de cada triângulo individualmente.

O *chat* foi utilizado para compartilhar os significados pessoais, interpretar o que as colegas estavam dizendo ou fazendo, informar observações e propriedades. Juntamente com o roteiro da tarefa, o recurso de arrastar foi utilizado para construir alguns tipos de triângulos congruentes, com o uso da malha quadriculada, que funcionou como um tipo de medida de comparação entre os lados dos triângulos.

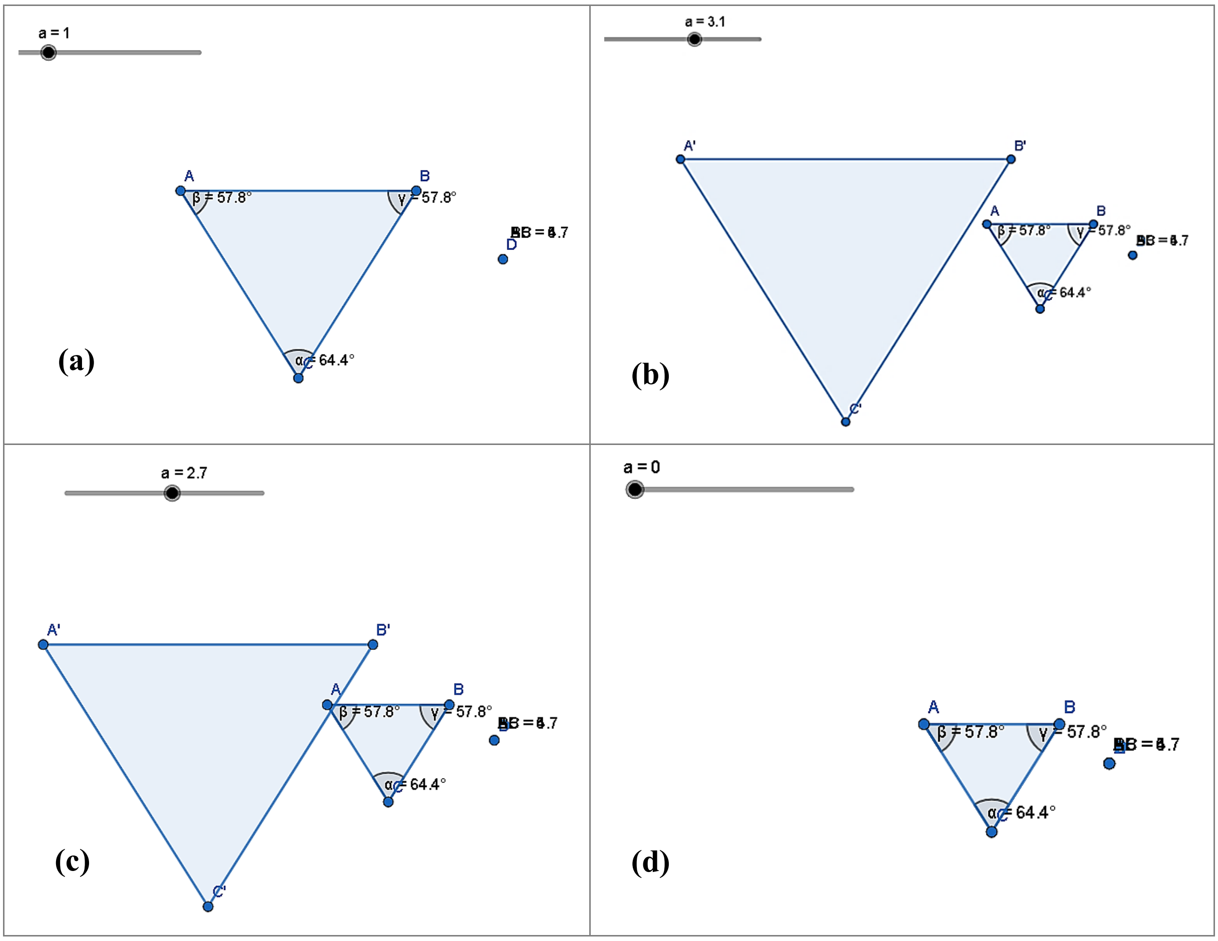
5.2 Episódio 2: controle deslizante e a razão de semelhança

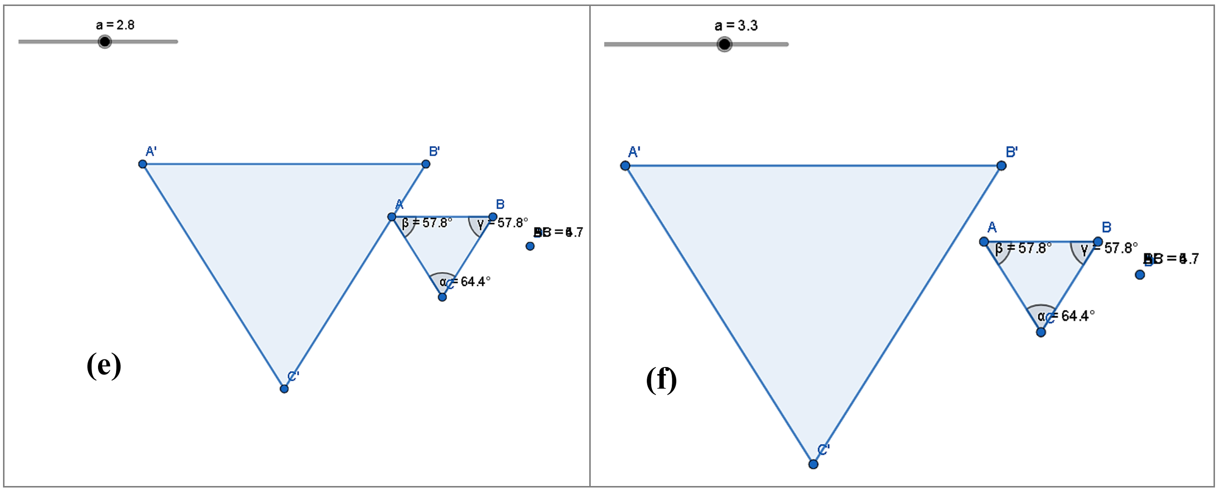
Neste segundo episódio que compõe a aplicação da segunda tarefa da sequência didática, três (futuros) professores utilizaram o controle deslizante para explorar a razão de semelhança entre dois triângulos. O objetivo da tarefa era construir um triângulo qualquer, um controle deslizante, e um segundo triângulo dependente do primeiro, pela função de “homotetia” do GeoGebra. A proposta do roteiro foi direcionar os participantes a explorar as propriedades angulares e da razão entre o comprimento dos lados dos triângulos semelhantes.

A análise desse episódio teve como objetivo compreender o papel do controle deslizante no processo de mediação semiótica. Para isso buscamos interpretar o objetivo do arrasto das participantes através do cruzamento dos registros escritos no *chat*, anteriores e posteriores ao movimento de arrastar o controle deslizante.

Nicole e Maria, que participaram da tarefa anterior, também estavam na tarefa com o controle deslizante. A equipe era formada apenas por licenciandos, com os seguintes nomes fictícios: Júlio, Suzi, Nicole e Maria. Júlio entrou uma hora antes do horário programado e apontou suas observações iniciais no *chat*. Algumas delas foram consideradas pelo grupo durante a tarefa proposta. Após a construção do controle deslizante e dos triângulos dependentes, os integrantes do grupo começaram a alterar o valor do controle deslizante e, em seguida, compartilharam no *chat* as suas observações. O quadro 4 apresenta os dados do *Replayer* ocorridos durante a exploração do controle deslizante por Nicole.

Quadro 4: Processo de alteração dos valores do controle deslizante por Nicole (19:44:05 – 19:44:45)





Fonte: Elaboração própria com base nos dados do *Replayer*

Os valores explorados por Nicole pertencem ao intervalo entre zero e cinco (Quadro 4, figura a até d) e depois se concentram nos valores maiores que um (Quadro 4, figura e até f). O mesmo padrão de variação dos valores se repetiu no momento posterior, em que Maria arrastou primeiro entre os intervalos de um a cinco e depois alterou até o valor zero e para valores maiores que cinco. Ambas exploraram de forma mais ampla, entre o valor inicial e o final do controle deslizante. Como consequência disso, as observações feitas no *chat* são de aspectos mais genéricos. Maria observou a existência da relação do movimento do controle deslizante com o aumento e a diminuição do triângulo A'B'C', e Nicole conjecturou sobre o afastamento ou a aproximação do triângulo ao D, ponto em que foi aplicada a função de homotetia do GeoGebra, na medida em que variou os valores do controle deslizante.

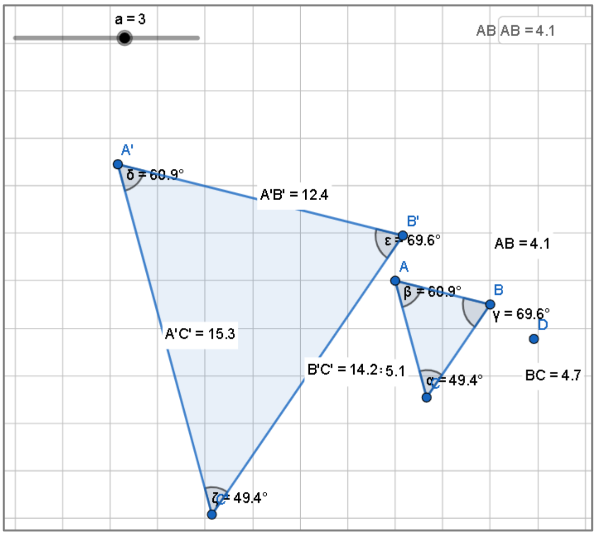
Maria e Nicole geraram signos diferentes, apesar do uso do mesmo artefato, já que estavam compartilhando com o grupo os seus significados pessoais resultantes da experiência de cada uma com o controle deslizante. Posteriormente os participantes exploraram valores mais específicos do controle deslizante. Eles notaram casos degenerados, como a=1 e a=0, e observaram que triângulos são congruentes e que no segundo caso os pontos do triângulo têm distância nula ao ponto D. Em relação ao primeiro momento, houve um avanço dos aspectos mais genéricos aos mais específicos, à medida que os significados pessoais começaram a convergir.

Os participantes ainda não haviam interagido sobre o intervalo entre um e cinco e, também, não mediram o comprimento dos lados, apenas dos ângulos internos. Utilizaram o arrasto aleatório, para descobrir regularidades da figura, e pela reação do ambiente identificaram os ângulos correspondentes e a igualdade deles. Os integrantes do grupo mediram o comprimento dos lados dos triângulos.

No passo 8 do roteiro da tarefa solicitávamos aos participantes: "Comparem os comprimentos dos lados do triângulo A'B'C' com os lados correspondentes do triângulo ABC. Para isso, selecionem o campo de entrada com ícone a=1. Nesse campo calculem a razão do segmento AB por A'B'". Os participantes tentaram inserir a razão do comprimento dos lados na caixa de entrada de comandos, mas não tiveram êxito, por conta de uma limitação do VMT, que não disponibilizou a inserção de fórmulas.

Os participantes questionaram o professor mediador sobre um problema com a caixa de entrada de comandos do GeoGebra, e foram orientados a utilizar a calculadora de seus computadores para obter a razão entre os lados correspondentes. A configuração final da zona gráfica neste instante da tarefa é ilustrada na Figura 3.

Figura 3: Configuração da zona gráfica, cujos dados foram extraídos para uso na calculadora (146-167)



Fonte: Dados do *Replayer*

O Quadro 5 apresenta o trecho da interação entre as participantes do grupo e o mediador, Autor, ao passo que elas utilizaram as suas calculadoras no computador ou no *smartphone* e compartilharam seus resultados no *chat*. Foram identificados signos de artefato e signos matemáticos. Representamos esses signos pelos símbolos “<” e “>”. O signo pivô, o controle deslizante <a>, está representado entre as colunas do quadro em caixas de texto.

Quadro 5: Síntese da evolução de signos de artefato para signos matemáticos

Índice	Participante	Postagem no *chat*	Signo de artefato	Signo matemático
148	Autor	Os outros grupos também tiveram problema com essa ferramenta. Vocês podem utilizar a calculadora do pc caso não estejam conseguindo por essa ferramenta	**<a>**	
149	Nicole	Porque a razão seria A'B'=**a***AB	<A’B’>, <a>	<A'B'=a*AB>
150	Nicole	E assim, para cada lado	<lado>	
151	Maria	Tá bem		
152	Maria	8) razão AB/A'B'= 0,3307		<razão>
153	Maria	Aproximado esse valor		
154	Nicole	8) a razão para **a**=3, A'B'/AB, é 3	<a=3>	<A'B'/AB, é 3>
155	Suzi	É AB/A'B'		<AB/A'B'=0,3307>
156	Maria	Eu fiz a razão para **a**=3, mas para AB/A'B'=0,3307 aproximadamente		<AB/A'B' também deu

157	Nicole	Fazendo AB/A'B' também deu 0,3306		0,3306> <BC/B'C'=0,3309>
158	Maria	9) **a**=3, razão BC/B'C'= 0,3309	<a=3>	
159	Nicole	BC/B'C'= 0,3309		<AC/A'C'=0,33333>
160	Maria	9) **a**=3, razão AC/A'C'= 0,33333	<a=3>	
161	Nicole	AC/A'C'= 0,333...	**<a>**	<1/3>
162	Nicole	Para mim, a razão de AC e A'C' é a mais precisa, porque seria 1/3 que é exatamente 0,333...		
163	Autor	Esse resultado tem alguma coisa a ver com o valor de "**a**"?	<a>	
164	Nicole	Eu acho que **a** é a razão	<a> **<a>**	<razão>
165	Maria	Sim, alterando o valor de **a** o triângulo A'B'C' muda de tamanho, logo a razão muda	<triângulo A'B'C'>	
166	Nicole	Por isso disse que a razão de ABC para A'B'C' é 1/3	**<a>**	<razão de ABC para AB'C' é 1/3>
167	Nicole	Agora dá pra ver pelo lado AC=6, como **a**=4, então A'C'=24		

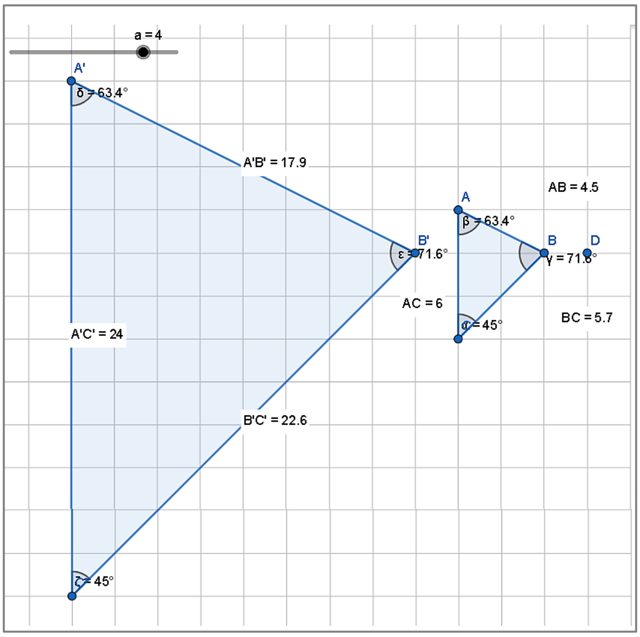
Fonte: Elaboração própria com base nos dados gerados no VMT

Diversos signos de artefato foram gerados pelas participantes, relacionados às construções manipuladas na zona gráfica. Da mesma forma, signos matemáticos foram gerados com referência ao valor obtido pela razão dos lados correspondentes, representados pelos números na forma decimal. O signo <a> do controle deslizante foi frequentemente referenciado e desempenhou o papel de conectar os dois contextos para promover a passagem dos significados pessoais aos significados matemáticos representados pelas respectivas razões dos lados dos triângulos.

Nicole percebeu que, realizando a razão do lado AB para o A'B', os valores estavam próximos da representação decimal 0,333 ou 1/3 na forma fracionária (Quadro 5, índice 162). Notando que o controle deslizante estava com valor igual a três, Nicole conjecturou que o valor da razão inversa de 1/3 estava sendo representado pelo valor do controle deslizante <a=3> (Quadro 5, índice 154). Sendo assim, propôs aos colegas que realizassem o cálculo da razão de A'B' para AB.

Ainda registramos que a participante Nicole voltou a manipular o controle deslizante e, de forma mais intencional, modificou o controle deslizante para o valor inteiro <a=4> e obteve o comprimento AC = 6 e A'C = 24, conforme é mostrado na Figura 4.

Figura 4: Configuração da zona gráfica que compõe o processo descendente



Fonte: Dados do *Replayer*

Desta forma Nicole concluiu que A’C é igual ao produto de <a> pelo comprimento do segmento AC (Quadro 5, índices 149, 167). Nicole, portanto, utilizou um processo de fluxo descendente, da teoria para a construção, verificando que a propriedade era válida e se mantinha para outras medidas dos lados dos triângulos. Nesse processo a calculadora foi utilizada com a finalidade de construir uma conjectura sobre a razão do comprimento dos lados de A’B’C’ por ABC, e o processo de alterar os valores do controle deslizante teve papel de auxiliar na produção de conjecturas e de validar uma propriedade observada.

6 Conclusões

Neste artigo apresentamos os referenciais teóricos que embasaram a pesquisa de dissertação de mestrado já concluída sobre licenciandos e professores interagindo no VMTcG em atividade de semelhança de triângulos. Acreditamos que as bases teóricas abordadas podem ser úteis para (futuros) professores na criação de estratégias discursivas para promover a continuidade da interação em uma tarefa e acompanhar a fase de resolução da tarefa e os processos cognitivos de seus alunos. Ainda se torna útil a compreensão do processo de mediação semiótica para avaliar a evolução de signos de artefato a signos matemáticos por meio de um signo pivô.

No episódio 1 concentramos a análise no papel da malha quadriculada em uma tarefa geométrica. Em conjunto com o recurso de arrastar e das medidas dos triângulos, a malha quadriculada funcionou como uma medida padrão, possibilitando construir triângulos congruentes de forma direta. Contudo, a não dependência entre os triângulos e o uso da malha quadriculada limitaram a exploração a algumas propriedades e relações de aspecto mais global e restritas a alguns tipos de triângulos. O fluxo de pensamento identificado foi o ascendente, da construção para a teoria, e a resolução da tarefa ficou restrita à fase de descoberta.

No episódio 2, a partir das medidas dos lados e do cálculo das razões com a calculadora, os participantes construíram a conjectura da proporção dos lados correspondentes. O uso do controle deslizante possibilitou explorar aproximações, inferências sobre medidas e a noção de razão como fração, análise de casos globais e degenerados (a = 1 e a = 0). Os processos de pensamento envolvidos no uso do controle deslizante podem assumir uma forma mais potente, pois permitem não apenas a observação global, mas também a verificação. Os tipos de fluxo de pensamento identificados foram o ascendente e o descendente, e propiciaram explorar, construir conjecturas e verificar intencionalmente as suas suposições.

Em síntese, com base no referencial teórico da pesquisa foi possível ter uma noção do processo de mediação semiótica e dos processos de pensamento envolvidos na ação de arrastar, por pontos livres ou pelo controle deslizante. Acreditamos que este artigo possa contribuir para que outros professores de matemática explorem o potencial semiótico de tarefas geométricas com ou sem o uso do VMTcG e possam ajudar seus alunos no aprendizado de semelhança de triângulos e outros temas da geometria. Ressaltamos a importância do VMTcG como um ambiente de espaços inter-relacionados que possibilita um processo interativo constante, em que os próprios sujeitos exploram, interpretam e verificam seus pensamentos.

Destacamos que, por se tratar de um sistema robusto, envolvendo funcionalidades diversas, é exigida uma boa conexão para que as tarefas ocorram sem travamentos. O ambiente do VMT está em constante construção e conta com uma equipe de suporte técnico que recebe sugestões e providencia soluções aos problemas comunicados pelos usuários. Algumas sugestões foram feitas através de nossa pesquisa, incluindo a disponibilização da caixa de entrada de comandos do VMTcG, conforme o problema apresentado no episódio 2. A limitação foi solucionada, e já é possível inserir comandos de razões dos lados diretamente no ambiente.

A presente pesquisa de mestrado profissional teve como produto educacional[5] a *Sequência didática sobre semelhança de triângulos no ambiente Virtual Math Teams*. Nele apresentamos essas e outras tarefas propostas, discutimos o processo semiótico envolvido em cada tarefa e sugestões aos professores. Convidamos o leitor a conhecer, desenvolver e adaptar as tarefas com o VMT em suas turmas. Encerramos, salientando que o VMTcG é mais um cenário que faz parte da formação, e, portanto, não presumimos ser ele o único, porém mais um campo de exploração de conceitos matemáticos.

Referências

Alqahtani, M. M. & Powell, A. B. (2016). Instrumental appropriation of a collaborative, dynamic-geometry environment and geometrical understanding. *International Journal of Education in Mathematics*, *Science and Technology*, *4*(2), 72-83.

Alqahtani, M. M. & Powell, A. B. (2017a). Mediational activities in a dynamic geometry environment and teachers' specialized content knowledge. *Journal of Mathematical Behavior*, 48, 77-94.

Alqahtani, M. M. & Powell, A. B. (2017b). Teachers' instrumental genesis and their geometrical understanding in a dynamic geometry environment. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 3, 9-38.

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D. & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *ZDM*, *34*(3), 66-72.

Bairral, M. A. & Barreira, J. C. F. (2017). Algumas particularidades de ambientes de geometria dinâmica na educação geométrica. *Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo*, *6*(2), 46-64.

BRITO, C. S. (2022). *Licenciandos e professores de matemática interagindo no VMTcG em*

[5] Disponível em: https://gepeticem.ufrrj.br/sequencia-didatica-sobre-semelhanca-de-triangulos-no-ambiente-virtual-math-teams, acesso em 24 abr. 2022.

atividades de semelhança de triângulos. 2022. 152f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Seropédica, RJ.

Bussi, M. G. B. & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In: L. D. English (Org.). *Handbook of international research in mathematics education*. (2a. ed., pp.746-783). Abigdon, Oxon: Routledge.

Costa, M. S. & Allevato, N. S. G. (2011). O conceito de proporcionalidade através da resolução de problemas de geometria: perspectivas didáticas de (futuros) professores de Matemática em formação inicial. In: *Anais do 2º Seminário em Resolução de Problemas* (pp.1-13). Rio Claro, SP.

Galvão, M. E. E. L., Souza, V. H. G. & Miashiro, P. M. (2016). A transição das razões para as funções trigonométricas. *Bolema*, *30*(56), 1127-1144.

Gattegno, C. (1987). *The science of education: Part 1: Theoretical considerations* (2a. ed). New York, NY: Educational Solutions.

González, R. L., Nieto, L. B., García, M. N., Pesquero, C. S., Zurita, L. M., & García, L. M. C. (1990). *Proporcionalidad geométrica y semejanza*. In: Grupo Beta. Madri: Sintesis.

Jaconiano, E. A., Barbosa, A. C., Costa, M. V. T, & Concordido, C. F. R. (2019). Resolução de problemas de proporcionalidade por meio da redução à unidade. *Educação Matemática em Revista*, *24*(61), 98-113.

Lima, E. L. *Medida e forma em geometria: comprimento, área, volume e semelhança.* (4a. ed.). Rio de Janeiro, RJ: SBM, 2011.

Machado, N. J. (2000). *Semelhança não é mera coincidência*. São Paulo, SP: Scipione.

Maciel, A. C. & Almouloud, S. A. (2004). Semelhança de figuras planas: uma proposta de ensino In: *Anais do 8º Encontro Nacional de Ensino de Matemática* (pp.1-12). Recife, PE.

Maingueneau, D. (2000). *Termos-chave da análise do discurso.* Tradução de M. V. Barbosa & M. E. A. T. Lima. Belo Horizonte, MG: Editora UFMG.

Mariotti, M. A. (2000). Introduction to Proof: the Mediation of a Dynamic Software Environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 25-53.

Menduni-Bortoloti, R. D. & Barbosa, J. C. (2018). Matemática para o ensino do conceito de proporcionalidade a partir de um estudo do conceito. *Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, *20*(1), 269-293.

Oliveira, R. & Bairral, M. (2020). Interações em um ambiente de aprendizagem online e síncrono: que tarefa propor com o GeoGebra? *Paradigma*, *61*(2), 277-304.

Pereira, M. F. F. *Uma sequência didática para ensino de semelhança de figuras.* (2017). 166f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). Universidade do Estado do Pará. Belém, PA.

Powell, A. B. (2014). Construção colaborativa do conhecimento tecnológico, pedagógico e do conteúdo de professores de matemática. *Boletim Gepem*, 64, 1-19.

Powell, A. B. & Alqahtani, M. M. (2021). *Estudantes usando geometria dinâmica e construindo critérios necessários para semelhança e congruência de triângulos.* In: M. A. Bairral & M. P. Henrique. (Org.). *Smartphones com toques da educação matemática: mãos que pensam, inovam, ensinam, aprendem e pesquisam.* (1a. ed., pp. 33-42). Curitiba, PR: CRV.

Stahl, G., Koschmann, T. & Suthers, D. (2008). Aprendizagem colaborativa com suporte computacional: Uma perspectiva histórica. *Boletim Gepem*, 53, 11-42.

Tinoco, L. A. A. (1996). *Razões e proporções*. Rio de Janeiro, RJ: Editora UFRJ.