

Contribuições da Teoria Antropológica do Didático na apresentação de tarefas que abordam eventos aleatórios dependentes do livro paradidático *Será que tenho chance?*

Ailton Paulo de Oliveira Júnior

Universidade Federal do ABC

São Paulo, SP — Brasil

✉ ailton.junior@ufabc.edu.br

 0000-0002-2721-7192

Anneliese de Oliveira Lozada

Escola Estadual Doutor João Firmino Correia de Araujo

São Paulo, SP — Brasil

✉ ans.lozada@gmail.com

 0000-0002-1350-8546



2238-0345 

10.37001/ripen.v14i3.3768 

Recebido • 18/03/2024

Aprovado • 10/05/2024

Publicado • 20/08/2024

Editor • Gilberto Januario 

Resumo: Este artigo tem como objetivo apresentar a fundamentação teórica utilizada para a criação de tarefas probabilísticas que comporão o livro paradidático *Será que tenho chance?* destinado ao desenvolvimento de conceitos probabilísticos no 9º ano do Ensino Fundamental (alunos com aproximadamente 14 anos). Especificamente, aborda-se a noção de evento aleatório dependente, conforme proposta na Base Nacional Comum Curricular. Utilizou-se os princípios da Teoria Antropológica do Didático na organização praxeológica didática e matemática (probabilidade), resultando em uma sequência de tarefas e subtarefas. Nessa abordagem, foram apresentadas técnicas justificadas pela tecnologia que se apoia na teoria da probabilidade como objeto de estudo. Mostrou-se a possibilidade de desenvolver um trabalho pedagógico que envolva conteúdos probabilísticos por meio de atividades lúdicas cotidianas, com o intuito de atrair a atenção do público infantojuvenil e promover a participação espontânea e o compartilhamento dos conhecimentos.

Palavras-chave: Eventos Aleatórios Dependentes. Tarefas. Livro Paradidático. Ensino Fundamental. Teoria Antropológica do Didático.

Contributions of the Anthropological Theory of Didactics in the presentation of tasks addressing random events dependent on the paradidactic book *Do I have a chance?*

Abstract: The objective was to present the theoretical foundation used to create probabilistic tasks that will make up the paradidactic book *Do I have a chance?* for the development of probabilistic concepts in the ninth year of Middle School (approximately 14 years), specifically the notion of dependent random event proposed in the National Common Curricular Base. The principles of the Anthropological Theory of Didactic were used in the didactic and mathematical praxeological organization (probability), which consisted of a sequence of tasks and subtasks, in which techniques were presented and these were justified by the technology that is based on the theory of probability as an object of study. The possibility of developing pedagogical work that involves probabilistic content through everyday playful activities was demonstrated in order to attract the attention of children and young people and generate spontaneous participation and sharing of knowledge.

Keywords: Dependent Random Events. Tasks. Paradidactic Book. Middle School. Anthropological Theory of the Didactic.

Aportes de la Teoría Antropológica de lo Didáctico en la presentación de tareas que abordan eventos aleatorios dependientes del libro paradidáctico *¿Tengo alguna posibilidad?*

Resumen: El objetivo fue presentar los fundamentos teóricos con los que se crearon las tareas probabilísticas que conformarán el libro paradidáctico *¿Tengo alguna posibilidad?* para el desarrollo de conceptos probabilísticos en el noveno año de la enseñanza primaria (aproximadamente 14 años), específicamente la noción de evento aleatorio dependiente propuesta en la Base Curricular Común Nacional. Se utilizaron los principios de la Teoría Antropológica de lo Didáctico en la organización didáctica y matemática praxeológica (probabilidad), la cual consistió en una secuencia de tareas y subtareas, en las cuales se presentaron técnicas y estas fueron justificadas por la tecnología que se basa en la Teoría de la probabilidad como objeto de estudio. Se demostró la posibilidad de desarrollar un trabajo pedagógico que involucre contenidos probabilísticos a través de actividades lúdicas cotidianas con el fin de atraer la atención de niños y jóvenes y generar participación espontánea e intercambio de conocimientos.

Palabras clave: Eventos Aleatorios Dependientes. Tareas. Libro Paradidáctico. Enseñanza Primaria. Teoría Antropológica de lo Didáctico.

1 Introdução

O ensino da probabilidade é importante porque ajuda os alunos a desenvolverem o seu pensamento probabilístico e as suas capacidades de raciocínio, que lhes são exigidos como cidadãos. Também os auxilia a compreender diferentes conceitos de probabilidade e suas aplicações em diversos campos do conhecimento.

Um desses conceitos diz respeito aos eventos, frequentemente classificados como dependentes ou independentes. Como regra básica, a existência ou ausência de um evento pode fornecer pistas sobre outros eventos. Em geral, um evento é considerado dependente quando fornece informações relacionadas a outro, enquanto é classificado como independente quando não influencia demais eventos.

Para que os eventos sejam considerados dependentes, foco deste estudo, é preciso ter influência sobre a probabilidade de outro. Em outras palavras, um evento dependente só pode ocorrer se outro evento ocorrer primeiro.

Partindo da importância em determinar a diferença entre eventos dependentes e independentes, Bennett (2003) afirma que existe uma real necessidade de indivíduos terem domínio sobre os conhecimentos básicos de probabilidade, acreditando que esta tem um papel relevante na formação do cidadão. A aprendizagem da probabilidade contribui para o desenvolvimento do pensamento crítico, capacitando as pessoas a compreender e comunicar uma variedade de informações em diversas situações da vida cotidiana, nas quais fenômenos aleatórios, acaso e incerteza estão presentes.

Além da relevância do ensino de probabilidade, destaca-se, conforme Campos & Perin (2021), que os livros paradidáticos têm sido empregados no Brasil como um recurso complementar ao processo pedagógico em diferentes áreas do conhecimento. Com um propósito diferente do livro didático, o paradidático busca o aprofundamento de conceitos importantes, utilizando uma linguagem mais atrativa para o aluno. Os livros paradidáticos apoiam-se em uma história recheada de ilustrações, com o objetivo de conquistar o leitor, cativando-o por meio de um enredo que contempla personagens que caracterizam a faixa etária para a qual ele se destina.

Oliveira Júnior e Lozada (2023) analisaram sistematicamente a literatura no Brasil que utilizou ou criou livros paradidáticos no ensino de probabilidade para os Anos Finais do Ensino Fundamental. Os autores encontraram doze estudos, no período de 2014 a 2021. Dentro do escopo da investigação, que enfatizou a metodologia ou enfoque metodológico utilizado, o contexto de desenvolvimento, os tipos de estudo e áreas envolvidas, os principais resultados e conclusões, ressalta-se que as pesquisas com esse enfoque ainda são incipientes. Foi evidenciada uma preocupação particular nas pesquisas em relação ao perfil do aluno e suas interações com o conhecimento experiencial e o cotidiano.

Partindo de estudos que criaram tarefas estatísticas ou probabilísticas segundo os princípios da Teoria Antropológica do Didático (TAD) de Yves Chevallard, Oliveira Júnior, Souza e Datori Barbosa (2019) apresentaram a fundamentação teórica utilizada para a criação de problemas no processo de ensino e aprendizagem de conteúdos estatísticos do 1º ano do Ensino Fundamental. Isso ocorreu dentro do contexto da organização praxeológica didática e matemática (estatística) e da Equivalência de Estímulos. Acredita-se que utilizar a resolução de problemas como metodologia de ensino representa uma forma interessante de apresentar conceitos estatísticos. Isso permite que tais conceitos sejam introduzidos de forma atrativa e, também, fomenta a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e na busca por soluções.

Além desse estudo, em Oliveira Júnior e Datori Barbosa (2023) demonstraram uma possibilidade de desenvolver um trabalho pedagógico para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental brasileiro, baseado em jogos pedagógicos. Esse trabalho proporciona um subsídio teórico-metodológico para repensar os métodos estratégicos, redimensionando-os a fim de minimizar o hiato existente entre as atividades lúdicas cotidianas realizadas. Foram elaboradas cartas para o jogo *Probabilidade em Ação*, denominadas Perguntas (?), que consistem em tarefas baseadas em situações-problema, com o objetivo de favorecer a apreensão dos conteúdos e o desenvolvimento do conhecimento probabilístico. Essa abordagem tem como aporte teórico a TAD, composta por dois blocos: o prático e o teórico.

Assim, buscou-se, neste estudo, apresentar o processo de criação de tarefas que comporão o livro paradidático *Será que tenho chance?*, fruto de uma pesquisa de doutorado. O intuito é incentivar a leitura, desenvolver a habilidade de interpretar textos e tornar o estudo de probabilidade para o 9º ano do Ensino Fundamental mais prazeroso, especificamente a noção de evento aleatório dependente, proposta na Base Nacional Comum Curricular [BNCC] (Brasil, 2018) e no Relatório *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education II* (GAISE II) (Bargagliotti *et al.*, 2020), apoiada pela TAD.

2 Eventos aleatórios dependentes segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e o relatório norte-americano GAISE II

Considera-se, inicialmente, os objetos de conhecimento e respectivas habilidades probabilísticas, foco deste trabalho, indicados na unidade temática Probabilidade e Estatística da BNCC (Brasil, 2018), referente ao 9º ano do Ensino Fundamental brasileiro (Quadro 1).

Quadro 1: Objetos de conhecimento e habilidades probabilísticas e/ou estatísticas segundo a BNCC para o 9º ano do Ensino Fundamental

Objeto de conhecimento	Habilidades
Análise de probabilidade de eventos aleatórios: eventos dependentes e independentes.	(EF09MA20) Reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de sua ocorrência, nos dois casos.

Fonte: Brasil (2018, p. 318)

Na BNCC, há orientações para que o 9º ano do Ensino Fundamental estude os eventos independentes e dependentes em experimentos aleatórios, além de calcular a probabilidade de ocorrência em cada caso. Deve-se reconhecer que os eventos independentes são aqueles em que a ocorrência de um evento não interfere na ocorrência de outro, enquanto os dependentes são aqueles em que a ocorrência de um evento está ligada à ocorrência de outro.

No relatório GAISE II (Bargagliotti *et al.*, 2020), destaca-se, dentre os diversos aspectos relacionados ao ensino de estatística, o papel do pensamento probabilístico, ou seja, a estrutura dos conceitos deve ser organizada nos níveis de desenvolvimento A, B e C. Os alunos no Nível A precisam desenvolver ideias informais sobre como a probabilidade está relacionada ao raciocínio estatístico.

Essas ideias irão ajudá-los quando, posteriormente, utilizarem a probabilidade para realizar inferências informalmente no Nível B e de maneira mais formal no Nível C. Ressalta-se que esses níveis não estão vinculados a etapas específicas do ensino. Eles podem ser observados progressivamente ao longo da escolaridade, mas não devem ser interpretados como diretamente relacionados a essas etapas ou à idade dos alunos.

Bargagliotti *et al.* (2020) evidenciam quais são os aspectos a serem considerados em cada um dos três níveis (A, B e C) para o ensino de probabilidade, diretamente associado ao ensino de estatística. O Quadro 2 apresenta tais características.

Quadro 2: Estrutura conceitual para o ensino de probabilidade segundo o documento norte-americano GAISE II

Nível	Descrição
A	Os alunos devem começar a entender que a probabilidade é uma medida da chance de que algo aconteça. É uma medida do grau de certeza ou incerteza. A probabilidade de eventos deve ser vista como estando em um continuum do impossível ao certo, com menos provável, igualmente provável e mais provável. Usando essas noções probabilísticas, os alunos do Nível A podem elaborar sua resposta à pergunta investigativa estatística para incluir declarações como: Se um aluno da nossa classe for selecionado aleatoriamente, é mais provável que ele seja um aluno que prefira Rap, Country ou Rock?
B	Deve-se reconhecer que, embora a amostra combinada seja maior, ela ainda pode não ser representativa de toda a população (ou seja, todos os alunos de sua escola). Em estatística, aleatoriedade e probabilidade são incorporadas ao procedimento de seleção da amostra para fornecer um método que seja “justo” e para melhorar as chances de selecionar uma amostra representativa. Por exemplo, se a turma decidir selecionar o que é chamado de amostra aleatória simples de 54 alunos, então cada amostra possível de 54 alunos terá a mesma probabilidade de ser selecionada. Esta aplicação ilustra um dos papéis da probabilidade na estatística. Embora os alunos não possam realmente empregar um procedimento de seleção aleatória ao coletar dados no Nível B, questões relacionadas à obtenção de amostras representativas devem ser discutidas.
C	Faz com que os alunos passem por estatísticas descritivas de todo o grupo ou população para incorporar noções de chance e probabilidade para fazer inferências gerais e comparações inferenciais sobre dois grupos. As simulações são empregadas para aprimorar o raciocínio probabilístico. Os alunos compreendem a variabilidade amostra a amostra.

Fonte: Bargagliotti *et al.* (2020, pp. 27; 49; 72).

Bargagliotti *et al.* (2020) indicam que a probabilidade consiste em quantificar a aleatoriedade, sendo a base para a realização de previsões em estatísticas. Desde a tenra idade, os alunos podem utilizar a probabilidade informalmente para prever quão prováveis ou improváveis são determinados eventos. Ainda é possível considerar previsões informais além do escopo dos dados analisados. Além disso, é importante destacar que a probabilidade é uma ferramenta essencial não apenas em estatística, mas também em Matemática, embora empregue abordagens e raciocínios diferentes dos utilizados na estatística.

Segundo Bargagliotti *et al.* (2020, p. 10), dois problemas e a natureza das soluções

ilustrarão a diferença:

Problema 1: Suponha que um dado seja “justo”.

Pergunta: Se um dado for lançado 10 vezes, quantas vezes veremos um número par na face superior?

Problema 2: Você pega um dado.

Pergunta: Este é um dado justo? Ou seja, cada face tem a mesma chance de aparecer?

O problema 1 é um problema de probabilidade matemática. O Problema 2 é um problema de estatística que pode usar o modelo matemático de probabilidade determinado no Problema 1 como ferramenta para buscar uma solução.

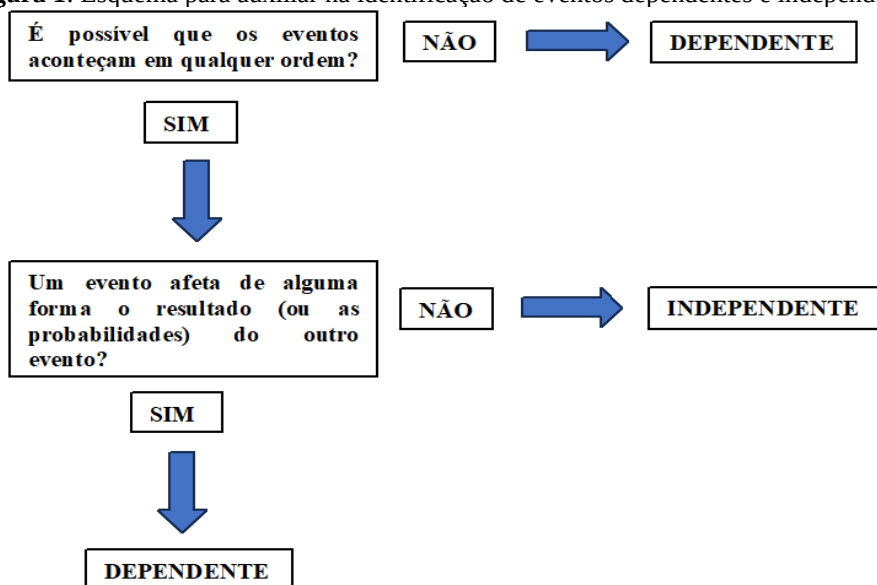
Partindo dos princípios apresentados nos três níveis do documento, observa-se uma convergência em vários sentidos, principalmente no que diz respeito à verbalização dos alunos em relação às suas análises, considerando que essa ação é fundamental para o entendimento das primeiras noções probabilísticas.

Em linhas gerais, de acordo com Bargagliotti *et al.* (2020), a probabilidade deve ser entendida como uma ferramenta utilizada pela estatística para avaliar chances de eventos em contextos orientados por pesquisas desenvolvidas pelos alunos. No entanto, no que se refere à BNCC, esse entendimento não é claramente evidenciado para todos os anos escolares do Ensino Fundamental. Em outras palavras, as habilidades probabilísticas não indicam conexão com um processo investigativo estatístico, que deveria permitir o entendimento do papel do aleatório na análise e interpretação dos dados.

3 Identificando eventos aleatórios dependentes

Para Glen (2023), identificar se os eventos são dependentes ou independentes pode representar um desafio, já que nem todas as situações são tão simples quanto parecem à primeira vista. Por exemplo, pode-se supor que seu voto para presidente aumenta as chances de vitória do seu candidato, mas ao considerar o tamanho do colégio eleitoral, nem sempre essa relação se confirma. O esquema apresentado a seguir (Figura 1) indica aspectos que podem auxiliar na identificação dos eventos dependentes e independentes.

Figura 1: Esquema para auxiliar na identificação de eventos dependentes e independentes



Fonte: Elaboração própria (Adaptado de Glen, 2023)

Para complementar o entendimento do esquema apresentado na Figura 1, Glen (2023) sugere a identificação de passos ou etapas para diferenciar eventos dependentes de independentes:

Passo 1 – Pergunte a si mesmo: é possível que os eventos aconteçam em qualquer ordem? Se não (as etapas devem ser executadas em uma determinada ordem), vá para a Etapa 3a. Se sim (as etapas podem ser executadas em qualquer ordem), vá para a Etapa 2. Se não tiver certeza, vá para a Etapa 2.

Etapa 2 – Pergunte a si mesmo: um evento afeta de alguma forma o resultado (ou as probabilidades) do outro evento? Se sim, vá para a Etapa 3a, se não, vá para a Etapa 3b.

Etapa 3a: Pronto – o evento é dependente.

Etapa 3b: Pronto – o evento é independente.

4 Procedimentos metodológicos

O objetivo desta pesquisa é apresentar a fundamentação teórica utilizada para a criação de tarefas probabilísticas que comporão o livro paradidático *Será que tenho chance?* para o desenvolvimento de conceitos probabilísticos no 9º ano do Ensino Fundamental, especificamente a noção de evento aleatório dependente, proposta na BNCC (Brasil, 2018) e apoiada pela TAD.

Considerando o objetivo indicado, estabeleceu-se a seguinte questão de pesquisa: de que maneira o processo de elaboração de livros paradidáticos de narrativa ficcional no ensino da probabilidade fornece material didático para facilitar a apreensão dos conceitos probabilísticos nas atividades sugeridas ao aluno, com o intuito de estimular a sua aprendizagem, e ao professor, elementos que deem suporte no ensino?

Complementa-se que a noção atribuída à tarefa reflete o sentido antropológico da TAD, incluindo apenas as ações que são de origem humana — excluindo aquelas provenientes da natureza (Chevallard, 1999). Ressalta-se ainda que a TAD tem seu foco nas atividades de estudo, não se tratando de uma teoria de ensino ou aprendizagem. Chevallard (1996) utiliza o termo *tarefa* na TAD e neste texto o utilizamos para representar um problema probabilístico.

Bosch e Chevallard (1999) restringem a noção de tarefa em Matemática ao distinguir a atividade matemática das outras atividades humanas. Diante de uma tarefa, é necessário saber como resolvê-la. O *como resolver a tarefa* é o motor gerador de uma praxeologia, ou seja, é preciso ter (ou construir) uma técnica, a qual deve ser fundamentada por uma tecnologia, que, por sua vez, requer fundamentação em uma teoria. A palavra *técnica* será utilizada como processo estruturado e metódico, às vezes algorítmico, que constitui um caso muito particular de técnica.

Assim, o procedimento para a elaboração das tarefas foi fundamentado na TAD e baseado na análise e discussão de documentos oficiais, como a BNCC (Brasil, 2018), que traz os conteúdos e as habilidades a serem trabalhadas na unidade temática *Probabilidade e Estatística* para o 9º ano do Ensino Fundamental, e o GAISE II (Bargagliotti *et al.*, 2020), ao considerar que a probabilidade é uma medida da chance de algo acontecer. É uma medida do grau de certeza ou incerteza. A probabilidade dos acontecimentos deve ser vista como situada em um *continuum* que vai do impossível ao certo, com menos provável, igualmente provável e mais provável situados no meio. Utilizando essas noções probabilísticas, os alunos podem elaborar suas respostas para uma questão investigativa estatística.

Segundo Chevallard (1999), para especificar uma praxeologia, é necessário compreender alguns conceitos fundamentais: tipo de tarefa, tarefa, técnica, tecnologia e teoria.

Assim, de acordo com Bittar (2017, p. 267), o modelo praxeológico proposto para descrever qualquer atividade, matemática ou não, é composto por:

tipo de tarefas T ; técnicas (τ) que resolvem as tarefas desse tipo; tecnologia (θ) que justificam as técnicas e garantem sua validade, e, finalmente, a teoria (Θ) que justifica a tecnologia. Esse quarteto praxeológico é denotado $[T, \tau, \theta, \Theta]$, sendo que o bloco $[T, \tau]$ é denominado de prático-técnico (*práxis*), ou bloco do saber-fazer; e o bloco $[\theta, \Theta]$ é denominado bloco tecnológico-teórico (*logos*) ou bloco do saber.

Nos estudos conduzidos por Chevallard (1998) e Chevallard, Bosch e Gascón (2001), indica-se que uma Organização Matemática (OM) é elaborada em torno de uma noção ou conceito inerente à própria Matemática ou, no caso deste estudo, à probabilidade. São respostas a questões sobre como realizar o estudo de um determinado assunto. Refere-se ao conjunto de tarefas, técnicas, tecnologias e teorias mobilizadas para investigar um tema específico (como a probabilidade no 9º ano do Ensino Fundamental brasileiro).

No bloco considerado prático-técnico (*práxis*), serão apresentadas as técnicas associadas à resolução de uma determinada tarefa. De acordo com Chevallard (1999), uma praxeologia relativa à tarefa T requer, em princípio, de uma maneira de realizá-la, ou seja, uma forma de executar determinada tarefa.

Na maioria dos casos, determinado tipo de tarefa (T) e suas subtarefas (t) correspondentes se expressam por um verbo e seu objeto (Chevallard, 1999). Diogo, Osório e Silva (2007) destacam que, apesar de os conceitos de tipo de tarefa (T) e de subtarefas (t) estejam intimamente relacionados, apresentam diferenças. O tipo de tarefa (T) pode ser considerado uma classe de tarefas que engloba várias tarefas com características comuns, por exemplo, a Tarefa (T) somar números inteiros, composta pelas seguintes subtarefas (t): a) subtarefa 1: somar $1 + 2$; b) subtarefa 2: somar $40 + 50$; c) subtarefa 3: somar $4 + 2 + 6$.

No bloco do saber (*logos*), o primeiro componente é um discurso racional, denominado tecnologia (θ) e a teoria (Θ), que representa um nível superior de justificação, explicação e produção que desempenha em relação à tecnologia (θ), o mesmo papel que esta tem em relação à técnica (τ) (Chevallard, 1999).

Serão tomadas como referência as propostas de Chevallard (1999) para avaliar tarefas, técnicas, tecnologias e teorias. Dessa forma, as tarefas têm como objetivo serem bem identificadas conforme os conteúdos e a razão de sua proposta, e se são adequadas para alunos do ciclo ao qual se destinam (9º ano do Ensino Fundamental). Além disso, será avaliado se o conjunto de tarefas fornece uma visão das situações matemáticas (probabilísticas) utilizadas no livro paradidático. A técnica será disponibilizada de maneira completa, ou seja, passo a passo, ou apenas esboçada, e o bloco tecnologia/teoria será expresso no decorrer do livro, com justificativas tecnológicas.

Pensando nessa praxeologia, as situações-problema (tarefas) elaboradas que compõem atividades constantes do livro paradidático são constituídas por uma sequência de subtarefas que podem ser realizadas utilizando diversas técnicas, justificadas pela tecnologia que se utiliza de teorias relacionadas à probabilidade como objeto de estudo. Acredita-se que, por meio da TAD, é possível ampliar o olhar sobre cada tarefa proposta, desde as estratégias até o discurso teórico sobre essas estratégias.

Chevallard (1999) afirma que, para começar sua teorização, são necessários três temas primitivos: os objetos (O), as pessoas (P) e as instituições (I). Quanto ao objeto (O), nesse estudo, atribui-se ênfase aos conteúdos probabilísticos relacionadas ao 9º ano do Ensino

Fundamental brasileiro, apoiador na BNCC (Brasil, 2018) e no documento norte-americano GAISE II (Bargagliotti *et al.*, 2020).

Quanto às pessoas (P), o foco é determinar orientações para professores e alunos do 9º ano do Ensino Fundamental no processo ensino e aprendizagem da probabilidade na construção de seu próprio conhecimento, atuando de forma crítica na pesquisa e desenvolvimento de novas metodologias em entidades públicas e particulares.

De acordo com Chevallard (1999), a instituição pode ser uma escola, uma sala de aula, um curso, uma família etc. A cada instituição associa-se um conjunto de objetos institucionais a partir da relação institucional. Assim, os objetos são os conteúdos probabilísticos indicados para o 9º ano do Ensino Fundamental. Neste contexto, atribui-se o papel institucional ao documento oficial que orienta o ensino de Matemática na Educação Básica no Brasil em nível nacional, a BNCC, que contempla os diferentes momentos de formação do estudante.

Por fim, também foram consideradas as Organizações Didáticas (OD), que, segundo Chevallard (1999), apresentam o processo de estudo a partir de momentos didáticos voltados para a funcionalidade desse processo. Para descrever uma OD, o mesmo autor define seis momentos didáticos que podem aparecer de forma isolada ou simultânea durante a execução do estudo, quais sejam:

- 1) Encontrar a OM por meio de pelo menos um tipo de tarefa, orientando desde o início às relações institucionais (BNCC) e pessoais (alunos e professores) com o objeto matemático (probabilidade);
- 2) Explorar as tarefas e elaborar uma técnica que permita cumprir tal tarefa. Nesse momento, o professor deve possibilitar o surgimento de outras técnicas, dando condições para que o aluno desenvolva um estudo mais exaustivo para essa classe de problemas;
- 3) Construir um ambiente tecnológico/teórico que encontra em estreita relação com os momentos anteriores;
- 4) Trabalhar a técnica para diferentes tarefas, podendo eventualmente ser alterada e/ou aperfeiçoada;
- 5) Definir a OM, destacando elementos que fizeram parte do estudo, ou seja, a institucionalização.
- 6) Avaliar as relações institucionais e pessoais produzidas em torno do objeto de estudo.

5 O ensino de probabilidade no livro paradidático *Será que tenho chance?* para o 9º ano do Ensino Fundamental à luz da TAD: tarefas que abordam o conceito de evento aleatório dependente

A seguir, são apresentadas as tarefas que compõem o livro paradidático *Será que tenho chance?* para o 9º ano do Ensino Fundamental, seguindo os princípios da TAD na organização praxeológica didática e matemática (probabilística).

No que diz respeito à organização matemática e didática, ela ocorre em dois momentos distintos. O primeiro momento é denominado de elaboração e sistematização das técnicas escolhidas para resolver os problemas propostos, que podem ser caracterizados como eventos aleatórios dependentes (subtipos de tarefas). Essas técnicas são exploradas nas situações introdutórias e são explicadas durante o processo de resolução. É nesse momento que se enunciam as propriedades ou afirmações que constituem os elementos tecnológicos que explicam ou justificam as técnicas sistematizadas. O segundo momento, denominado de

trabalho das técnicas, ocorre por meio da realização das tarefas apresentadas e, em seguida, pelo processo de sistematização.

Ademais, considera-se que eventos dependentes são importantes tanto na estatística quanto na probabilidade, no contexto do cotidiano, pois podem afetar a maneira como a probabilidade é calculada e influenciar na tomada de decisões com base em análises estatísticas. Portanto, é importante compreender a dependência entre os eventos e levá-la em consideração na análise de dados.

5.1 Tarefas referentes à preparação da equipe da Escola Sete Colinas antes da etapa nacional da Olimpíada de Probabilidade

Considerando a narrativa do paradidático, determinou-se que a turma de alunos, personagens criados para a história, chegou à etapa final da Olimpíada Nacional de Probabilidade. Já de volta às atividades na Escola Sete Colinas, a professora Valéria reuniu seus alunos para parabenizá-los por mais uma etapa vencida.

Após terem vencido mais uma etapa, a estadual, o grupo Sete Colinas retornou à sua cidade, e os alunos aguardavam ansiosos pela última etapa que ocorreria em um mês na capital do país. Assim, em um dos momentos de preparação, a professora Valéria buscou realizar a revisão dos conteúdos com o grupo, quando um dos alunos da equipe, o Rafa, perguntou:

Professora, será que temos chance de vencer essa Olimpíada?

A professora Valéria falou olhando fixamente para todos do grupo:

É claro que sim! Vocês se dedicaram bastante durante toda a Olimpíada e não há razões para se preocuparem agora!

E continuou:

Vocês têm a mesma chance que os outros grupos têm. E aproveitando a pergunta de vocês, qual é a probabilidade de vocês terem de se tornarem campeões nacionais?

O grupo se entreolhou e começou a discutir quais procedimentos poderiam seguir para determinar essa probabilidade. Após um tempo, Gabriela, que foi indicada pelo grupo para apresentar as ideias que tiveram, disse:

Ora, se temos a mesma chance que os outros grupos, e considerando que no Brasil temos 26 Estados e o Distrito Federal, então a probabilidade é de $1/27$, ou seja, aproximadamente 0,037, e se multiplicarmos este valor por 100, obtemos 3,7%. Assim, a probabilidade de nos tornarmos campeões é de aproximadamente 3,7%.

Luíza se mostrou desanimada pela probabilidade ser pequena, mas falou:

Não desanime!! A probabilidade que temos é a mesma que os outros grupos têm, então vamos nos animar!

E a professora Valéria continuou:

É isso mesmo! Não é hora para desânimo. Além disso, temos que aprender a diferença entre eventos aleatórios dependentes e independentes! Falando nisso, alguém se lembra como diferenciar eventos dependentes de independentes?

Pensando na pergunta que a professora Valéria fez, mostrando muita vontade de aprender mais, Rafael perguntou:

Professora Valéria, surgiu uma dúvida!!! Caso eu queira selecionar uma camisa de meu armário para usar na segunda-feira e depois uma camisa diferente para usar na terça-feira, esses eventos são dependentes ou independentes?

Para ajudar a professora Valéria ou outros professores que quiserem utilizar essa tarefa em suas aulas, considera-se como Tarefa 1 *Reconhecer, em experimentos aleatórios cotidianos, eventos dependentes*. Partindo da Tarefa 1 (T_1), apresenta-se uma sequência de subtarefas (t_1 a t_3) segundo a TAD e sua organização praxeológica matemática e didática.

Assim, considerando a situação apresentada por Rafael, no Quadro 3, descreve-se o bloco prático-técnico (*práxis*) ou do saber-fazer, referente à subtarefa 1 (t_1) associada à Tarefa 1 (T_1).

Quadro 3: Descrição do bloco prático-técnico (*práxis*) ou do saber-fazer, referente à subtarefa 1 (t_1) associada à Tarefa 1 (T_1), segundo a TAD

Subtarefa 1 (t_1)	Considerar os eventos $A = \{\text{selecionar uma camisa do armário para usar na segunda-feira}\}$ e $B = \{\text{selecionar uma camisa diferente da selecionada na segunda-feira do armário para usar na terça-feira}\}$ e reconhecer se esses eventos são dependentes ou independentes.
Técnica (τ_1)	Considera-se que dois eventos são dependentes se o resultado do primeiro evento afeta o resultado do segundo evento. Assim, na subtarefa 1 (t_1), os eventos A e B são dependentes, pois, depois que a primeira camisa é escolhida na segunda-feira, há menos camisas para escolher na terça-feira, já que não há possibilidade de escolher novamente a camisa de segunda-feira, ou seja, Rafael não pode escolher a mesma camisa duas vezes.

Fonte: Elaboração própria (2024).

Na continuidade da preparação da equipe, Luzia expressou seu desejo de contribuir, trazendo à tona uma situação que vivencia diariamente ao ir à escola, e perguntou:

Eu, todos os dias, vou de ônibus de minha casa para a escola. Sejam o evento A eu chegar no ponto de ônibus a tempo de pegar o ônibus e o evento B, chegar na hora à escola. Esses eventos são dependentes ou independentes?

Assim, considerando a segunda situação, essa apresentada por Luzia, descreve-se no Quadro 4 o bloco prático-técnico (*práxis*) ou do saber-fazer, referente à subtarefa 2 (t_2), também associada à Tarefa 1 (T_1).

Quadro 4: Descrição do bloco prático-técnico (*práxis*) ou do saber-fazer, referente à subtarefa 2 (t_2) associada à Tarefa 1 (T_1), segundo a TAD

Subtarefa 2 (t_2)	Considerar os eventos $O = \{\text{chegar no ponto de ônibus a tempo de pegar o ônibus}\}$ e $E = \{\text{chegar na hora à escola}\}$ e reconhecer se esses eventos são dependentes ou independentes.
Técnica (τ_2)	Considera-se que dois eventos são dependentes se o resultado do primeiro evento afeta o resultado do segundo. Assim, o evento O é Luzia que chega ao ponto de ônibus a tempo de pegar o ônibus, e o evento E é Luzia que chega à escola a tempo. Podemos supor que a probabilidade de chegar à escola no horário aumenta muito se o aluno pegar o ônibus, pois é mais provável que ele se atrase para a escola se perder a condução. Assim, a ocorrência do evento O afeta a probabilidade de ocorrência do evento E, significando que os dois eventos são dependentes.

Fonte: Elaboração própria (2024)

Ainda buscando contribuir, Gabriela, ciente que sua mãe está grávida, pensou na seguinte situação:

Vocês sabem que minha mãe está grávida. Aí eu pensei na seguinte situação: Uma família tem 4 filhos, e vamos selecionar ao acaso dois desses filhos. Seja F_1 o evento em que uma criança tem olhos azuis e

F_2 o evento em que a outra criança escolhida também tenha olhos azuis. Esses eventos são dependentes ou independentes?

Uma terceira situação ou tarefa foi apresentada por Gabriela. Assim, no Quadro 5, descreve-se o bloco prático-técnico (*práxis*) ou do saber-fazer, referente à sub tarefa 3 (t_3) ainda associada à Tarefa 1 (T_1).

Quadro 5: Descrição do bloco prático-técnico (*práxis*) ou do saber-fazer, referente à sub tarefa 3 (t_3) associada à Tarefa 1 (T_1), segundo a TAD

Sub tarefa 3 (t_3)	Considerar os eventos $F_1 = \{\text{uma criança tem olhos azuis}\}$ e $F_2 = \{\text{outra criança escolhida também tenha olhos azuis}\}$ e reconhecer se esses eventos são dependentes ou independentes.
Técnica (τ_3)	Nesse caso, F_1 e F_2 são dependentes, podendo ser justificados pelos seguintes aspectos: 1) Parte-se da consideração de que a cor dos olhos é hereditária. Assim, o fato de uma criança ter ou não olhos azuis aumentará ou diminuirá as chances de que a outra criança da mesma família tenha olhos azuis, respectivamente; 2) O resultado do primeiro evento afeta o resultado do segundo, pois, depois que selecionar aleatoriamente e identificar que o primeiro filho tem olhos azuis, haveria menos filhos, além de também ter olhos azuis na segunda seleção. Seria ainda considerada na escolha do segundo filho uma amostragem sem reposição, ou seja, o resultado da seleção do segundo filho depende da seleção do primeiro filho.

Fonte: Elaboração própria (2024)

Referente às sub tarefas 1 a 3 (t_1 a t_3) associadas, respectivamente, às técnicas 1 a 3 (τ_1 a τ_3), descreve-se bloco tecnológico-teórico (*logos*) ou do saber, ou seja, a tecnologia θ_1 e a teoria Θ_1 . Em outras palavras, esses blocos dependem do que ocorreu anteriormente. Eles são influenciados pelos resultados que já aconteceram, ou seja, dois ou mais eventos que dependem um do outro são conhecidos como eventos dependentes. Pode-se também considerar que dois eventos são dependentes se o resultado ou ocorrência do primeiro afetar o resultado ou ocorrência do segundo, de modo que a probabilidade seja alterada.

Considerando as sub tarefas 1 a 3, Kaori apresentou à turma e à professora Valéria uma atividade que copiou de um livro didático que pegou na biblioteca da escola (Figura 2).

Figura 2: Imagem da atividade copiada e depois digitada em um documento word por Kaori

Em uma sacola há duas bolas brancas e quatro pretas. Duas bolas são sorteadas simultaneamente.

- 1) Considerando o experimento aleatório “retirar duas bolas pretas da sacola”, indique se os eventos $E_1 = \{\text{a primeira bola selecionada}\}$ e $E_2 = \{\text{a segunda bola selecionada}\}$ são dependentes ou independentes?
- 2) Qual é a probabilidade de as duas bolas serem pretas?

Fonte: Elaborada pelos autores (2024)

Considera-se como Tarefa 2 *Reconhecer, em experimentos aleatórios cotidianos, eventos dependentes e calcular a probabilidade de sua ocorrência*. Partindo da Tarefa 2 (T_2), apresenta-se uma sequência de sub tarefas (t_4 a t_5) segundo a TAD e sua organização praxeológica matemática e didática.

Partindo da situação identificada por Kaori em um livro didático, no Quadro 6, descreve-se o bloco prático-técnico (*práxis*) ou do saber-fazer, referente às sub tarefas 4 e 5 associadas à Tarefa 2 (T_2).

Quadro 6: Descrição do bloco prático-técnico (*práxis*) ou do saber-fazer, referente às sub tarefas 4 e 5 (t_4 a t_5) associadas à Tarefa 2 (T_2), segundo a TAD

Sub tarefa 4 (t_4)	Considerar os eventos $P_1 = \{\text{retirar a primeira bola da sacola e verificar que é preta}\}$ e P_2
------------------------	--

	= {retirar a segunda bola da sacola e verificar que é preta} e reconhecer se esses eventos são dependentes ou independentes.
Técnica 4 (τ_4)	Considera-se que os dois eventos são dependentes, pois o resultado do primeiro evento afeta o resultado do segundo. Assim, os eventos P_1 e P_2 são dependentes, pois, depois que retirar a primeira bola da sacola e verificar que é preta, há menos bolas pretas na segunda seleção de outra bola preta. Ainda é destacado que é realizada uma amostragem sem reposição, sendo o resultado da segunda extração dependente do resultado da primeira.
Subtarefa 5 (t_5)	Considerando o experimento aleatório <i>retirar duas bolas simultaneamente de uma sacola em que há duas bolas brancas e quatro pretas</i> , calcular a probabilidade de duas bolas serem pretas.
Técnica 5 (τ_5)	Como há duas bolas brancas e quatro pretas no saco, a probabilidade de uma bola preta na primeira seleção é $4/6 = 2/3$. Na segunda parte, o segundo evento depende do primeiro e a probabilidade de obtenção de outra bola preta é modificada: $P(2^{\circ} \text{ bola preta}) = 3/5$. Ou seja, na primeira seleção havia 4 bolas pretas no total de 6 bolas, no entanto, na segunda seleção, há somente três bolas pretas em um total de 5 bolas. Assim, $P(2 \text{ bolas pretas}) = P(1^{\circ} \text{ bola preta e } 2^{\circ} \text{ bola preta}) = P(1^{\circ} \text{ bola preta} \cap 2^{\circ} \text{ bola preta}) = 2/3 \times 3/5 = 6/15 = 0,4$ ou 40%.

Fonte: Elaboração própria (2024).

Considerando a subtarefa 4 (t_4) associada à técnica 4 (τ_4), descreve-se bloco tecnológico-teórico (*logos*) ou do saber da mesma forma que a tecnologia θ_1 e a teoria Θ_1 , anteriormente descrita.

No caso da subtarefa 5 (t_5) associada à técnica 5 (τ_5), a tecnologia θ_2 pode ser descrita segundo Anderson, Sweeney e William (2012), enquanto a lei da multiplicação ou produto que é utilizada para calcular a probabilidade da interseção de dois eventos, sendo baseada na definição de probabilidade condicional.

Considerando os estudos de Glen (2023), dois eventos são considerados dependentes quando a ocorrência de um influencia a probabilidade de outro. Os eventos dependentes na probabilidade refletem situações comuns na vida real. Por exemplo: 1) Se você deseja assistir a um concerto, isso pode depender de você receber horas extras no trabalho; 2) Se você planeja visitar a família fora do país no próximo mês, isso pode depender de conseguir ou não um passaporte a tempo.

A teoria Θ_2 , que explica e justifica a tecnologia θ_2 e a técnica τ_4 , é inicialmente embasada, segundo Smole e Diniz (2010, p. 12), da seguinte forma:

Se um acontecimento A_1 pode ocorrer de m_1 maneiras diferentes, para cada maneira de A_1 ocorrer, um acontecimento A_2 pode ocorrer de m_2 maneiras diferentes e, para cada maneira de A_1 e de A_2 ocorrerem, um acontecimento A_3 pode ocorrer de m_3 maneiras diferentes: então, o número de maneiras diferentes de ocorrerem A_1 , A_2 e A_3 é $m_1 \times m_2 \times m_3$.

Complementando a lei da multiplicação e produto, para Magalhães e Lima (2005), dados dois eventos A e B , a probabilidade condicional de A dado que ocorreu B pode ser representada por $P(A/B)$ e dada por $P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$, $P(B > 0)$. Assim, considerando as equações (1) e (2),

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \quad (1)$$

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \quad (2)$$

e calculando $P(A \cap B)$, obtém-se a lei da multiplicação ou produto, indicadas em (3) e (4):

$$P(AB) = P(B) * P(A/B) \quad (3)$$

$$P(AB) = P(A) * P(B/A) \quad (4)$$

Partindo das leis anteriormente apresentadas, pode-se ainda considerar que, quando dois eventos A e B são dependentes, a probabilidade de ocorrência de A e B é indicada pelas expressões (3) ou (4).

Por fim, Kauê, que já havia aprendido bastante sobre eventos aleatórios dependentes e curioso em saber sobre daltonismo, uma condição de um de seus irmãos, apresentou a todos uma pesquisa que fez na *internet*:

Sabe-se que na população em geral existem 51% de homens e 49% de mulheres e que as proporções de homens e mulheres daltônicos (habilidades reduzidas para distinguir certas cores) são apresentadas na seguinte tabela:

	Homem (B)	Mulher (B)	Total
Ser daltônico (A)	0,040	0,002	0,042
Não ser daltônico (A)	0,470	0,488	0,958
Total	0,510	0,490	1,000

Além disso, se uma pessoa for selecionada aleatoriamente dessa população e for considerado um homem (evento B), qual é a probabilidade de o homem ser daltônico (evento A)?

Considera-se como Tarefa 3 *Calcular a probabilidade de problema do cotidiano*. Partindo dessa tarefa, apresenta-se a sub tarefa (t_6) segundo a TAD. No Quadro 7, descreve-se o bloco prático-técnico (*práxis*) ou do saber-fazer, referente à sub tarefa 6 associada à Tarefa 3 (T_3).

Quadro 7: Descrição do bloco prático-técnico (*práxis*) ou do saber-fazer, referente à sub tarefa 6 (t_6) associada à Tarefa 3 (T_3), segundo a TAD

Subtarefa 6 (t_6)	Considerando o experimento aleatório <i>selecionar um homem da população e este ser daltônico</i> e caso uma pessoa seja selecionada aleatoriamente dessa população e for considerado um homem (evento B), calcular a probabilidade de o homem ser daltônico (evento A).
Técnica 6 (τ_6)	Considera-se que os dois eventos são dependentes, pois o resultado do primeiro afeta o resultado do segundo. Ao sabermos que o evento B ocorreu, restringe-se a atenção apenas aos 51% ou 0,51 da população que é do sexo masculino. Ainda se destaca que, na tabela apresentada, identifica-se sabendo que a pessoa é homem, a probabilidade de ser daltônico é igual a 4% ou 0,04. Assim, a $P(\text{Pessoa ser daltônica -evento A/pessoa é um homem - evento B}) = P(A) * P(B/A) = 0,51 * 0,04 = 0,0204$ ou 2,04%.

Fonte: Elaboração própria (2024).

A teoria Θ_3 , que explica e justifica a tecnologia θ_3 e a técnica τ_6 , é embasada segundo Berenson (2008) e Tavares (2014). Ao verificar se dois eventos são independentes ou dependentes, é necessário definir o conceito de probabilidade condicionada de um evento em relação a outro e diferenciar eventos inclusivos.

Conforme Berenson (2008) e Tavares (2014), define-se a probabilidade condicionada de dois eventos inclusivos como a probabilidade de ocorrência do evento A, sempre que o evento B ocorrer, ou seja, $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ ou $P(AB) = P(B) * P(A/B)$. Portanto, a

probabilidade condicionada é a probabilidade de que A e B ocorram divididos pela probabilidade de ocorrer B. Ademais, também pode-se definir a probabilidade de que B ocorra condicionado a A, ou seja, $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ ou $P(AB) = P(A) * P(B/A)$. Nesse caso, os eventos são dependentes.

5.2 Tarefas referentes à participação da equipe da Escola Sete Colinas na etapa nacional da Olimpíada de Probabilidade

Destaca-se que, como parte da narrativa do livro paradidático, pensou-se na utilização de um jogo que abordasse os conteúdos probabilísticos para consolidar e fixar o objetivo pelo qual emergiu a ideia da elaboração de um livro paradidático. O objetivo didático foi utilizar jogos de azar, que são aqueles em que a perda ou o ganho dependem mais da sorte do que do cálculo, ou somente da sorte, sendo esses jogos muito ligados às probabilidades.

Foi considerando o bingo, um jogo de azar em que bolas numeradas são colocadas dentro de um globo e sorteadas uma a uma, até que algum jogador preencha toda a sua cartela com esses resultados. Tradicionalmente, os vencedores são aqueles que conseguem preencher primeiro a cartela, e ao fazê-lo, devem alertar que ganharam gritando a palavra *BINGO!*.

Ainda se pensou no jogo *Bingo das Probabilidades* em que são fornecidas cartelas aos jogadores líderes de cada grupo, contendo vinte e cinco representações de números 5x5(cinco por cinco), relacionados ao número de letras da palavra BINGO.

O jogo funciona como um bingo tradicional, porém, as cartelas contêm perguntas sobre probabilidade. Cada jogador marca os valores em sua cartela se forem a resposta correta para a pergunta sorteada. Esse jogo compõe a última etapa da Olimpíada, que ocorrerá em nível nacional, e o grupo formado pelos personagens principais terá que passar por esta etapa para vencer a Olimpíada.

Cabe lembrar que a participação no jogo parte do princípio de que o aluno tenha estudado os conteúdos probabilísticos dessa etapa. Quando utilizado o paradidático na sala de aula, ele pode ser pensado para avaliar os conhecimentos prévios dos alunos, direcionar o ensino ou ainda como fixação dos conteúdos. No enredo da história do livro paradidático, durante a competição, quando a equipe determinar a solução em uma folha de papel oficial da Olimpíada, eles devem marcar o valor correspondente em sua cartela do Bingo.

Dessa forma, são apresentados no Quadro 8 cinco problemas direcionados aos conceitos probabilísticos para o nono ano do ensino fundamental, especificamente eventos aleatórios dependentes. Esses problemas constarão de material impresso disponibilizado pela organização do evento e, conseqüentemente, iniciarão o jogo e a etapa final da Olimpíada.

Quadro 8: Problemas presentes da Olimpíada de Probabilidade referentes a eventos aleatórios dependentes

Questão da competição	Enunciado
1	É lançado um dado de seis faces. O evento <i>A</i> é obter um número par e o evento <i>B</i> obter um número primo. Determine $P(A \cap B)$.
2	Pega-se duas balas ao acaso de um saco que contém oito doces mastigáveis e dois doces crocantes (não mastigáveis). O evento <i>A</i> é pegar primeiro um doce mastigável e o evento <i>B</i> é pegar um doce crocante na segunda seleção. Calcular $P(\text{Pegar um doce mastigável na primeira seleção e Pegar um doce crocante na segunda seleção})$.
3	Seleciona-se dois colegas aleatoriamente de um grupo contendo cinco meninos e cinco meninas. O evento <i>A</i> é selecionar primeiro um menino e o evento <i>B</i> é selecionar

	uma menina, em segundo lugar. Calcular a seguinte probabilidade: P (selecionar primeiro um menino e selecionar uma menina, em segundo lugar).
4	Deseja-se selecionar dois alunos para ajudar na elaboração de questões sobre eventos aleatórios de uma das equipes que participam da Olimpíada de Probabilidade, ou seja, 3 meninas e 2 meninos. Qual é a probabilidade de que os selecionados sejam dois meninos?
5	Uma livraria que fica próxima ao local da etapa final da Olimpíada recebe periodicamente novas remessas de livros de probabilidade para o ensino fundamental. Na verdade, a probabilidade de receberem novos livros em qualquer dia é de 76%. Caso uma remessa de novos livros, espera-se que haja 30% de probabilidade de que livros sobre conceitos probabilísticos (eventos aleatórios dependentes) que deseja comprar esteja nessa remessa. Qual é a probabilidade de que haja uma remessa de novos livros de probabilidade hoje e que o livro sobre conceitos probabilísticos (eventos aleatórios) esteja nessa remessa?

Fonte: Elaboração própria (2024)

Considera-se como Tarefa 4 *Calcular a probabilidade de problema do cotidiano após reconhecer que se configura como experimento aleatório dependente*. Partindo dessa tarefa, apresenta-se uma sequência de subtarefas (t_7 a t_{11}) segundo a TAD e sua organização praxeológica matemática e didática. No Quadro 9, descreve-se o bloco prático-técnico (*práxis*) ou do saber-fazer, referente às subtarefas 7 e 11 associadas à Tarefa 4 (T_4).

Quadro 9: Descrição do bloco prático-técnico (*práxis*) ou do saber-fazer, referente às subtarefas 6 a 10 (t_6 a t_{10}) associadas à Tarefa 3 (T_3), segundo a TAD

Questão da Olimpíada	Subtarefa	Técnica
1	Subtarefa t_7 - Considerando o experimento aleatório de <i>lançar duas vezes um dado de seis faces</i> , calcular a probabilidade de obter um número par no primeiro lançamento e um número primo no segundo.	Técnica τ_7 - O evento A é um número par $\{2,4,6\}$, enquanto B é um número primo $\{2,3,5\}$. A probabilidade de sair um número primo é $P(B)=1/2$ porque existem 3 números primos de 6 resultados igualmente prováveis. Por outro lado, se assumirmos que já foi selecionado um número par, então o resultado tem que ser um 2 para que seja um número primo. Em outras palavras, o evento B dado A é o mesmo que obter 2 de $\{2,4,6\}$. Então, $P(B A) = 1/3$. Como $P(B A) \neq P(B)$, os dois eventos são dependentes. Para indicar a probabilidade associada a esse experimento aleatório, temos que: $P(A \cap B) = P(A) * P(B/A) = \frac{1}{2} * \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = 0,1667$ ou 16,67%.
2	Subtarefa t_8 - Considerando o experimento aleatório <i>retirar dois doces ao acaso de um saco que contém oito doces mastigáveis e dois doces crocantes</i> , calcular a probabilidade de o primeiro ser um doce comestível e o segundo um doce crocante.	Técnica τ_8 - O evento A é a criança pegando um doce mastigável primeiro, e o evento B é a criança pegando um doce crocante (não mastigável) em segundo lugar. Para determinar se os dois eventos são independentes ou dependentes, é necessário identificar se a probabilidade de ocorrência do evento B é diferente dependendo se o evento A já ocorreu ou não. Sendo selecionado o doce mastigável na primeira seleção, diz-se que o evento A ocorreu e P (sair um doce mastigável na primeira seleção) = $8/10 = 2/5$. Considerando que o doce fica fora do saco (sem repor no saco) e realizar uma segunda seleção do que sobrar no saco, é nessa seleção selecionar um doce crocante, então $P(B A) = 2/9$. Como $P(B A) \neq P(A)$, os dois eventos são dependentes. Para indicar a probabilidade associada a esse experimento

		aleatório, temos que: $P(A \cap B) = P(A) * P(B/A) = \frac{2}{5} * \frac{2}{9} = \frac{4}{45} = 0,0889$ ou 8,89%.
3	Subtarefa t_9 - Considerando o experimento aleatório <i>selecionar duas crianças de grupo de colegas de cinco meninos e cinco meninas</i> , calcular a probabilidade de o primeiro ser um menino e o segundo uma menina.	Técnica τ_9 – Seja o evento A selecionar primeiro um menino e o evento B selecionar uma menina, em segundo lugar em um grupo com 2 meninos e 3 meninas. Assim, a probabilidade de selecionar uma menina em segundo lugar depende se um menino foi primeiramente selecionado – $P(A) = 2/5$, uma vez que a composição do grupo restante para a segunda seleção será diferente. Dessa forma, sendo que o evento A ocorreu, haverá 2 meninos e 2 meninas disponíveis para a segunda seleção e $P(B A) = 2/4 = 1/2$. Como $P(B A) \neq P(A)$, os dois eventos são dependentes. Para indicar a probabilidade associada a esse experimento aleatório, temos que: $P(A \cap B) = P(A) * P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{2}{5} * \frac{1}{2} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = 0,2$ ou 20%.
4	Subtarefa t_{10} - Considerando o experimento aleatório <i>selecionar dois alunos participantes da Olimpíada de Probabilidade para elaborar questões de um grupo de dois meninos e três meninas</i> , calcular a probabilidade de os dois serem meninos.	Técnica τ_{10} - Número total de alunos participantes do grupo que participa da Olimpíada de Probabilidade = 3 meninas + 2 meninos = 5 alunos. A Probabilidade de escolher o primeiro menino, digamos P (selecionar primeiro menino) = $2/5$. P (selecionar segundo menino/selecionar primeiro menino) = $P(B/A) = 1/4$. Ademais, como $P(B/A) \neq P(A)$, os dois eventos são dependentes. Por fim, P (selecionar primeiro menino e selecionar segundo menino) = P (selecionar primeiro menino) * P (selecionar segundo menino/selecionar primeiro menino) = $(A) * P\left(\frac{B}{A}\right) = (2/5) \times (1/4) = 2/20 = 1/10 = 0,1$ ou 10%.
5	Subtarefa t_{11} - Considerando o experimento aleatório <i>ter em uma remessa de novos livros de probabilidade um livro sobre conceitos probabilísticos (eventos aleatórios)</i> , calcular a probabilidade de que o livro sobre conceitos probabilísticos (eventos aleatórios) esteja nessa remessa de novos livros.	Técnica τ_{11} - Seja A = “uma remessa de novos livros de probabilidade chega hoje” e B = “o livro que você deseja comprar está nessa remessa”. Primeiramente identifica-se que os dois eventos são dependentes, pois na remessa de novos livros de probabilidade, poderá ter conceitos que abordem eventos aleatórios dependentes e que o interessa. A questão ainda solicita determinar a probabilidade de que cheguem novos livros de probabilidade e que o livro que deseja comprar (eventos aleatórios dependentes) esteja entre eles, ou seja, deseja-se determinar a $P(A \text{ e } B)$ ou $P(A \cap B)$. A questão ainda indica que $P(B/A)$ é 30% ou 0,30, ou seja, “desde que a livraria receba novos livros de probabilidade hoje, seu livro estará entre eles (eventos aleatórios dependentes)”. Portanto, utilizando a seguinte equação para probabilidade condicional, $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$, obtém-se: $0,30 = \frac{P(A \cap B)}{0,76}$. Então: $P(A \cap B) = 0,30 \times 0,76 = 0,228$ ou 22,8%

Fonte: Elaboração própria (2024).

A teoria Θ_4 , que explica e justifica a tecnologia θ_4 e as técnicas τ_7 a τ_{11} , complementa a teoria Θ_3 , que explica e justifica a tecnologia θ_3 e a técnica τ_6 , conforme discutido por Berenson (2008) e Tavares (2014), ou diferencia eventos exclusivos de eventos inclusivos.

Para Berenson (2008), dois eventos são ditos exclusivos se os possíveis valores ou elementos de um evento A não tiverem nada em comum com os valores ou elementos de outro,

denominado de B. Portanto, em dois eventos exclusivos, o conjunto da interseção de A com B é o vazio: $A \cap B = \emptyset$. Pelo contrário, se os eventos são inclusivos, pode ocorrer que um ou mais resultados do evento A coincida com os de outro evento B, com A e B sendo eventos diferentes. Nesse caso: $A \cap B \neq \emptyset$.

Para Berenson (2008), considera-se três critérios para saber se dois eventos são independentes, bastando que um dos três seja cumprido, para que a independência dos eventos seja demonstrada. Caso contrário, os eventos serão dependentes. Assim:

- 1) Caso a probabilidade de A acontecer sempre que B ocorre e for igual à probabilidade de A, então são eventos independentes, ou seja, $P(A/B) = P(A) \Rightarrow A$ é independente de B.
- 2) Caso a probabilidade de ocorrência B dada A seja igual à probabilidade de B, então existem eventos independentes, isto é, $P(B/A) = P(B) \Rightarrow B$ é independente de A.
- 3) Caso a probabilidade que ocorre A e B for igual ao produto da probabilidade que acontece A pela probabilidade que ocorre B, então esses são eventos independentes. O recíproco também é verdadeiro. Assim, $P(A \cap B) = P(A) * P(B) \Leftrightarrow A$ e B são eventos independentes.

6 Considerações finais

Pensar nos conceitos probabilísticos como os eventos aleatórios dependentes é elaborar pesquisas que vão ao encontro das necessidades da escola básica brasileira, para contribuir com o crescimento e o desenvolvimento de uma sociedade autônoma, crítica, ativa e capaz de tomar decisões frente às informações com as quais se depara.

Acredita-se ainda que, por meio da TAD e da Organização Matemática e Didática, pode-se ampliar o olhar em relação às diversas possibilidades existentes que circundam cada tarefa apresentada neste texto, pensada desde o *saber* até o *fazer* probabilístico.

O intuito é contribuir com os processos de ensino e aprendizagem de alunos e professores do final do Ensino Fundamental. Concebe-se que a criação dessas tarefas, constante da narrativa de uma literatura infantojuvenil, propiciará ao aluno momentos de prazer, trocas e aprendizagem, e ao professor, um recurso teórico para abordar os conteúdos que são trabalhados.

Relativo à TAD, sua utilização permitiu identificar um conjunto de praxeologias que possibilitam caracterizar tanto o objeto matemático (probabilístico) quanto a abordagem didática para esse objeto. A organização praxeológica foi composta por quatro elementos:

1. Tarefa (T) e suas subtarefas (t): caracterizaram a ação demandada pela situação-problema proposta para as tarefas constantes do livro paradidático. Por exemplo, calcular a probabilidade de um problema do cotidiano após reconhecer que se configura como experimento aleatório dependente;
2. Técnica (τ): identifica a forma de realização da tarefa e suas subtarefas. Cada tarefa possui, pelo menos, uma técnica associada a ela. Por exemplo, determinar se dois eventos são dependentes. Considerando outros experimentos, teremos outras possibilidades conjugadas como os eventos serem independentes;
3. Tecnologia (θ)/Teoria (Θ): foi especificada pelo conjunto de definições, propriedades, axiomas e teoremas que justificam a técnica. Por exemplo, a tecnologia que justifica a técnica é a definição de evento aleatório dependente, ou seja, para cada experimento aleatório E, define-se espaço amostral S o conjunto de todos os possíveis resultados desse experimento. Considera-se que existem várias maneiras de encontrar as

probabilidades de eventos dependentes como partindo do Princípio Fundamental da Contagem.

Além das contribuições apontadas pela TAD, este estudo busca destacar que não basta apenas ter habilidades relacionadas ao cálculo probabilístico no processo de ensino e aprendizagem. É necessário observar o contexto em que os dados estão inseridos. Em outras palavras, as tarefas devem ser pensadas considerando sua aplicação no contexto da sala de aula. Além de dominar o cálculo, é necessário ser capaz de explicar o comportamento dos dados.

A pesquisa ainda poderia ter sido norteadas, de forma semelhante, pelo modelo de letramento probabilístico e seus elementos cognitivos propostos por Gal (2005), quais sejam: 1) Grandes Ideias: aleatoriedade, independência, variação, previsibilidade e incerteza e outras; 2) Cálculos Probabilísticos: diferentes formas de encontrar ou estimar a probabilidade de eventos; 3) Linguagem: os termos e os métodos utilizados para expressar os resultados probabilísticos; 4) Contexto: compreensão do papel e dos significados de mensagens probabilísticas em diferentes contextos; 5) Questões críticas: reflexões sobre assuntos no contexto de probabilidade. Esses aspectos estariam associados à importância da mobilização e coordenação de registros de representação semiótica na perspectiva de Duval (2016) para a aprendizagem da probabilidade.

Agrega-se a ideia de que a apreensão desse conceito não ocorre de forma simples, mesmo porque não são simples, mas acredita-se que a transposição didática adotada no dia a dia da sala de aula, fará toda a diferença no processo ensino e aprendizagem.

Reforça-se segundo Bargagliotti *et al.* (2020) que a probabilidade trata de quantificar a aleatoriedade, sendo fundamental para a realização de previsões estatísticas. É importante começar a desenvolver esses conceitos desde a tenra idade, criando situações nas quais os alunos possam utilizar a probabilidade informalmente. Isso permite considerar previsões informais além do escopo dos dados que analisaram.

A criação das tarefas que compõem o livro paradidático se justifica pelo fato de que a narrativa contada em um ambiente lúdico atrai a atenção do público infantojuvenil, que de maneira espontânea participa e compartilha seus conhecimentos.

Referências

- Anderson, D. R.; Sweeney, D. J. & William, T. A. (2012). *Estadística para Negocios y Economía*. (11. ed.). México: Cengage Learning.
- Bargagliotti, A.; Franklin, C.; Arnold, P.; Johnson, G.; Rob, S.; Perez, L. & Spangler, D. A. (2020). *Pre-K–12 Guidelines for assessment and instruction in statistics education II - A framework for statistics and data science education*. An official position of the National Council of Teachers of Mathematics as approved by the NCTM Board of Directors.
- Bennett, D. J. (2003) *Aleatoriedade*. Tradução de W. Barcellos. São Paulo, SP: Martins Fontes.
- Berenson, M. (2008). *Estatísticas para Administração e Economia*. (10. ed.). São Paulo, SP: Pearson Universidades.
- Bittar, M. (2017). A Teoria Antropológica do Didático como ferramenta metodológica para análise de livros didáticos. *Zetetiké*, 25(3), 364-387.
- Bosch, M. & Chevallard, Y. (1999). Ostensifs et sensibilité aux ostensifs dans l'activité mathématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* (pp. 77-124). Grenoble: La Pensée Sauvage.

- Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. (2018). *Base Nacional Comum Curricular: Educação Infantil e Ensino Fundamental*. Brasília, DF: MEC/SEF.
- Campos, C. R. & Perin, A. P. (2021). Livro paradidático: um estudo voltado para o ensino/aprendizagem de Estatística na escola básica. *Educação Matemática Pesquisa*, 23(4), 140-170.
- Chevallard, Y. (1996). Conceitos Fundamentais da Didática: as perspectivas trazidas por uma abordagem antropológica. In J. Brun. (Org.). *Didáctica das Matemáticas* (Tradução de M. J. Figueredo; pp. 193-217). Lisboa: Instituto Piaget.
- Chevallard, Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: L'approche anthropologique. *Actes de l'U.E. de la Rochelle*.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques. La Pensée Sauvage-Éditions*, 19(2), 221-265.
- Chevallard, Y. ; Bosch, M. & Gascón, J. (2001). *Estudar matemáticas: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem* (Tradução de D. V. Moraes). Porto Alegre, RS: Artmed.
- Diogo, R. C.; Osório, A. S. & Silva, D. R. R. (2007). A Teoria Antropológica do Didático: Possibilidades de Contribuição ao Ensino de Física. In: *Anais do VI Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências*. Florianópolis, SC.
- Duval, R. (2016). Questões epistemológicas e cognitivas para pensar antes de começar uma aula de matemática (Tradução de M. T. Moretti). *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, 11(2), 2 40.
- Gal, I. (2005). Towards 'probability literacy' for all citizens. In A. Graham. (Ed.). *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning* (pp. 43-71). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Glen, S. (2003). *Dependent Events and Independent Events*. From StatisticsHowTo.com: Elementary Statistics for the rest of us!
- Magalhães, M. N. & Lima, A. C. P. (2005). *Noções de probabilidade e estatística*. Editora da Universidade de São Paulo.
- Oliveira Júnior, A. P. & Datori Barbosa, N. (2023). Tasks about impossible random events: a pedagogical game as a teaching tool for the early years of elementary school. *Acta Scientiae*, 25(6), 183-208.
- Oliveira Júnior, A. P. & Lozada, A. O. (2023). A pesquisa sobre a utilização e criação de livros paradidáticos para o ensino de probabilidade nos anos finais do Ensino Fundamental no Brasil. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, 14(4), 1-25.
- Oliveira Júnior, A. P.; Souza, N. G. S. & Datori Barbosa, N. (2019). A resolução de problemas no ensino de estatística no ensino fundamental: contribuições da Teoria Antropológica do Didático e a Equivalência de Estímulos. *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, 14, 1-18.
- Smole, K. C. & Diniz, M. I. S. V. (2010). *Matemática: Ensino Médio*. São Paulo, SP: Saraiva.
- Tavares, M. (2014). *Estatística aplicada à Administração*. (3. ed., rev. ampl). Florianópolis, SC: Universidade Federal de Santa Catarina.