Sociedade Brasileira de
Educação Matemática

RIPEM

A validação do conhecimento matemático constituído com tarefas exploratórias e com tarefas investigativas em sala de aula

Paulo Wichnoski
Universidade Estadual do Paraná
Porto União, SC — Brasil
paulo.wichnoski@ies.unespar.edu.br
0000-0003-1183-0897

Samuel Willian Schwertner Costiche
Universidade Federal do Paraná
Palotina, PR — Brasil
samuel.costiche@ufpr.br
0000-0002-9495-1944

2238-0345

10.37001/ripem.v14i2.3754

Recebido • 25/01/2024
Aprovado • 15/04/2024
Publicado • 11/08/2024

Editor • Gilberto Januario

Resumo: O discurso de incentivo à validação do conhecimento matemático constituído em sala de aula é recorrente na literatura sobre o tema. Dessa premissa, neste artigo, o objetivo é compreender como ela (a validação) mostra-se em práticas de ensino efetivadas com tarefas exploratórias e tarefas investigativas, comunicadas em produções científicas publicadas em periódicos. A abordagem de pesquisa assumida é qualitativa, segundo a visão fenomenológica; e o modo como interpretamos os dados é de cunho hermenêutico. Por ocasião do realizado, a validação do conhecimento matemático constituído com tarefas exploratórias e com tarefas investigativas mostrou-se como ausência, como linguagem, como prática empírica, como prática social e como demonstração. Os modos pelos quais a validação manifestou-se, ainda que possam estar relacionados entre si, mostram dimensões epistemológicas distintas ao contemplarem diferentes técnicas e diferentes graus de formalidade para comunicar a legitimidade do conhecimento constituído.

Palavras-chave: Filosofia da Educação Matemática. Ensino de Matemática. Demonstração.

Validating the constitution of mathematical knowledge through exploratory and investigative tasks in the classroom

Abstract: The discourse encouraging the validation of mathematical knowledge established in the classroom is recurrent in literature. From this premise, this work, aims to understand how it is expressed in teaching practices through exploratory and investigative tasks found in scientific productions published in journals. The research approach is qualitative, according to the phenomenological view, and the interpretation of the data is hermeneutic. On this occasion, the validation of mathematical knowledge constituted exploratory tasks, and investigative tasks proved to be absent, such as language, empirical practice, social practice, and demonstration. Although they may be related, how validation manifests shows us distinct epistemological dimensions, as it contemplates different techniques and levels of formality to communicate the legitimacy of the constituted knowledge.

Keywords: Philosophy of Mathematical Education. Math Teaching. Demonstration.

Validación de conocimientos matemáticos constituidos con tareas exploratorias y tareas investigativas en el aula

Resumen: El discurso que incentiva la validación de los conocimientos matemáticos establecidos en el aula es recurrente en la literatura sobre el tema. A partir de esta premisa, en este artículo el objetivo es comprender cómo ésta (la validación) se manifiesta en las prácticas docentes realizadas con tareas exploratorias y tareas investigativas, comunicadas en producciones científicas publicadas en revistas. El enfoque de investigación adoptado es cualitativo, según la visión fenomenológica; y la forma en que interpretamos los datos es de naturaleza hermenéutica. Con motivo de esto, la validación del conocimiento matemático constituida con tareas exploratorias y tareas investigativas resultó ser una ausencia, como lenguaje, como práctica empírica, como práctica social y como demostración. Las formas en que se manifestó la validación, si bien pueden estar relacionadas entre sí, muestran distintas dimensiones epistemológicas al contemplar diferentes técnicas y diferentes grados de formalidad para comunicar la legitimidad del conocimiento constituido.

Palabras clave: Filosofía de la Educación Matemática. Enseñanza de las Matemáticas. Demostración.

1 Introdução

O conhecimento matemático há muito cristaliza-se em enunciados axiomáticos, cujo valor epistêmico é sustentado pelos parâmetros da lógica dedutiva e comunicado com a retórica da demonstração. Ainda que haja certo contrassenso sobre sua ontologia, é consenso entre os cientistas matemáticos que ela (a demonstração) é elemento fundamental no processo de construção e validação da matemática.

A propósito de uma fenomenologia da Investigação Matemática, a pesquisa de doutorado de Wichnoski (2021) revelou que a prática científica de produção do conhecimento matemático é inspiradora do modo pelo qual a Investigação Matemática é compreendida na Educação Matemática, e que, nela, a demonstração é fundamental e importante para a validação das conjecturas. Em outros termos, revelou a compreensão de que na perspectiva da Investigação Matemática na Educação Matemática, o valor epistêmico de uma conjectura instaura-se por demonstrações. Todavia, não foi possível aclarar como ela é compreendida na seara da Investigação Matemática, tampouco o "rigor com que ela deva ser feita (ou requerida) nos diferentes níveis de escolaridade" (Wichnoski, 2021, p. 149).

Na referida pesquisa, o que se mostrou foram apenas "indícios de que uma demonstração é um processo que avança para a formalização do fazer Matemática, por meio de deduções e argumentos lógicos" (Wichnoski, 2021, p. 147), e, por outra mão, de modo idiossincrásico, que ela pode ser flexibilizada, "retirando o peso do rigor e da formalização Matemática, sem retirar a sua importância enquanto capacidade de comunicação matemática" (Wichnoski, 2021, pp. 147-148). Esse antagonismo no entendimento do que vem a ser a demonstração no âmbito da Investigação Matemática, é provocador de inquietações que se abrem em possibilidades de pesquisa, e uma delas remete para a compreensão dos modos como ela se manifesta em práticas de ensino e aprendizagem da Matemática em sala de aula.

Os textos que versam sobre o assunto, ao menos aqueles de maior circulação na área, referem esse momento como *demonstrar*, como *provar* (Ponte, 2003; Mata-Pereira & Ponte, 2018), como *mostrar* (Brunheira & Ponte, 2019), e como *justificar* (Ponte, Brocardo & Oliveira, 2013). Com isso, demo-nos conta de que, ao longo dos anos, diferentes expressões têm sido usadas para designar o mesmo elemento: a demonstração; o que nos permite considerá-la, no âmbito das pesquisas publicadas, como semelhante a essas adjetivações.

Demonstrar. No léxico, esse termo significa "provar mediante raciocínio concludente; comprovar [...] mostrar" (Ferreira, Anjos, Ferreira, Geiger & Barcellos, 2010, p. 225). Também no sentido léxico, *justificar* é relativo a "demonstrar ou provar [...] apresentar a razão de ser de (procedimento, modo de pensar, etc.) ou a explicação para (fato, etc.)" (Ferreira *et. al*, 2010, p. 450). Note-se que os significados de *demonstrar, provar, mostrar* e *justificar* entrelaçam-se nessas definições e expressam um sentido comum: a ideia de tornar legítimo aquilo que se faz. Esse pensar nos direciona a compreendê-las como modos de *validar*, o que implica enfocar a demonstração do ponto de vista da validação.

A pesquisa de Wichnoski (2021) constituiu-se com obras acadêmicas significativas publicadas entre os anos de 1996 e 2013, as quais assumiram as tarefas exploratórias como modos possíveis de estar com a Investigação Matemática em sala de aula, sobretudo nas primeiras experiências com esse tipo de trabalho. Entretanto, no contexto mais recente das pesquisas em Educação Matemática, a natureza das tarefas exploratórias tem se constituído o principal argumento para colocar em voga outro paradigma de ensino: o Ensino Exploratório; e tem dividido opiniões sobre a sua (dis)junção com a Investigação Matemática. Ponte (2020) nos diz que

> as diferenças entre as tarefas de investigação e exploração, digamos, elas estão um bocadinho, ali na continuidade umas das outras [...] em princípio nós falávamos apenas em tarefas de investigação, mas a certa altura achamos que era melhor distinguir entre as tarefas mais simples, as tarefas de investigação mais simples nós passamos a chamar tarefas de exploração [...] quando temos uma investigação ou uma exploração formulamos conjecturas e generalizações ... e, portanto, digamos... a ideia do trabalho de investigação continua a estar aqui (informação verbal)[1].

Além disso, em entrevista[2], Ponte (2022) nos diz que tem "trabalhado sobre o conceito de Ensino Exploratório, no âmbito do qual se desenvolvem novas ideias sobre o modo de estruturar aulas de Matemática e que aprofunda ideias já introduzidas a propósito da Investigação Matemática" (p. 13). À vista disso, e sem pretensões de adentrar nessa discussão, compreendemos que, ainda que o Ensino Exploratório cresça em outras direções e em alguma medida se diferencie da Investigação Matemática, com ela conecta-se em princípio.

Todavia, é crítico notar que a natureza das tarefas, por si só, não é condição suficiente para caracterizar uma perspectiva de ensino, uma vez que ela requer, além desta, outras condições, como por exemplo, modos de ser professor, modos de ser aluno, contextos e intencionalidades. Nesse sentido não estamos, aqui, assumindo posições acerca da (dis)junção entre a Investigação Matemática e Ensino exploratório, mas tão somente considerando que, embasados na pesquisa de Wichnoski (2021), as tarefas exploratórias são modos possíveis de estar com a Investigação Matemática em sala de aula. Obviamente que esse tipo de trabalho pedagógico não se reduz somente à natureza da tarefa proposta, a qual é condição necessária, porém não suficiente para caracterizá-lo, como dissemos.

Portanto, ainda que a pesquisa que enseja esse trabalho tenha enfocado a Investigação Matemática, e que, nela, a validação das conjecturas é fundamental e importante, julgamos pertinente considerar como material primário desta pesquisa o relato de práticas de ensino de Matemática efetivadas com tarefas investigativas e com tarefas exploratórias, dadas as transições teóricas supramencionadas, cujas fronteiras ainda apresentam alguma incerteza, ao menos para nós. Intencionando compreender a validação do conhecimento matemático constituído com essas tarefas, com a postura fenomenológica-hermenêutica interrogamos: *como se mostra a validação do conhecimento matemático constituído com tarefas exploratórias e com tarefas investigativas em sala de aula?*

[1] Palestra proferida pelo professor João Pedro da Ponte no 1º Ciclo de Palestras do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Paraná, *campus* de União da Vitória, online, em 11 de agosto de 2020.
[2] Entrevista concedida a Paulo Wichnoski e publicada na Revista Paranaense de Educação Matemática (RPEM). Cf. Ponte (2022).

O movimento de pesquisa aqui efetuado pode ser compreendido como uma experiência consciente, exemplificada pela metáfora do cubo:

> Considere o modo pelo qual percebemos um objeto material, tal como um cubo. Vemos o cubo desde um ângulo, uma perspectiva. Não podemos ver o cubo de todos os lados de uma vez. É essencial para a experiência de um cubo que a percepção seja parcial, com apenas uma parte do objeto sendo diretamente dada a cada momento. Contudo, não é o caso que somente experienciamos os lados que são visíveis desde nosso ponto de vista presente. [...] outros lados são dados, mas dados precisamente como ausentes. Eles também são parte do que experienciamos (Sokolowski, 2012, p. 25).

À vista disso, os lados que compõem um cubo presentificam-se em perspectiva; são dados de diferentes modos, chamados de aspectos. Por sua vez, um aspecto pode ser dado por meio de uma sucessão de aparecimentos temporalmente diferentes, chamados de perfis. Logo, toda essa multiplicidade diz de um e do mesmo cubo, ou seja, "os lados, aspectos e perfis são presentados para nós, mas neles todos um e o mesmo cubo está sendo presentado" (Sokolowski, 2012, p. 28). Filosoficamente, isso implica que um aspecto do cubo que no momento da pesquisa de doutorado supracitada mostrou-se ausente, agora é trazido à presença pelo perfil que enfocamos neste momento. Nesse sentido, a pesquisa exposta neste trabalho é extensão e retomada da tese de Wichnoski (2021), à medida que enfoca o cubo (a Investigação Matemática na Educação Matemática) sob outro aspecto (a validação) e sob outro perfil (as tarefas exploratórias e as tarefas investigativas).

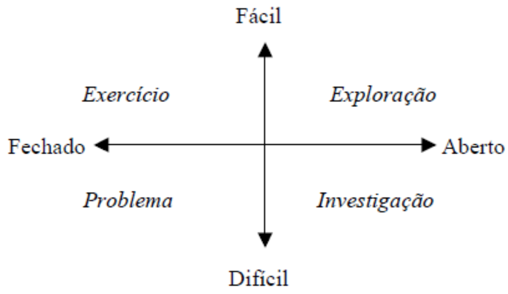
A forma como a interrogação de pesquisa foi construída e expressada orienta um movimento de pesquisa que se volta para os modos pelos quais a validação do conhecimento matemático evidencia-se com tarefas exploratórias e com tarefas investigativas em sala de aula. Portanto, ela sinaliza a região de inquérito da pesquisa, cuja exposição de alguns elementos teóricos constitui o conteúdo da seção 2.

2 Notas teóricas

"Pode o trabalho de investigação dos matemáticos servir de inspiração para o trabalho a realizar por professores e alunos nas aulas de matemática?" (Ponte, Brocardo & Oliveira, 2013, p. 9). Com essa pergunta, os autores encetam a discussão sobre o que são atividades de Investigação Matemática no contexto educativo, cujos desdobramentos confluem para uma resposta afirmativa. Ao trazer para a sala de aula a atividade genuína da Matemática, a Investigação Matemática apresenta-se como facilitadora do pensar matematicamente, o qual pode ser fomentado com "actividades que envolvem os alunos em problemas abertos e em explorações e investigações matemáticas. Com efeito, estas lidam com processos fundamentais da atividade e do pensamento matemático, como formular problemas, fazer e demonstrar conjecturas ou comunicar descobertas" (Abrantes, 1999, p. 1).

Naquilo que tange às tarefas de exploração e às tarefas de investigação, Ponte (2017) evoca que elas diferenciam-se dos demais tipos de tarefas matemáticas pelas características de abertura na estrutura enunciativa, e pelos graus de dificuldade que contém, de tal modo que as tarefas de investigação possuem elementos de indefinição na estrutura enunciativa e graus de dificuldade maiores em relação às tarefas de exploração. O grau de desafio diz da percepção da dificuldade e o grau de estrutura diz da abertura das tarefas, variando entre aberto e fechado, e quando combinados geram diferentes tipos de tarefas, a saber, as do tipo exploratório e do tipo investigativo, conforme ilustra a Figura 1.

Figura 1: Relação entre diversos tipos de tarefas, em termos do seu grau de desafio e de abertura



Fonte: Ponte (2017, p. 113)

Conforme interpretamos o esquema da Figura 1, tanto as tarefas investigativas quanto as tarefas exploratórias apresentam-se abertas e comportam certo "grau de indeterminação significativo no que é dado, no que é pedido, ou em ambas as coisas" (Ponte, 2017, p. 113). Portanto, de um ponto de vista pragmático, o grau de abertura da estrutura enunciativa das tarefas exploratórias é menor em relação às tarefas investigativas. Cotejando o grau de abertura com o grau de desafio, Ponte (2017, p. 114) reconhece que "nem todas as tarefas abertas comportam um elevado grau de desafio", mas considera que as tarefas exploratórias são fáceis e as tarefas investigativas são difíceis, indicando uma relação de causa e efeito entre a abertura e o grau de desafio, que culmina em dificuldades.

É oportuno e crítico notar que o grau de abertura não é garantido somente pela estrutura enunciativa das tarefas, quer sejam exploratórias, quer sejam investigativas, porque com os textos dos seus enunciados desdobra-se a atividade que, por sua vez, é sempre de alguém; de um *outro* em relação ao autor da tarefa. Nesse sentido, ainda que a abertura esteja presente com maior ou menor grau nos enunciados das tarefas, delas não é exclusividade, porque depende, também, do modo como os sujeitos com elas se envolvem, interpretam e atribuem significados.

Com essas notas teóricas explicativas sobre as tarefas exploratórias e as tarefas investigativas, entendidas como tais no âmbito da literatura, passamos a expor a postura que assumimos com a pesquisa e os procedimentos derivados. Esse é o conteúdo da seção 3.

3 A postura e os procedimentos da pesquisa

É com a postura fenomenológica-hermenêutica que a intenção desta pesquisa foi perseguida. Isso significa que não somente o modo de proceder, mas, também, o modo como os pesquisadores existem junto ao mundo e à pesquisa são constituídos com uma realidade percebida. Assim, aquilo que é interrogado não está objetivamente dado no mundo, mas nele se constitui com os atos perceptivos e, por assim ser, é visto como *fenômeno*. Em oposição ao modo cartesiano, a fenomenologia afirma que o sujeito e aquilo que ele interroga (o fenômeno) estão unidos no processo de conhecer, isto é, "não há uma separação entre o percebido e a percepção de quem percebe, uma vez que é exigida uma correlação de sintonia, entendida como doação, no sentido de *exposição*, entre ambos" (Bicudo, 2011a, p. 19).

Fenomenologicamente, nos atos perceptivos o percebido é, foi, e já não é mais o que acabou de ser, ou seja, ele dá-se à percepção instantaneamente de modo que, passado o momento presente, o que se tem é a expressão do percebido pela linguagem, a qual solicita procedimentos de análise e interpretação. Portanto, proceder fenomenologicamente na pesquisa é efetuar "o próprio movimento de trabalhar com sentidos e significados que não se dão em si, mas que vão se constituindo e se mostrando na temporalidade histórica de suas durações e respectivas expressões mediadas pela linguagem" (Bicudo, 2011b, p. 41).

Em conformidade com Bicudo (2011b), compreendemos que a interpretação de expressões mediadas pela linguagem solicita um enxerto hermenêutico para proceder à abertura dos sentidos e significados. À vista disso, esta pesquisa envereda-se pelas vias da fenomenologia hermenêutica, com a qual foi possível transcender modos de compreensão apegados à objetividade da palavra e alcançar uma compreensão no e pelo contexto histórico e cultural daquele que, vivendo, compreende e interpreta.

Nesse sentido, a compreensão é um modo de ser e "se torna possível porque o homem habita um mundo que não é o universo como vê o cientista, tampouco o conjunto de todos os seres, mas a totalidade de relações em que o homem está mergulhado" (Hermann, 2002, p. 34). Assim sendo, a fenomenologia hermenêutica tira-nos da ingenuidade contida no ver do cientista[3] e dá-nos possibilidades de interpretar, compreender e produzir conhecimentos, não como um atributo mental, ou emanado puramente do fenômeno interrogado, mas como atitude corpórea, sempre com o mundo.

Ao voltarmo-nos contemplativamente para a interrogação de pesquisa e enfocarmos *o que* ela interroga, os caminhos para dar conta do interrogado foram mostrando-se possíveis com práticas de ensino de Matemática efetivadas com tarefas exploratórias e com tarefas investigativas, relatadas e compartilhadas em artigos acadêmicos. Em *Scientific Electronic Library Online* (SciELO) e Periódicos Capes, um acervo significativo para a pesquisa foi buscado utilizando os indexadores: *tarefa(s) exploratória(s); tarefa(s) investigativa(s), tarefa(s) de investigação matemática* e suas combinações.

Com a leitura dos artigos sugeridos pelos bancos de busca, foram identificados aqueles que continham o relato de práticas de ensino de Matemática efetivadas com tarefas exploratórias e com tarefas investigativas, e foram selecionados 11 artigos para compor o acervo de análise da pesquisa, doravante chamado material primário, disposto no Quadro 2. Pontuamos que não questionamos a legitimidade conceitual das tarefas analisadas, porque entendemos que assim fazem os respectivos autores das produções científicas que as contemplam.

Quadro 2: Material primário da pesquisa

Identificação	Título	Autores
2008	O estudo de relações funcionais e o desenvolvimento do conceito de variável em alunos do 8° ano	Ana Matos João Pedro da Ponte
2012	O raciocínio matemático nos alunos do ensino básico e do ensino superior	João Pedro da Ponte Joana Mata-Pereira Ana Henriques
2014	As representações como suporte do raciocínio matemático dos alunos quando exploram atividades de investigação	Ana Henriques João Pedro da Ponte
2018	Promover o raciocínio matemático dos alunos: uma investigação baseada em design	Joana Mata-Pereira João Pedro da Ponte
2019	Justificando generalizações geométricas na formação inicial de professores dos primeiros anos	Lina Brunheira João Pedro da Ponte
2020A	Raciocínio matemático nos primeiros anos: ações	Eliane Maria de Oliveira

[3] Cf. Husserl (2009).

Identificação	Título	Autores
	de duas professoras ao discutir tarefas com seus alunos	Araman Maria de Lurdes Serrazina João Pedro da Ponte
2020B	Processos de raciocínio matemático na resolução de tarefas exploratórias no 3º ano de escolaridade	Eliane Maria de Oliveira Araman Maria de Lurdes Serrazina
2020C	Processos do raciocínio matemático mobilizados por estudantes de 6º ano do ensino fundamental ao resolverem uma tarefa de geometria	Luís Felipe Gonçalves Carneiro Eliane Maria de Oliveira Araman Maria de Lurdes Serrazina
2020D	Investigação matemática: possibilidade para o ensino de função do 1º grau	Rosimiro Araujo do Nascimento Marli Teresinha Quartieri
2021A	Processos de raciocínio matemático mobilizados por estudantes de cálculo em tarefas envolvendo representações gráficas	André Luis Trevisan Eliane Maria de Oliveira Araman
2021B	Argumentos apresentados por estudantes de cálculo em uma tarefa de natureza exploratória	André Luis Trevisan Eliane Maria de Oliveira Araman

Fonte: Elaboração própria

Os artigos que compuseram o material primário foram assumidos como base da manifestação daquilo que com essa pesquisa intencionamos, porque trazem em seus escopos relatos que dizem da vivência dos seus autores com o fenômeno aqui interrogado. Ressaltamos que, a eles, não atribuímos juízo, uma vez que as especificidades com as quais se construíram são irrelevantes à luz da nossa interrogação, ou seja, o nosso interesse reside naquilo que se expõe com relação ao momento de validação do conhecimento matemático constituído com tarefas exploratórias e com tarefas investigativas, e não nos artigos em si.

Concluída a busca e seleção do material primário, efetuamos uma primeira leitura a fim de compreender os sentidos presentes na totalidade dos textos. Em uma segunda leitura, destacamos excertos que traziam em seu conteúdo aspectos importantes acerca do fenômeno interrogado e que se articulavam com a interrogação de pesquisa. Com os excertos destacados, construímos um texto sobre o texto dos excertos, denominado meta excerto, visando a expor a nossa compreensão sobre o dito, tornando-o claro e condizente com a região de inquérito da pesquisa.

É importante destacar que a descrição com os meta excertos não descreve o percebido de modo direto e imediato, como se pressupõe na observação pretensamente objetiva com raízes positivistas, mas descreve-o como um modo de expressão sempre entremeado com o mundo (Bicudo, 2011b). Com os meta excertos, construímos as unidades de significados, com as quais foi possível reunir os significados distinguíveis e presentes na descrição anterior. O Quadro 3 exemplifica esse movimento.

Quadro 3: Movimento constitutivo das unidades de significados

Excerto do texto	Meta excerto	Unidades de significados
Os alunos também são capazes de usar o raciocínio dedutivo baseado em definições e propriedades matemáticas ou efetuando tratamentos dentro do sistema de representação algébrico para formularem conjeturas que, deste modo, adquirem validade e uma natureza geral. Neste caso, a representação algébrica é usada como ferramenta de exploração e de apresentação de conjeturas e justificações formais.	Ao analisar a prática de ensino, os autores concluem que as conjecturas adquirem validade e uma natureza geral porque os alunos são capazes de utilizar o raciocínio dedutivo baseado em definições e propriedades matemáticas ou efetuando tratamentos dentro do sistema de representação algébrico para formulá-las.	As conjecturas adquirem validade e uma natureza geral por meio do raciocínio dedutivo. (2014.17)[4] A representação algébrica é usada como ferramenta de justificações formais. (2014.18)

Fonte: Elaboração própria

Buscando pelos significados mais abrangentes, a partir das características individuais expressas em cada unidade de significados, efetuamos o cruzamento entre as unidades com significados confluentes, constituindo, assim, as ideias nucleares, as quais expressaram os primeiros invariantes. Contudo, sentidos convergentes ainda foram percebidos, o que solicitou outra convergência, dando-se a conhecer os núcleos de ideias, os quais findaram o processo de redução fenomenológica, porque expressaram os aspectos essenciais do fenômeno interrogado; aquilo que, embora manifestado de diferentes maneiras, não se alterou em sentido. Nomeadamente esses núcleos são: *N.1 — a validação como ausência*, *N.2 — a validação como linguagem*, *N.3 – a validação como prática empírica*, *N.4 — a validação como prática social* e *N.5 — a validação como demonstração.* O movimento de redução fenomenológica descrito, desde as unidades de significados aos núcleos de ideias, segue esquematizado no Quadro 4.

Quadro 4: Movimento de redução fenomenológica constitutivo dos núcleos de ideias

Códigos das unidades de significados	Ideias nucleares	Núcleos de ideias
(2008.6) (2008.7) (2012.2) (2012.7) (2012.10) (2012.11) (2012.12) (2012.15) (2014.16) (2014.19) (2018.8) (2019.10) (2020B.8) (2020C.4) (2020D.4) (2021A.3) (2021A.5) (2021A.16) (2021A.17) (2021B.1) (2021B.2)	Sobre a ausência da validação	N.1 — A validação como ausência
(2008.2) (2008.3) (2008.5) (2012.6) (2012.9) (2012.14) (2012.20) (2012.22) (2012.23) (2014.2) (2014.3) (2014.9) (2014.13) (2019.14) (2014.18) (2019.8) (2020A.1) (2020D.5) (2021A.8) (2021A.14)	Sobre o uso da linguagem matemática	N.2 — A validação como linguagem
(2008.1) (2012.21) (2014.1) (2014.6) (2014.8) (2014.12) (2014.15) (2019.5) (2019.8)	Sobre o uso da linguagem natural	
(2008.4) (2012.20) (2019.18) (2020B.2) (2020B.4) (2020B.6) (2020B.7) (2020B.9) (2020C.10) (2020D.1) (2021A.1) (2021A.2)	Sobre o uso de casos particulares	N.3 — A validação como prática empírica
(2018.1) (2018.2) (2018.3) (2018.4) (2018.5) (2018.6) (2018.7) (2018.9) (2018.11) (2020A.1) (2020A.2) (2020A.5) (2020B.1) (2020B.3) (2020B.5) (2020B.6)	Sobre a validação pelos pares	N.4 — A validação como prática social

[4] Lido da direita para a esquerda, este código é relativo à unidade de significado 17 do artigo identificado com o código 2014. A codificação das demais unidades de significados é análoga.

Códigos das unidades de significados	Ideias nucleares	Núcleos de ideias
(2020B.10) (2020B.11) (2020C.2) (2020C.3) (2020C.5) (2020C.6) (2020C.7) (2020D.3) (2021A.4) (2021A.7) (2021A.9) (2021A.10)		
(2020A.4) (2021A.12) (2021A.13) (2020C.1)	Sobre a contraprova	N.5 — A validação como demonstração
(2012.4) (2012.13) (2012.18) (2012.19) (2014.10) (2014.5) (2014.17) (2019.16)	Sobre o processo dedutivo	
(2012.5) (2012.17) (2014.7) (2014.11) (2019.6) (2019.7) (2019.9) (2019.11) (2021A.15) (2021B.3) (2021B.4)	Sobre a prova matemática	

Fonte: Elaboração própria

Com os núcleos de ideias, construímos um texto descritivo para expor os aspectos sentidos e percebidos acerca do fenômeno interrogado, guiados pela escuta atenta daquilo que os textos do material primário revelaram e, conforme dissemos, por uma postura pretensamente prudente e isenta de juízos a priori sobre o que neles é dito. Esse momento da pesquisa expõe-se com a seção 4.

4 Descrição e interpretação dos núcleos de ideias

Os sentidos e significados desvelados pelas unidades de significados, agora, articulam-se com a descrição e a interpretação dos núcleos de ideias, a propósito de trazer à luz a compreensão de como se mostra a validação do conhecimento matemático em práticas de ensino e aprendizagem da Matemática com tarefas exploratórias e com tarefas investigativas.

O primeiro núcleo de ideias, N.1, mostra a validação como *ausência* na constituição do conhecimento matemático com tarefas exploratórias e com tarefas investigativas em sala de aula. As unidades de significados nele articuladas, expressaram que há maior valorização da solução que das justificativas inerentes (2008.7) (2021A.3); e mais, expressaram que os alunos não sentem a necessidade de validar uma regra (2012.12) ou de justificar as conjecturas (2012.11) (2014.16) (2020C.4), tendendo a generalizá-las sem proceder à validação (2012.15) (2014.19) (2018.8) (2020B.8) (2021B.1). Quando houve tentativas de validação, elas apresentaram-se incompletas, conforme elucidamos com as unidades de significado: *a justificação foi baseada numa estruturação geométrica incompleta* (2019.10); *as justificativas se apresentaram carentes de suporte matemático* (2021A.17) (2021B.2).

A ausência da validação também se mostrou como consequência das dificuldades encontradas pelos alunos para a elaborarem. Vemos, em diferentes unidades de significados, que *o sujeito encontrou dificuldades para demonstrar a conjectura inicial* (2012.7); que *o sujeito não conseguiu formular, verbalmente, uma justificativa* (2021A.5); que *o sujeito não conseguiu validar a conjectura* (2021A.16); que *o sujeito não conseguiu explicar o porquê do que estava fazendo* (2008.6); que *o sujeito não conseguiu provar que todas as triplas de números consecutivos são múltiplos de três* (2012.2); e que *os alunos não conseguiram justificar com precisão* (2020D.4).

O núcleo de ideias N.1 revela a negação da validação do conhecimento matemático constituído com tarefas exploratórias e com tarefas investigativas, por parte dos alunos. Epistemologicamente, as unidades de significados desse núcleo são expressas a partir de duas ações dos sujeitos, a saber, o fracasso para evoluir na análise das conjecturas ou a intenção voluntária em negar a necessidade de justificação das conjecturas. Estas duas posições epistemológicas distinguem-se, na medida em que o fracasso advém de uma ou mais tentativas dos sujeitos na direção de formular uma in(conclusão) para aquilo que investigavam e, portanto, fornece informações ao professor a respeito do obstáculo epistemológico que impede a sua evolução; enquanto a intenção voluntária de negação da necessidade de justificativa impõe, no avanço da atividade, uma supressão dos obstáculos epistemológicos dos sujeitos e impede o avanço da atividade por parte do professor.

Por exemplo, o fracasso pôde ser visto, em diferentes níveis, nas unidades de significados (2008.6) (2012.2) e (2012.7) que ilustram casos nos quais os sujeitos são incapazes de produzir uma validação para a conjectura que estão analisando, ou então nas unidades de significados (2019.10), (2020D.4) e (2021A.17) que mostram uma incapacidade de precisão, completude ou formalidade da justificativa elaborada. Já a intenção voluntária dos sujeitos pôde ser vista em unidades de significado como (2008.7) (2012.10) (2012.11) (2012.12) (2012.15) e (2014.16) que, ao contrário das situações de fracasso, não fornecem nenhuma evidência de compreensão, dúvidas ou da habilidade dos sujeitos em manipular matematicamente as conjecturas analisadas a fim de validá-las.

É neste sentido que o núcleo de ideias N.1 expressa a validação como *ausência*, na medida em que consiste na ruptura do processo exploratório ou investigativo com relação ao seu objetivo final de construção da validação das conjecturas e, no melhor dos casos, fornece ao professor indícios da origem desta ruptura pelo fracasso dos sujeitos em diferentes etapas da análise das conjecturas. A intenção voluntária em negar a necessidade de validação mostrou-se, no estudo de Brocardo (2001), presente nas primeiras experiências dos alunos com tarefas de investigação, os quais consideravam "a prova das suas conjecturas como uma *complicação* desnecessária introduzida pela professora" (p. 544). O estudo supracitado também revela que, no decorrer da atividade, os alunos mostraram-se mais sensíveis à prova (validação) das conjecturas; no entanto, consideraram-na exterior à investigação propriamente dita.

Com o núcleo N.2, a validação do conhecimento matemático constituído com as tarefas exploratórias e com as tarefas investigativas em sala de aula mostra-se como *linguagem*, recorrendo-se a um conjunto de formas variadas. Uma das formas de linguagem utilizada pelos alunos foi a língua natural para generalizar (2008.1), bem como para *apresentar e justificar os seus raciocínios* (2014.1) (2014.6) (2014.15) (2019.5) (2019.8). Além disso, recorreram à linguagem própria da Matemática para comunicar a validação do conhecimento, ou seja, *utilizaram corretamente a terminologia matemática para apresentarem e justificarem os seus raciocínios* (2014.2), recorrendo aos recursos algébrico (2008.2) (2012.6) (2012.22) (2014.18), gráfico (2008.5) (2012.9) (2021A.14) e tabular (2014.13), bem como à articulação entre as linguagens algébrica e gráfica (2012.14), e entre as linguagens tabular e gráfica (2020D.5). As linguagens não algébricas mostraram-se acompanhadas da linguagem natural para as justificações (2014.8) e, em alguns casos, *a generalização foi expressa de um modo cada vez mais formal* (2008.3)*;* em outros, sem muita formalização (2012.23) (2014.3) (2014.9) (2019.14).

Assim, o núcleo de ideias N.2 expressa a validação como *linguagem*, na medida em que se constitui por um conjunto de unidades de significados que compartilham de um primeiro esforço na tentativa de validação das conjecturas pouco formais, apoiado em ações intuitivas. É claro que tais recursos são, também, meios pelos quais a atividade investigativa conduz à demonstração; no entanto, a intuição aqui referida diz respeito ao hiato entre a percepção do sujeito e a generalização das conjecturas.

Em alguns excertos, as unidades de significados expressaram intuições relacionadas às características particulares dos objetos analisados, conforme citamos: *a solução encontrada é verificada graficamente* (2008.5); *a conjectura é justificada com uma expressão algébrica*

(2012.6); *os resultados são confirmados com relações entre representações algébricas e gráficas* (2012.14); *o sujeito usou a representação gráfica como ferramenta de verificação* (2014.13) e *as justificativas foram sustentadas com planilhas e gráficos* (2020D.5). Nestes casos, as justificativas partem de intuições relativas a objetos singulares, a exemplo de tabelas, gráficos e expressões algébricas.

Para outras unidades de significados, *a generalização foi descrita em linguagem corrente* (2008.1); *progressivamente, a generalização foi expressa com recurso à linguagem simbólica* (2008.2); *a generalização foi expressa de um modo cada vez mais formal* (2008.3); *os sujeitos recorreram à linguagem natural para apresentarem e justificarem os seus raciocínios* (2014.1); *o aluno justifica o seu algoritmo recorrendo à linguagem natural* (2014.6) e *o sujeito justifica com base na linguagem natural escrita* (2019.5).

É a partir deste *status quaestionis*, a saber, de que há um núcleo de ideias que mostra a ausência de validações e outro que mostra a validação como intuições mediadas pela linguagem, que o núcleo de ideias N.3 surge e distingue-se dos anteriores. Assim, a validação como *prática empírica* reúne as unidades de significados que expressam tentativas concretas, porém particulares, de validação das conjecturas. Nesses casos, em geral, os alunos tendem a assumir as conjecturas como conclusões; aspecto revelado, também, pelo estudo de Brocardo (2001, p. 544), que relata: “se uma conjectura tinha resistido a sucessivos testes ela parecia-lhes claramente verdadeira, não sentindo pois qualquer necessidade de a provar”.

Nesse sentido, *os sujeitos apresentaram tendência para argumentar com base em regularidades numéricas* (2019.18); bem como com dados extraídos da própria tarefa (2020C.10), a exemplo das seguintes unidades de significados: *o sujeito elaborou a justificativa baseado nos diâmetros da superfície de água, a depender do formato da garrafa* (2021A.1); *os argumentos para validar o esboço foram baseados no ‘modo’ como a altura de água variava* (2021A.2). Além disso, o *resultado correto foi verificado fazendo cálculos* (2008.4) *com valores específicos* (2020B.4) (2020B.7) (2020B.9) (2020D.1), os quais indicam, para os sujeitos, um processo de validação (2020B.2). Note-se que essas unidades de significados mostram um processo de validação baseado na solução de problemas contextualizados com situações pseudo reais (2021A.1) (2021A.2) e (2020D.1), regularidades numéricas (2019.18) e (2020B.4) e problemas particulares (2020B.2), (2020B.6) e (2020B.7).

A validação como *prática social*, com o núcleo N.4, mostra-se como outro modo de validação do conhecimento matemático constituído com tarefas exploratórias e com tarefas investigativas em sala de aula. Assenta-se na interação entre os pares (professor e colegas), de tal modo que *a justificativa se constrói com o diálogo* (2020A.1). Nessa interação, ao professor cabe guiar, solicitar e incentivar a validação e, por vezes, validar, ele próprio, o conhecimento constituído pelos alunos, tal como evidenciam as seguintes unidades de significados: *a professora guiou Marisa para justificar a resposta* (2018.1); *solicitou a explicação do ‘porquê’* (2018.2); *incentivou os alunos a apresentar justificações* (2018.4); *desafiou a aluna a apresentar uma justificação* (2018.9); *destacou a justificação como válida* (2018.3); *validou a resposta do aluno* (2018.6) e *validou a estratégia utilizada pelo aluno* (2018.7). Ainda, as ações do professor serviram de embasamento para os alunos perceberem a não validade de uma conjectura (2020A.5).

Os colegas também são vistos como pares importantes para discutir os processos de validação. Sobre isso, explicitam as unidades: *a validação ocorreu após a correção de Bento sobre o cálculo efetuado por Mônica* (2020B.3); *Agnaldo validou a estratégia utilizada por Marta* (2020B.10); *Mónica validou a resolução de Bento* (2020B.11); *a fala de Beatriz foi uma validação para a conjectura de Lucas* (2020C.6); *as validações dos colegas apontaram para a* *falsidade da conjectura de José* (2020C.7).

De igual modo, os colegas são pares importantes para o compartilhamento dos conhecimentos constituídos (2020B.5), e para a anuência das validações apresentadas (2021A.7) (2021A.9) (2021A.10) que, em geral, *ocorreu com a comparação da pertinência do resultado encontrado com o exigido pela tarefa* (2020B.1) e *com o compartilhamento de resultados iguais* (2020C.5), de modo que *resultados diferentes invalidaram algumas conjecturas* (2020C.2). Em alguns casos, as justificativas foram aceitas quase que naturalmente (2021A.4), enquanto em outros, *os alunos não concordaram com a justificativa apresentada* (2020D.3).

As unidades de significados expostas com o núcleo N.4 expressam a presença e a influência do professor e dos colegas na validação do conhecimento matemático constituído com tarefas exploratórias e com tarefas investigativas, atribuindo à validação o status de prática social em sala de aula. À vista disso, o núcleo de ideias N.3 diferencia-se de N.4, uma vez que N.3 fez-se com as unidades de significados que dizem respeito ao conhecimento produzido pelo aluno a partir de modos não imediatos de investigar matematicamente e, em N.4, esse conhecimento produzido é avaliado, reforçado ou posto à prova tanto pelo professor quanto pelos alunos que estiveram com tarefas exploratórias e com tarefas investigativas em sala de aula.

Assim, quando executada pelo professor, a validação como *prática social* é caracterizada por reflexões a respeito do produzido, tendo em vista os objetivos didáticos (2018.2) (2018.9) (2020A.5) (2018.7) e (2020C.3). Por outro lado, quando executada pelos pares, a validação como *prática social* apresenta-se como uma técnica de contraposição, como nas unidades de significados (2020C.2) (2020D.3) e (2020B.3), ou reforço das práticas epistêmicas adotadas, tais como em (2020C.6) (2020B.10) e (2021A.9).

O núcleo N.5 expressa a validação do conhecimento matemático constituído com tarefas exploratórias e com tarefas investigativas em sala de aula como *demonstração*, propriamente dita. Nesse sentido, a validação mostrou-se apoiada na prática científica do matemático, o qual faz uso de procedimentos, propriedades, teoremas e conceitos da Matemática previamente aceitos como válidos (2012.17) (2014.7) (2021B.3); de modo que *as conjecturas adquiriram validade por meio do raciocínio dedutivo* (2014.17) (2012.4). Daí, segue-se que a validação como *demonstração* constituiu-se de processos de contraposição, como em (2020A.4) e (2021A.12); de argumentos lógico-dedutivos, como em (2012.4) (2012.13) (2012.19) e (2014.7); e com definições, como em (2014.11). Além disso, houve casos em que o valor epistêmico de uma conjectura aparentou mudar de provável para falso (2020C.1), de modo que a falsidade das conjecturas (2020A.4) foi validada com *um contraexemplo* (2021A.12).

Com o exposto, compreendemos que em práticas de ensino e aprendizagem da Matemática com tarefas exploratórias e com tarefas investigativas, a validação do conhecimento constituído mostrou-se como um fenômeno multifacetado, constituindo-se com casos particulares, justificativas informais ou mesmo ausência de justificativas, bem como com processos lógico-dedutivos que reproduzem a prática científica do matemático. Além disso, cada um dos núcleos de ideias contém, como forma de dar materialidade à validação, diferentes técnicas epistemológicas que levaram os alunos à justificação de suas conjecturas.

5 Considerações

Retomando aquilo que com o exercício hermenêutico se expôs à luz da interrogação *como se mostra a validação do conhecimento matemático constituído com tarefas exploratórias e com tarefas investigativas em sala de aula?,* percebemos que ela mostra-se como linguagem, como prática empírica, como prática social, e como demonstração. Disso decorre que a validação do conhecimento matemático constituído com tarefas exploratórias e com tarefas investigativas em sala de aula, pode constituir-se de processos dedutivos, tal como faz o cientista matemático, mas não se limita a eles. Este resultado é esperado, sob um ponto de vista pedagógico da Educação Matemática, uma vez que "a Matemática da Educação Matemática [...] em seu regime de verdade, é uma outra Matemática, radicalmente distinta daquela vista sob a perspectiva da prática profissional dos matemáticos" (Garnica, 2002, p. 98).

Fiorentini e Lorenzato (2006) evocam que, "se ocorrer, durante a atividade, formulação de questões ou conjecturas que desencadeiam um processo de realização de testes e de tentativas de demonstração ou prova dessas conjecturas, teremos, então, uma situação de investigação matemática" (p. 29); caso contrário a atividade pode restringir-se apenas à fase de explorações e problematizações. Discursos que convergem, em sentido, com as menções de Fiorentini e Lorenzato (2006) são recorrentes na literatura, e junto ao que nesse trabalho vimos revelar-se, evidenciam uma tensão: de um lado, os discursos de incentivo à demonstração – tal qual faz o matemático cientista – como *modus operandi* de validar o conhecimento matemático em sala de aula com tarefas investigativas; de outro, práticas de ensino que indicam outras possibilidades, inclusive a ausência da justificação com tarefas dessa mesma natureza. Nesse sentido, resgatamos a seguinte pergunta: no trabalho pedagógico com tarefas exploratórias e tarefas investigativas em sala de aula, "o professor deve satisfazer-se com justificações informais ou pedir aos alunos provas matemáticas das suas afirmações?" (Ponte, 2003, p. 57).

No cenário educacional brasileiro, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) propõe a presença da demonstração no ensino de Matemática para os anos finais do Ensino Fundamental como uma importante contribuição para a formação do raciocínio hipotético-dedutivo (Brasil, 2018). Para o Ensino Médio, o documento explicita que a formação matemática dos estudantes pressupõe o desenvolvimento de "um conjunto de habilidades voltadas às capacidades de investigação e de formulação de explicações e argumentos, que podem emergir de experiências empíricas [...], mas deve trazer também argumentos mais 'formais', incluindo a demonstração de algumas proposições" (Brasil, 2018, p. 541).

Oliveira (2002) sublinha que "a ideia de demonstração subjacente a muitos estudos educacionais é estritamente dedutiva" (p. 179) e identifica-a, na aula de Matemática, como um tipo de raciocínio inferencial. Nesse sentido, a demonstração é vista não apenas como legitimação do conhecimento matemático, mas, também, como justificação. Esse aspecto, junto ao que se mostrou neste estudo, corrobora o estudo de Ponte, Ferreira, Varandas, Brunheira e Oliveira (1999), que amplia a etapa relativa à demonstração, no processo de investigação, "para incluir agora todos os aspectos relativos a 'justificar uma conjectura'" (p. 62).

Segundo Ponte, Quaresma e Mata-Pereira (2020), a ação *justificar* pode assumir formas como: coerência lógica, uso de exemplos genéricos, uso de contraexemplos, por exaustão, por absurdo. Nessa perspectiva, o processo de justificar relaciona-se com a compreensão e validação dos resultados encontrados, e funciona como mecanismo de comunicação da respectiva legitimidade. Para Brunheira e Ponte (2019), esses aspectos estão associados à demonstração, a qual entendem ser um argumento ou uma sequência de afirmações interligadas que estabelece a verdade para uma pessoa ou para uma comunidade.

De um modo geral, portanto, a validação do conhecimento matemático constituído com tarefas exploratórias e com tarefas investigativas em sala de aula, mostrou-se caracterizada por processos lógico-dedutivos, pelo uso da linguagem natural, das práticas empíricas e sociais, bem como pela ausência da necessidade de justificação. É muito provável, ainda, que em outros contextos, outros modos de validação possam emergir, dado que a aula se faz com modos subjetivos de ser professor e de ser aluno junto à perspectiva metodológica utilizada, o que coloca os aqui apresentados em condição de possibilidades e não de univocidades.

No contexto desta pesquisa, as compreensões expostas são relativas ao conhecimento matemático constituído com tarefas exploratórias e com tarefas investigativas em sala de aula, com aquilo que foi relatado na literatura sobre o tema, atribuindo-lhes um caráter meta compreensivo. À vista disso, deixamos a proposição de estudos que interroguem, *in loco*, a validação do conhecimento matemático constituído estritamente com a Investigação Matemática em sala de aula.

Agradecimentos

Este trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001 e do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PRPGEM).

Referências

Abrantes, P. (1999). Investigações em Geometria na Sala de Aula. In. E. Veloso, H. Fonseca, J. P. Ponte & P. Abrantes (Org.). *Ensino da Geometria no Virar do Milénio*. (pp. 51-62). Lisboa: DEFCUL.

Araman, E. M. O. & Serrazina, M. L. (2020). Processos de raciocínio matemático na resolução de tarefas exploratórias no 3º ano de escolaridade. *RPEM*, 9(18), 118-136.

Araman, E. M. O., Serrazina, M. L. & Ponte, J. P. (2020). Raciocínio Matemático nos Primeiros Anos: ações de duas professoras ao discutir tarefas com seus alunos. *Bolema*, 34(67), 441-461.

Bicudo, M. A. V. (2011a). A pesquisa qualitativa olhada para além dos seus procedimentos. In M. A. V. Bicudo (Org.). *Pesquisa qualitativa segundo a visão fenomenológica*. (pp. 11-28). São Paulo: Cortez.

Bicudo, M. A. V. (2011b). Pesquisa qualitativa fenomenológica: interrogação, descrição e modalidades de análises. In M. A. V. Bicudo (Org.). *Pesquisa qualitativa segundo a visão fenomenológica*. (pp. 41-52). São Paulo: Cortez.

Brasil. (2018). Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC/SEB.

Brocardo, J. (2001). *As Investigações na aula de Matemática: um projecto curricular no 8º ano* Tese (Doutorado em Educação). Universidade de Lisboa. Lisboa.

Brunheira, L. & Ponte. J. P. (2019). Justificando generalizações geométricas na formação inicial de professores dos primeiros anos. *Bolema*, 33(63), 88-108.

Carneiro, L. F. G., Araman, E. M. O. & Serrazina, M. L. (2020). Processos do raciocínio matemático mobilizados por estudantes de 6º ano do ensino fundamental ao resolverem uma tarefa de geometria. *JIEEM*, 13(1), 35-45.

Ferreira, A. B. H., Anjos, M., Ferreira, M. B., Geiger, A. & Barcellos, J. F. G. (2010). *Mini Aurélio: o dicionário da língua portuguesa*. Curitiba, PR: Positivo.

Fiorentini, D. & Lorenzato, S. (2006). *Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos*. Campinas, SP: Autores Associados.

Garnica, A. V. M. (2002). As demonstrações em Educação Matemática: um ensaio. *Bolema,* *15*(8), 1-9.

Henriques, A. & Ponte, J. P. (2014). As representações como suporte do raciocínio matemático dos alunos quando exploram atividades de investigação. *Bolema*, 28(48), 276-298.

Hermann, N. (2002). *Hermenêutica e Educação*. Rio de Janeiro, RJ: DP&A.

Husserl, E. (2009). A ingenuidade da ciência. *Scientiæ zudia*, 7(4), 659-67.

Mata-Pereira, J. & Ponte, J. P. (2018). Promover o raciocínio matemático dos alunos: uma investigação baseada em design. *Bolema*, 32(62), 781-801.

Matos, A. & Ponte, J. P. (2008). O estudo de relações funcionais e o desenvolvimento do conceito de variável em alunos do 8.º ano. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 11(2), 195-231.

Nascimento, R. A. & Quartieri, M. T. (2020). Investigação Matemática: possibilidade para o ensino de função polinomial do 1º grau. *JIEEM*, 13(2), 133-144.

Oliveira, P. (2002). *A investigação do professor, do matemático e do aluno: uma discussão epistemológica.* Dissertação (Mestrado em Didática da Matemática]. Universidade de Lisboa, Lisboa.

Ponte, J. P. (2022). Uma entrevista com João Pedro da Ponte sobre a Investigação Matemática na Educação Matemática. [Entrevista concedida à P. Wichnoski]. *Revista Paranaense de Educação Matemática*, 11(24), 8-14.

Ponte, J. P. (2024) *Ensino Exploratório de Matemática*. 1º Ciclo de Palestras do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Paraná. União da Vitória, 11 de agosto de 2020. 1 vídeo (85min). [Live]. Disponível em: https://www.youtube.com/live/DUt9p_SvYbA; acesso em 13/06/2024.

Ponte, J. P. Gestão curricular em matemática. (2017). In J. P. Ponte (Org.). *Investigações matemáticas e investigações na prática profissional*. (pp. 103-142). São Paulo: Livraria da Física.

Ponte, J. P. (2003). Investigações sobre investigações matemáticas em Portugal. *Investigar em Educação*, 2, 93-169.

Ponte, J. P.; Brocardo, J. & Oliveira, H. (2013). *Investigações matemáticas na sala de aula.* Belo Horizonte, BH: Autêntica.

Ponte, J. P.; Ferreira, C.; Varandas, J. M.; Brunheira, L. & Oliveira, H. (1999). *A relação professor-aluno na realização de investigações matemáticas*. Lisboa: APM.

Ponte, J. P.; Mata-Pereira, J. & Henriques, A. (2012). O raciocínio matemático nos alunos do Ensino Básico e do Ensino Superior. *Práxis Educativa*, 7(2), 355-377.

Ponte, J. P.; Quaresma, M. & Mata-Pereira, J. (2020). Como desenvolver o raciocínio matemático na sala de aula? *Educação e Matemática*, 156, 7-11.

Sokolowski, R. (2012). *Introdução à fenomenologia*. (Tradução de A. O. Moraes). São Paulo, SP: Loyola.

Trevisan, A. L. & Araman, E. M. O. (2021a). Processos de raciocínio matemático mobilizados por estudantes de cálculo em tarefas envolvendo representações gráficas. *Bolema*, 35(69), 158-178.

Trevisan, A. L. & Araman, E. M. O. (2021b). Argumentos apresentados por estudantes de cálculo em uma tarefa de natureza exploratória. *Educação Matemática Pesquisa*, 23(1), 591-612.

Wichnoski, P. (2021). *Fenomenologia da Investigação Matemática na Educação Matemática* Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Educação Matemática). Universidade Estadual do Oeste do Paraná. Cascavel, PR.