Sociedade Brasileira de
Educação Matemática

RIPEM

Conhecimento especializado do professor de Matemática em relação à divisão de fração no contexto da formulação de problemas

Gabriela Gibim
Universidade Estadual de Campinas
Jundiaí, SP — Brasil
✉ gabi.gibim@gmail.com
0000-0002-7588-3579

Laura Rifo
Universidade de Campinas
Campinas, SP — Brasil
✉ laurarifo@unicamp.br
0000-0002-1579-8073

Nuria Climent
Universidad de Huelva
Huelva, Andalicia — Espanha
✉ climent@ddcc.uhu.es
0000-0002-0064-1452

2238-0345

10.37001/ripem.v14i4.3782

Received • 18/03/2024
Approved • 13/05/2024
Published • 15/10//2024

Editor • Gilberto Januario

Resumo: Este trabalho objetiva apresentar o conhecimento especializado revelado por professores de Matemática mediante uma tarefa para formação relativa à formulação de problemas sobre divisão de fração. Trata-se de uma investigação qualitativa, e a metodologia é o estudo de caso instrumental, cujas análises foram pautadas nas produções dos professores e nas discussões em plenária durante a formação. Os resultados evidenciam que os professores detêm um conhecimento em relação: ao sentido de partilha; à solução de problemas por meio do algoritmo inverte-multiplica; e à representação contínua na forma retangular. No entanto, os professores apresentam dificuldades referentes ao sentido de medida da divisão; à representação contínua e discreta; e à formulação de problemas, principalmente quando o divisor e o dividendo são frações. Percebe-se que a formulação de problemas contribui para a aprendizagem da divisão de fração, pois auxilia na compreensão de conceitos matemáticos e na resolução de problemas.

Palavras-chave: Formulação de Problemas. Conhecimento Especializado do Professor. Divisão de Fração.

Mathematics teacher's specialized knowledge regarding fraction division in the context of problem formulation

Abstract: This work aims to present the specialized knowledge revealed by mathematics teachers through a training task relating to the formulation of problems on fraction division. The study deals with qualitative research combined with a case study. The analyzes were based on the teachers' productions and plenary discussions during training. The results show that teachers have knowledge regarding the meaning of sharing, problem solving using the invert-multiply algorithm and continuous representation in rectangular form. However, teachers present difficulties regarding the sense of division measurement, continuous and discrete representation, and the formulation of problems, especially when the divisor and dividend are fractions. It is clear that formulating problems contributes to learning fraction division, as it helps in understanding mathematical concepts and solving problems.

Keywords: Problem Formulation. Specialized Teacher Knowledge. Fraction Division.

Conocimiento especializado del profesor de matemáticas sobre la división de fracciones en el contexto de la formulación de problemas

Resumen: Este trabajo tiene como objetivo presentar los conocimientos especializados revelados por profesores de matemáticas a través de una tarea formativa relativa a la formulación de problemas de división de fracciones. El estudio trata de una investigación cualitativa combinada con un estudio de caso. Los análisis se basaron en las producciones de los profesores y en discusiones plenarias durante la formación. Los resultados muestran que los docentes tienen conocimientos respecto al significado de compartir, resolución de problemas mediante el algoritmo inversión-multiplicación y representación continua en forma rectangular. Sin embargo, los docentes presentan dificultades en cuanto al sentido de la medición de la división, la representación continua y discreta y la formulación de problemas, especialmente cuando el divisor y el dividendo son fracciones. Está claro que formular problemas contribuye al aprendizaje de la división de fracciones, ya que ayuda a comprender conceptos matemáticos y resolver problemas.

Palabras clave: Formulación del Problema. Conocimientos Docentes Especializados. División de Fracciones.

1 Introdução

A formulação de problemas é uma prática importante na aprendizagem matemática (Cai, Hwang, Jiang & Silber, 2015; Ellerton, 2013), pois se faz relevante para o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas, bem como para o aprofundamento dos conceitos de Matemática (*National Council of Teachers of Mathematics* [NCTM], 2000; Toluk-Uçar, 2009; Isik & Kar, 2012). Sabemos que a prática do professor é moldada pelo seu conhecimento (Ball & Bass, 2000), o qual desempenha um papel fundamental na formação docente (Ball, Lubienski & Mewborn, 2001). Assim, é fundamental o trabalho com formulação de problemas, a fim de desenvolver e ampliar o conhecimento matemático do professor de Matemática (Lee, Lee & Park, 2016).

Neste trabalho, abordaremos a formulação de problemas sobre a divisão de fração, pois esta é uma temática desafiadora tanto para os alunos, do ponto de vista de aprendizagem, como para os professores, da perspectiva de ensino (Behr, Harel, Post & Lesh, 1992; Lamon, 2007). Pesquisas apontam que professores apresentam limitações para formular problemas matematicamente corretos e significativos sobre divisão de fração (Ma, 1999; Kilic, 2015; Lo & Luo, 2012). Esses estudos indicam que os professores têm dificuldades em relação ao conceito de fração e divisão (Toluk-Ucar, 2009) e que esses desafios afetam o processo de formulação de problemas sobre divisão de fração (Ervin, 2017).

Este trabalho objetiva apresentar o conhecimento especializado revelado por professores de Matemática mediante uma tarefa para formação relativa à formulação de problemas sobre divisão de fração. Assim, esta investigação tem como pergunta: Qual conhecimento matemático especializado os professores revelam ao realizar uma tarefa de formulação de problemas sobre divisão de fração? Desse modo, investiga-se o conhecimento dos professores a respeito da divisão de fração em relação à representação de problemas de palavras para algumas operações de divisão predeterminadas.

2 Formulação de problemas de divisão de frações e conhecimento do professor

A formulação de problemas desempenha um papel fundamental no estabelecimento de vínculos entre casos da vida real e frações, bem como operações envolvendo frações (Abu-

Elwan, 2002; Iskenderoglu, 2018). Para contribuir com os objetivos de entender conceitos abstratos e selecionar os conceitos matemáticos apropriados para resolver problemas, pode-se utilizar problemas de palavras (DeWolf, Grounds, Bassok, & Holyoak, 2014). Ademais, o conhecimento dos professores a respeito da divisão de frações, adquirido por meio da formulação de problemas, contribui para desenvolver e ampliar esse conhecimento (Kilic, 2015; Xie & Masingila, 2017).

Estudos apontam dificuldades enfrentadas pelos professores em relação à divisão e às frações. Esses desafios estão relacionados a vários aspectos, como: os sentidos de divisão, medida e partilha (Simon, 1993; Lo & Luo, 2012); a concepção de que o resultado da divisão é sempre menor que o dividendo (Tirosh, 2000); a formulação incorreta de problemas, como elaborar multiplicação em vez de divisão (Ma, 1999; Zembat, 2004; Iskenderoglu, 2018); a falta de capacidade em representar corretamente um problema em palavras (Utley & Redmond, 2008); e a capacidade de diferenciar problemas que se referem a 6:2 e 6:1/2 (Ma, 1999). Essas dificuldades ocorrem devido à falta de experiência dos professores na formulação de problemas, bem como à incompreensão conceitual das frações e da divisão (Xie & Masingila, 2017).

Ma (1999) propõe a ideia de um pacote de conhecimento que os professores deveriam deter para a divisão de fração. Esse modelo indica que uma compreensão profunda da divisão de fração é construída em uma rede de conhecimento prévio. Isso inclui conceito de unidade, significados da multiplicação com frações, conceitos da divisão com números inteiros e concepção da operação inversa das operações (divisão e multiplicação). Estes, no entanto, são construídos sobre o conceito de frações, enquanto o significado da multiplicação com número inteiro é constituído a partir do significado da adição com número inteiro (Lo & Luo, 2012).

Assim, os professores necessitam ter um conhecimento especializado em relação à divisão de fração, a fim de ampliar o que sabem acerca dessa temática. Entendemos o conhecimento especializado do professor no sentido do modelo *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge*[1] [MTSK] (Carrillo *et al.,* 2018), no nosso caso, relativo à divisão de fração. Nos referimos, portanto, a um conhecimento profissional específico do professor de Matemática, utilizado no trabalho docente, construído desde a formação inicial, bem como ao longo de sua carreira (Climent, 2002).

Essa especialização se situa no domínio do Conhecimento do Conteúdo, no caso, o Matemático (*Mathematical Knowledge* [MK]), e do Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (*Pedagogical Content Knowledge* [PCK]), incluindo as crenças dos professores sobre a Matemática, bem como acerca do ensino e da aprendizagem da disciplina.

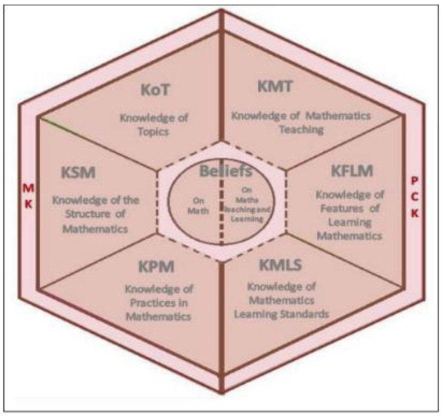
Aqui, focaremos nos subdomínios do *Mathematical Knowledge* (MK), haja vista que trataremos das especificidades do conhecimento matemático do professor, o qual permite sustentar a atribuição de significado relativo ao tópico da divisão de frações.

O *Knowledge of Topics* (KoT) inclui o conhecimento matemático do professor associado à divisão de fração, sustentando o entendimento do que se faz, de como se faz e do porquê se faz de determinada forma. Além disso, abrange o conhecimento de diferentes tipos de registros de representação e das múltiplas definições possíveis para um mesmo conceito. No contexto da divisão de frações, inclui, por exemplo, conhecer: distintos sentidos atribuídos a essa operação, como medição e partição (Simon, 1993); distintos procedimentos (algoritmos) – tradicionais ou não comuns –; propriedades, como a relação entre o divisor e a unidade de medida, bem como

[1] Por ser esta uma conceitualização do conhecimento professor divulgada e reconhecida internacionalmente, mantivemos a nomenclatura em inglês para todos os termos do modelo, pois sua tradução poderia desvirtuar o entendimento dos conteúdos de cada um dos subdomínios que compõem o modelo que a representa (Figura 1).

entre o dividendo e o todo a ser medido; a equivalência de frações, ligada ao conceito de número racional como representante de uma classe de números equivalentes; os diferentes tipos de frações e as distintas formas de representação associadas ao cálculo da divisão de frações – pictóricas e algébrica.

Figura 1: Domínios do Mathematics Teacher's Specialised Knowledge



Fonte: Carrillo *et al.* (2018, p. 241).

O *Knowledge of the Structure of Mathematics* (KSM) corresponde ao conhecimento matemático do professor sobre cada um dos tópicos, de maneira ampla e profunda, que sustenta as conexões entre eles. Em relação à divisão de fração, inclui-se, por exemplo, o conhecimento relativo à comparação com a divisão de números inteiros e ao inverso multiplicativo nos números racionais, reais e complexos.

Já no *Knowledge of Practices in Mathematics* (KPM), inclui-se o conhecimento do professor associado às formas de fazer Matemática. Entre elas, está o conhecimento de demonstração e das diferentes maneiras de se apresentar resultados matemáticos, assim como dos critérios para estabelecer uma generalização válida e das diversas estratégias de resolução de problemas. No âmbito da divisão de frações, esse conhecimento contempla, por exemplo, conhecer a justificação para generalizar os distintos procedimentos.

As dimensões do conhecimento especializado do professor, incluindo as crenças, sustentam a sua atuação ao desenvolver, nos alunos, os conhecimentos e as habilidades matemáticas sem se limitar a uma única forma de fazer, evitando o ensino de regras como ponto de partida e, quando muito, utilizando-as como ponto de chegada. Para tanto, a atuação do professor deve assumir, inicialmente, o conhecimento dos alunos, o que requer o conhecimento interpretativo (Ribeiro, Almeida & Mellone, 2021). Logo, com o intuito de promover uma melhoria na prática de aprendizagem matemática, se faz essencial um foco centrado no conhecimento do professor, considerando suas especificidades.

Desse modo, percebe-se a necessidade de ampliar o conhecimento dos professores em relação à divisão de frações no contexto da formulação de problemas. Assim, devemos pensar em questões como: *Se eu tenho a operação 5 ÷ 2, que problemas posso formular? Quantos problemas matematicamente distintos posso elaborar?*

Para isso, devemos deter o conhecimento em relação aos sentidos da divisão. Entre os sentidos da divisão (Simon, 1993), assumimos como ponto inicial a partitiva e a medida. A noção do conceito de medida está associada à comparação entre quantidades que expressam grandezas de mesma natureza e à quantificação. Neste, o número de itens em cada grupo é conhecido. Já o sentido partitivo tem significado nos contextos em que, dada uma quantidade de elementos de um conjunto (dividendo), deseja-se partilhar (distribuir), de forma equitativa, uma quantidade entre um determinado número de conjuntos (divisor).

Logo, a partir de um problema, podemos identificar qual dos dois sentidos da divisão está sendo evocado (Fischbein, Deri, Nello & Marino, 1985), assim como a verbalização ligada ao ato de dividir indica o sentido que lhe é atribuído. Desse modo, é fundamental que o professor atue, de maneira significativa, na compreensão dos conceitos relacionados a essa operação (Fazio & Siegler, 2011), para que a divisão não perca seu significado e o ensino não seja focado no procedimento do algoritmo.

Há pesquisas que classificaram problemas de divisão de fração tipicamente vistos nos currículos (Fischbein *et al.,*1985; Greer, 1992) de modo geral, identificando cindo estruturas de problemas principais (Quadro 1): a *divisão de medição de grupo igual* e a *divisão de partição de grupo igual* se referem a problemas que lidam com um certo número de grupos, todos de tamanhos iguais. A *divisão de medição de comparação* e a *divisão de partição de comparação* lidam com situações de comparação multiplicativa, ou seja, um conjunto envolve várias cópias do outro. Já a *retangular* ocorre quando o produto da multiplicação consiste em uma unidade bidimensional, como o comprimento e a unidade de largura para o produto da área.

Quadro 1: Esquema de classificação para problemas de palavras de divisão de frações

Divisão de fração	
1) Divisão de medição de grupo igual	São necessários 1 1/3 xícaras de farinha para fazer um lote de biscoitos. Marie tem 11 2/3 xícaras de farinha. Quantas fornadas de biscoito ela pode fazer?
2) Divisão de partição de grupo igual	Marie tem 11 2/3 xícaras de farinha. Isso é suficiente para fazer 1 ½ lotes de biscoitos. Quantas xícaras de farinha são necessárias para uma fornada de biscoitos?
3) Divisão de medição por comparação	Nesta semana, Mark se exercitou 8 ¼ h. Na semana passada, ele se exercitou 4 1/2h. Como quantas vezes mais ele se exercitou esta semana do que na semana passada?
4) Divisão de partição por comparação	Esta semana, Mark se exercitou 1 ½ vezes mais do que na semana passada. Se ele exercitou 8 ¼ h esta semana, quantas horas ele se exercitou na semana passada?
5) Divisão área retangular	Se a área de um retângulo é 13 ½ m^2 e o comprimento é 3 1/3, qual é a largura?

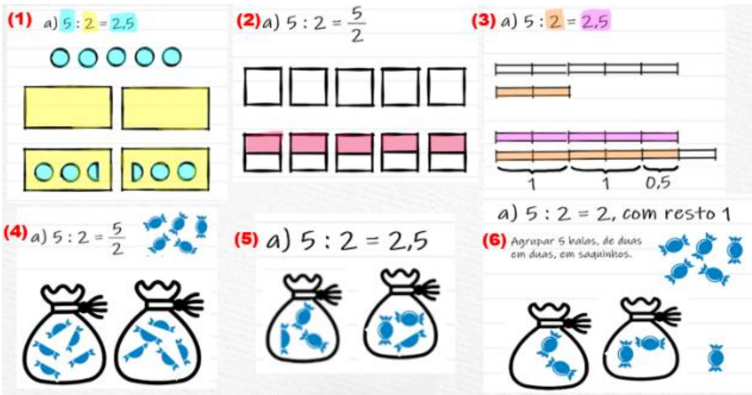
Fonte: Lo & Luo (2012).

Outro elemento muito importante na interpretação da divisão no contexto da resolução de um problema é a representação associada ao sentido no problema. Assim, devemos refletir a respeito de quantas representações diferentes e distintas podemos realizar. Na Figura 2, apresentamos algumas possibilidades em relação à operação 5 ÷ 2.

Diferentes registros de representações exercem um papel relevante no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, uma vez que auxiliam na compreensão de conceitos matemáticos (Izák, 2003). É fundamental que o professor tenha um conhecimento sobre diversos registros de representação das frações, tais como: linguagem comum (um terço); aritmética ($\frac{1}{3}$, 50%, 0,5), algébrica ($x \in R/\ 2x - 1 = 0$); ou figural (área, conjunto ou comprimento) (Rojas & Moriel, 2016).

Três tipos de representação figurais são frequentemente adotados para representar conceitos de frações: área, comprimento e conjunto (Lo & Luo, 2012; Ervin, 2017). No modelo de área, as frações são baseadas em partes de uma área ou região; nos modelos de comprimento, os comprimentos são considerados; e, no de conjuntos, o todo é entendido como um conjunto de objetos, e os subconjuntos, partes fracionárias. Em relação à representação contínua e discreta, a continuidade e a descontinuidade desempenham um papel importante no desenvolvimento numérico (Dehaense, 1997; DeWolf *et al.,* 2014).

Figura 2: Representações em relação à operação 5 ÷ 2



Fonte: Elaborada pelas autoras.

Os números inteiros indicam quantidades discretas ou contínuas discretas. No entanto, para representar peças de tais quantidades, é necessária a utilização de racionais, como frações ou decimais ($\frac{1}{2}$ de bolinha de gude, 0,5 l de água). Dessa forma, problemas contínuos envolvem quantidades de massa, como peso, volume e comprimento, enquanto os problemas discretos englobam entidades discretas (número de bicicletas) ou discretizadas e conjunto de objetos individuais que não podem ser divididos em unidades iguais, como balões e uvas (DeWolf *et al.,* 2014).

Assim, as representações contribuem para dar sentido, ou seja, modelar os processos mentais (Janvier, 1987), ajudando-nos a entender os conceitos envolvidos no problema e a associá-los à representação (Lesser & Tchoshanov, 2005). Ensinar e aprender matemática significa que as atividades cognitivas – como conceituação, raciocínio, resolução de problemas – exigem, além da linguagem natural ou imagens, o uso de diferentes registros de representação e expressão.

No entanto, para representar a divisão de fração usando modelos pictóricos, o professor precisa deter o conhecimento em relação à flexibilidade da unidade de referência, que é a habilidade para manter o controle da unidade à qual uma fração se refere e mudar sua compreensão relativa à quantidade à medida que a referência muda (Lee, Brown & Orrill, 2011). Logo, para representar a divisão de frações, os professores precisam entender as unidades às quais os números se referem em suas representações.

Desse modo, os professores precisam ser capazes de, além de formular problemas, analisar e resolver problemas de divisão de fração, modelar estratégias de solução correspondentes aos modelos pictóricos e às distintas representações (Ball, 1990; Silva, Vidal, & Carvalho Filho, 2023).

3 Método e contexto

Este artigo tem como foco o conhecimento revelado por professores da Educação Básica (que trabalham com alunos de 7 a 14 anos) em relação à formulação de problemas no contexto da divisão de fração, mediante uma tarefa para formação de professores, desenvolvida pelos autores. As fontes de informação deste estudo foram produzidas na referida formação de professores, no contexto on-line, com duração de seis horas, divididas em dois dias. Esta investigação é qualitativa e utiliza a metodologia do estudo de caso instrumental (Stake, 1995). O foco de interesse não está no caso em si, mas em saber que esse instrumento permite conhecer e entender um elemento específico – o conhecimento do professor – de modo a gerar teorias.

Nesse contexto, pedimos que os participantes formulassem problemas individualmente, conforme as operações propostas, com o objetivo de revelar seus conhecimentos no que tange à divisão de fração. As informações foram coletadas por meio de questionário, observações durante a formação on-line, anotações do formador, produções dos professores e gravações. As produções dos professores foram colhidas antes da plenária realizada após a solução da tarefa, possibilitando uma análise qualitativa baseada em critérios que apresentassem os problemas que os professores formularam, assim como quais suas concepções sobre eles.

Os comentários e produção de cada professor estão associados a seus pseudônimos, indicados pelos nomes: Bruno, Ana, Célia, Eva, Dina e Carlos. O grupo de participantes era composto por dois professores com formação em Matemática e mais de cinco anos de experiência de prática docente (Bruno e Ana); dois futuros professores que estavam no último ano do curso de Matemática (Dina e Carlos); e duas pedagogas com mais de três anos de experiência (Célia e Eva).

Os participantes responderam a uma tarefa para formação (Ribeiro *et al.,* 2021), que possui uma estrutura própria, com duas partes construídas de forma matematicamente significativa, levando em consideração as fragilidades do conhecimento do professor. A primeira parte tem como ponto de partida uma proposta que os alunos do nível em que os professores ensinam podem resolver, esperando que os professores possam implementá-la com suas turmas. Aqui apresentaremos uma das questões, a qual está relacionada à formulação de problemas da Parte I, que faz parte da tarefa do aluno.

Na questão proposta, abordamos diferentes operações de divisão, por exemplo: divisão com números inteiros; dividendo sendo fração e divisor inteiro; dividendo sendo inteiro e divisor fração; e, por fim, dividendo e divisor sendo frações; a fim de identificar qual conhecimento é revelado pelos professores sobre o tópico. A tarefa solicitava que os professores formulassem problemas empregando as expressões fornecidas, conforme ilustra a Figura 3.

A partir da produção dos professores, foi realizada uma análise considerando a estrutura dos problemas criados, as representações pictóricas e o tipo de solução apresentada, assim como a correspondência entre o problema e a operação solicitada. Analisamos qual o conhecimento revelado pelos professores sobre divisão de fração por meio dos problemas formulados, tomando como base o modelo MTSK – o conhecimento especializado do professor.

Para tanto, foram considerados: o conhecimento revelado pelos professores no que tange aos sentidos da divisão (KoT - fenomenologia); tipos de problemas de palavras para a divisão de frações (KoT - fenomenologia); conhecimento de situações geradoras de números decimais (KoT - fenomenologia); propriedades da divisão de fração (KoT - propriedades, definições e fundamentos); conhecimento sobre representações discretas e contínuas e diferentes modelos de representação de frações aplicados à divisão de frações (KoT - registro de representação); e conhecimento de procedimentos para realizar divisões de frações (KoT - procedimentos).

Figura 3: Parte da tarefa para formação

Tarefa: Operando com Frações -
(Deve explicar sempre o seu raciocínio descrevendo o processo que usar para responder à questão. Pode fazê-lo usando esquemas, palavras, cálculos, desenhos...)
Considere as seguintes expressões abaixo:

a) $5 \div 2$
b) $\frac{2}{5} \div 4$
c) $7 \div \frac{1}{2}$
d) $\frac{12}{15} \div \frac{3}{5}$

Formule um problema para cada uma das expressões anteriores e resolva, considerando que a resolução implique a expressão específica.

Fonte: Elaborada pelas autoras.

4 Conhecimentos revelados pelos professores sobre formulação de problemas de divisão de frações

Os professores apresentaram desafios ao formular problemas, pois isso exigia um conhecimento do conceito matemático e uma compreensão do que pretendiam formular. Os resultados indicam que os professores possuíam conhecimento do sentido de partilha para a divisão de fração e, portanto, formularam problemas com esse enfoque na maioria dos casos solicitados (Figura 3). Percebemos que uma das dificuldades envolve a compreensão do conceito de *dividir*, uma vez que os professores revelaram conhecimento apenas em relação ao sentido de partilha.

Para resolver os problemas formulados, os professores usaram, em sua totalidade, o procedimento inverte-multiplica[2] (IM), ou seja, a concepção do inverso da multiplicação, sem abordar outras formas de resolução. Apesar disso, eles obtiveram respostas numéricas corretas, demonstrando que sabiam resolver a operação da divisão de frações. Ademais, mostraram ter conhecimento sobre equivalência de frações e números decimais.

Os professores, ao formular seus problemas, rotularam as unidades de maneira correta, sempre indicando a unidade do divisor e do dividendo de forma clara. Utilizaram contextos reais, apresentando um conhecimento de frações no mundo real.

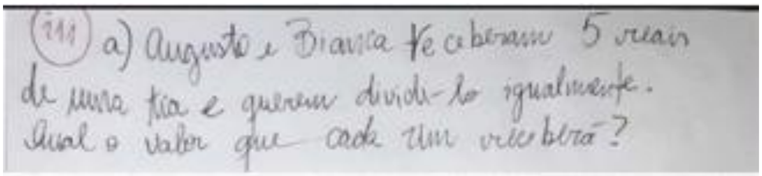
A maioria dos problemas formulados era de divisão de partição de grupos iguais. Observamos que, nas operações em que divisor e o dividendo eram frações, os professores tiveram maior dificuldade para formular problemas, como apontam outras investigações (Ma, 1999; Toluk-Uçar, 2009). Apesar de os professores afirmarem que a operação letra d) $\frac{12}{15} \div \frac{3}{5}$ era a mais complexa de se formular um problema, eles também apresentaram dificuldades nas operações, b) $\frac{2}{5} \div 4$ e c) $7 : \frac{1}{2}$ (Figura 3). A Figura 4, a seguir, traz algumas produções referentes aos problemas formulados pelos professores.

O problema elaborado pela professora Eva chama a atenção, pois corresponde à operação solicitada, mas alguns professores consideraram que não correspondia. Por exemplo, a professora Eva estrutura um problema para a operação $\frac{2}{5} \div 4$.

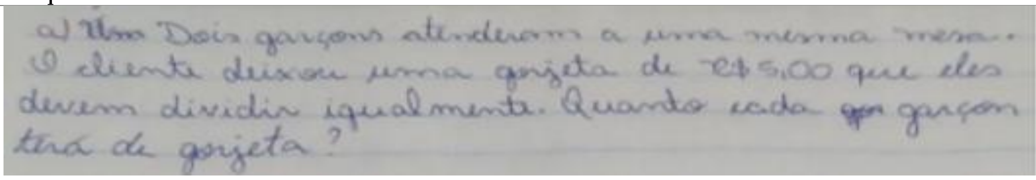
[2] O IM (inverte-multiplica) refere-se ao algoritmo pelo qual a fração correspondente ao divisor é invertida, e o dividendo passa a ser multiplicado por essa nova fração. Diz respeito ao algoritmo expresso na relação: $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$, em que "a", "b", "c" e "d" são números inteiros, e "b" e "d" não são nulos.

Figura 4: Produção dos professores

a) $5 \div 2$

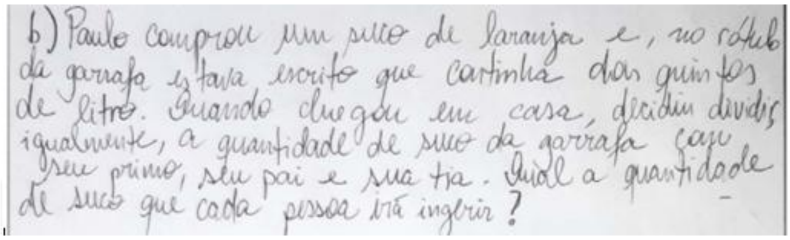

a) Augusto e Bianca recebaram 5 reais de uma tia e querem dividi-lo igualmente. Qual o valor que cada um receberá?

Bruno: Augusto e Bianca receberam 5 reais de uma tia e querem dividi-lo igualmente. Qual o valor que cada um receberá?


a) ~~Um~~ Dois garçons atenderam a uma mesma mesa. O cliente deixou uma gorjeta de R$ 5,00 que eles devem dividir igualmente. Quanto cada ~~gar~~ garçom terá de gorjeta?

Ana: Dois garçons atenderam a uma mesma mesa. O cliente deixou uma gorjeta de R$ 5,00 que eles devem dividir igualmente. Quanto cada garçom terá de gorjeta?

b) $\frac{2}{5} \div 4$


b) Paulo comprou um suco de laranja e, no rótulo da garrafa estava escrito que continha dos quintos de litro. Quando chegou em casa, decidiu dividir igualmente, a quantidade de suco da garrafa com seu primo, seu pai e sua tia. Qual a quantidade de suco que cada pessoa irá ingerir?

Dina: Paulo comprou um suco de laranja e, no rótulo da garrafa, estava escrito que continha dois quintos de litro. Quando chegou em casa, decidiu dividir igualmente a quantidade de suco da garrafa com seu primo, seu pai e sua tia. Qual a quantidade de suco que cada pessoa irá ingerir?

Eva: Dos $\frac{2}{5}$ que sobraram de um chocolate, Manoel comeu a quarta parte. Que parte do chocolate Manoel comeu?

Célia: João dividiu $\frac{2}{5}$ da pizza de ontem para 4 amigos. Quanto cada um comeu?

Carlos: Faltam ser pintados $\frac{2}{5}$ do muro. Foram contratados 4 pintores e eles devem pintar a mesma quantidade do muro. Quanto cada pintor vai pintar do muro?

Fonte: Elaborada pelas autoras.[3]

Eva: Dos $\frac{2}{5}$ que sobraram de um chocolate, Manuel comeu a quarta parte. Que parte do chocolate Manoel comeu?

Observamos que a professora entende como quarta parte dividir por quatro ou multiplicar por $\frac{1}{4}$. No entanto, a professora Ana afirma:

Ana: Esse problema da Eva corresponde a $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4}$ e não $\frac{2}{5} \div 4$.

[3] Alguns problemas foram enviados pelos cursistas via chat *Meet* e *WhatsApp* durante a formação on-line, por isso estão digitados.

Aqui a professora Ana se equivoca em pensar *comeu a quarta parte* como dividir por $\frac{1}{4}$ e não por quatro. Nesse caso, a professora entende a divisão por quatro como sendo por $\frac{1}{4}$ ou multiplicação por quatro, o que é uma dificuldade comum entre os professores, como afirmam Ball (1990) e Ma (1999).

Os professores apresentaram algumas reflexões como a da professora Ana em relação aos problemas que elaboraram e que não correspondiam à operação solicitada:

> **Ana:** *como vamos avaliar o aluno sem se colocar no lugar dele pra saber se o erro que ele cometeu é um erro dele ou nosso de verbalização, de escrita, ou seja, de como foi passado.*

Aqui, a professora Ana reconhece sua dificuldade em formular um problema de acordo com a operação solicitada. Além disso, ela questiona como poderá avaliar o aluno se ela mesma tem dificuldades em compreender a verbalização e a escrita do problema, bem como associá-lo à operação da divisão de fração e resolvê-lo corretamente.

A divisão enquadra-se nas estruturas multiplicativas que abrangem diversas situações, como multiplicação, divisão, frações e proporcionalidade. Portanto, a questão de correspondência entre a expressão e o problema formulado é essencial, pois demanda conhecer o tópico matemático com profundidade. Apresentamos alguns problemas formulados pelos professores em relação a um número natural e uma fração (Figura 5).

Figura 5: Produção dos professores

c) $7 \div \frac{1}{2}$

c) Carlos comprou sete barras de chocolate para dividir com seus amigos. Para que todos pudessem comer, dividiu as barras pela metade e, cada pessoa presente, comeu um pedaço. Quantos amigos estavam com Carlos?

Eva: Carlos comprou sete barras de chocolate para dividir com seus amigos. Para que todos pudessem comer, dividiu as barras pela metade e, cada pessoa presente comeu um pedaço. Quantos amigos estariam com Carlos?

c) Laura ofereceu um jantar para 7 pessoas, e preparou uma sobremesa para cada. Mas ~~cada~~ alguns convidados trouxeram acompanhantes. Laura então, decidiu dividir as 7 sobremesas ao meio, para que ninguem ficasse sem. Depois de dividi-las, com quantas sobremesas Laura ficou?

Dina: Laura ofereceu um jantar para 7 pessoas e preparou uma sobremesa para cada. Mas alguns convidados trouxeram acompanhantes. Laura, então, decidiu dividir as 7 sobremesas ao meio para que ninguém ficasse sem. Depois de dividi-las, com quantas sobremesas Laura ficou?

Bruno: Tenho 7 balas para colocar em 7 caixinhas e cada caixinha está dividida em duas partes. É necessário preencher todas essas partes das caixinhas. Qual a solução possível?

Célia: Quantas pessoas seriam servidas com 7 chocolates, sabendo que cada uma delas comeria a metade de cada chocolate?

Fonte: Elaborada pelas autoras.

O problema de Bruno (Figura 5) – *Tenho 7 balas para colocar em 7 caixinhas e cada caixinha está dividida em duas partes. É necessário preencher todas essas partes das caixinhas. Qual a solução possível?* – não apresenta correspondência com a operação solicitada, pois pede para dividir em duas partes, e não por um meio. Além disso, o modo como foi feita a pergunta, *qual a solução possível?,* permite várias respostas. Uma solução possível seria colocar uma bala em cada caixa, distribuindo metade em cada parte (da caixa). Ou seja, a resposta não precisa trazer o número 14. É outro ponto que precisa ser considerado ao formular problemas.

Os professores, em sua maioria, afirmaram que a formulação de problemas não fez parte de suas vivências enquanto alunos e nem como professores. Entendemos que isso contribui para as dificuldades em formular problemas, principalmente quando o divisor e dividendo são frações.

A questão d) $\frac{12}{15} \div \frac{3}{5}$ demandou um esforço maior dos professores para formular um problema, devido ao fato de envolver frações tanto no divisor quanto no dividendo. Alguns participantes expressaram o seguinte:

> *Bruno: Não achei que seria tão difícil elaborar um problema para estas questões. Não pensamos em elaborar problemas, apenas em resolvermos.*
>
> *Ana: Deixamos de trabalhar essas questões com nossos alunos por falta de tempo, o currículo é extenso, então, damos pinceladas nestas questões essenciais que poderiam contribuir para a compreensão das operações.*
>
> *Bruno: Não trabalho com elaboração de problemas com meus alunos, apenas resolução de problemas. Agora com a minha dificuldade em elaborar problemas, vejo como este trabalho é importante.*

Os professores apresentaram dificuldades semelhantes às apontadas em algumas pesquisas. Por exemplo, três professores não conseguiram formular um problema para essa operação (Utley & Redmond, 2008); um professor formulou um problema de maneira incorreta sobre multiplicação de fração em vez de divisão, como foi solicitado (Ma, 1999; Zembat; 2004).

Já dois professores foram capazes de elaborar problemas envolvendo razão e, apesar de formularem problemas de divisão de medição de grupo igual, eles não detinham o conhecimento sobre os sentidos da divisão, partilha e medida. Desse modo, os professores apresentaram dificuldades em formular um problema com sentido de medida, como apontam suas afirmações:

> *Bruno: Não consigo lembrar de nenhum exemplo de medida.*
>
> *Célia: Geralmente perguntamos "Quantas vezes cabe", mas sem a consciência de se é partilha ou medida.*
>
> *Eva: Vem a orientação de se fazer essa pergunta aos alunos menores nos materiais para professor na escola onde trabalho, mas não sabia que era por conta do sentido de medida, e acredito que muitos professores também não saibam.*

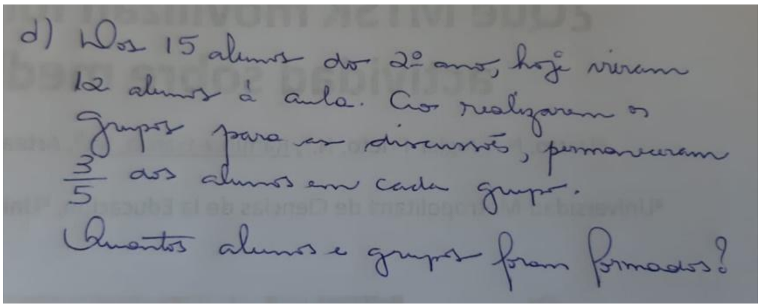
Bruno faz um questionamento ao formador: *Você consegue pensar em um problema de medida com fração?* Aqui há mais uma evidência de que o professor desconhece como elaborar um problema de divisão com sentido de medida. Nessa fala, percebemos que a dificuldade na discussão do problema não está necessariamente nas quantidades envolvidas, como as frações em si, mas na operação da divisão. Então, refletimos: a dificuldade dos professores está relacionada à fração ou à divisão?

Verificamos a importância de discutir e refletir sobre isso com professores não apenas do 7º ano, mas também dos anos anteriores, para que possam trabalhar com diferentes tipos de problemas, utilizando números naturais e, posteriormente, frações.

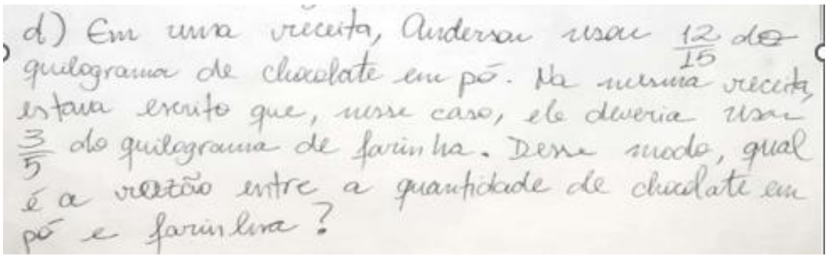
Na Figura 6, apresentamos três problemas formulados pelos professores para a operação d:

Figura 6: Produção dos professores

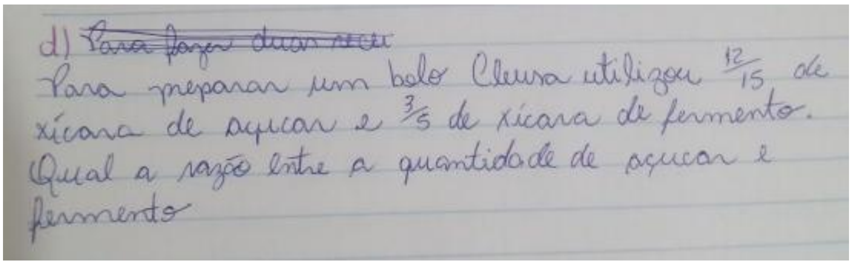
d) $\frac{12}{15} \div \frac{3}{5}$


d) Dos 15 alunos do 2º ano, hoje vieram 12 alunos à aula. Ao realizarem os grupos para as discussões, permaneceram $\frac{3}{5}$ dos alunos em cada grupo. Quantos alunos e grupos foram formados?

Eva: Dos 15 alunos do 2º ano, hoje vieram 12 alunos à aula. Ao realizarem os grupos para a discussão, permaneceram $\frac{3}{5}$ dos alunos em cada grupo. Quantos alunos e grupos foram formados? (Problema enviado pela professora via plataforma *Meet*).


d) Em uma receita, Anderson usou $\frac{12}{15}$ do quilograma de chocolate em pó. Na mesma receita, estava escrito que, nesse caso, ele deveria usar $\frac{3}{5}$ do quilograma de farinha. Desse modo, qual é a razão entre a quantidade de chocolate em pó e farinha?

Dina: Em uma receita, Anderson usou $\frac{12}{15}$ do quilograma de chocolate em pó. Na mesma receita, estava escrito que, nesse caso, ele deveria usar $\frac{3}{5}$ do quilograma de farinha. Desse modo, qual é a razão entre a quantidade de chocolate em pó e a farinha?


d) ~~Para fazer duas receitas~~ Para preparar um bolo Cleuza utilizou $\frac{12}{15}$ de xícara de açucar e $\frac{3}{5}$ de xícara de fermento. Qual a razão entre a quantidade de açucar e fermento

Bruno: Para preparar um bolo, Cleuza utilizou $\frac{12}{15}$ de xícara de açúcar e $\frac{3}{5}$ de xícara de fermento. Qual a razão entre a quantidade de açúcar e fermento?

Fonte: Elaborada pelas autoras.

A professora Eva formulou um problema com um contexto inadequado para a operação solicitada, pois apresenta como solução $\frac{4}{3}$ de alunos. Além disso, percebemos que é possível formar apenas um grupo, já que 60% dos alunos fazem parte dele. Já os outros dois professores, Dina e Bruna, criaram um problema de razão, considerando esse sentido de fração. De modo consciente, os professores não tinham conhecimento de que eram problemas com sentido de divisão de medição por comparação (Lo & Luo, 2012). Entendemos, assim, a importância de se trabalhar esse tipo de tarefa com os professores para que possam vivenciar experiências, a fim de ampliar seu olhar em relação às dificuldades dos alunos, bem como seu próprio conhecimento matemático e sua prática docente.

Com relação à representação pictórica das operações solicitadas pela tarefa, os professores apresentaram a que envolvia a partição de grupos iguais. A maioria utilizou o modelo de área na forma retangular, enfrentando dificuldades com as representações discreta e contínua. Ademais, as representações não ilustravam a resolução completa do problema, haja vista que os professores se apoiavam bastante no algoritmo.

Como exemplo, apresentaremos o problema do muro, elaborado pelo professor Carlos, para o item b) $\frac{2}{5} \div 4$: *Faltam ser pintados* $\frac{2}{5}$ *do muro. Foram contratados 4 pintores e eles devem pintar a mesma quantidade do muro. Quanto cada pintor vai pintar do muro?* Os professores alegaram que esse problema seria de partilha e discreto, pois consideraram ter uma parte fixa para cada um pintar.

Ana: Para mim, este é um problema de partilha e discreto.

Formador: quando seria contínuo para você?

Ana: quando a conta não for exata?

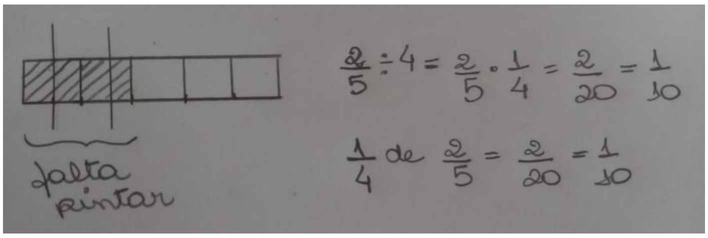
Formador: e essa conta não é exata?

Bruno: Geralmente trabalhamos discreto e contínuo só em Estatística.

Dina: Isso foi algo novo para mim, os sentidos de medida e partilha e a representação, essa coisa do discreto e contínuo.

Os professores reconheceram que a representação é um desafio, mas afirmaram que ela contribui para a compreensão da resolução do problema por parte do aluno, pois auxilia a entender o que está sendo feito. No entanto, notamos que essa facilidade apontada pelos professores também se referia à sua própria compreensão da solução do problema. A representação da professora Dina e o diálogo dos professores (Figura 7) evidenciam a dificuldade em realizar a representação com compreensão:

Figura 7: Produção da professora Dina



Fonte: Elaborada pelas autoras.

Formador: Onde está a representação $\frac{2}{20}$*?*

Dina: O 2/20 foi simplificado, encontramos $\frac{1}{10}$.

Formador: Sim, mas a resposta encontrada corresponde a sua representação pictórica?

Professores: [Não souberam explicar o porquê e como fazê-lo].

Formador: Onde está a representação pictórica de $\frac{2}{20}$*?*

Dina: estou tentando relacionar com a área do chocolate.

É fundamental que a linguagem matemática esteja associada ao que se representa, pois somente assim será possível uma compreensão efetiva do que se faz. As representações auxiliam a compreensão dos alunos sobre os conceitos matemáticos, assim como a dos professores. Por isso, deve-se ter como foco o desenvolvimento do conhecimento matemático, explorando maneiras de interpretar e representar diferentes soluções.

Elencar explicitamente as estratégias (cálculo mental, representação pictórica, procedimentos) e as etapas da resolução do problema permite ampliar o entendimento dos alunos e professores sobre o sentido da divisão e das operações com frações. A partir dessas estratégias, torna-se mais viável pensar qual a unidade de referência que nos permite comparar $\frac{2}{5}$ com a metade de $\frac{1}{5}$ (que corresponde a cada uma das partes de cada pintor – indicada pela parte pintada). Essa é uma das dificuldades dos alunos, portanto, é necessário propor situações que desenvolvam a ideia da unidade de referência (Lo & Luo, 2012; Lee *et al.*, 2011).

Os professores apresentaram dificuldades com a unidade devido à lacuna com relação ao sentido de medida da divisão de fração, pois o conceito de unidade faz parte do conhecimento dos sentidos da divisão. No sentido de medida, necessita-se ser capaz de conceituar a unidade e saber utilizá-la. Assim, para a compreensão da divisão de fração, é preciso conhecer os sentidos da divisão.

Sendo assim, é importante conhecer os sentidos da divisão e de distintas representações, ou seja, diferentes formas de exteriorizar uma imagem mental, como pictóricas (desenhos) e simbólicas. Essas representações ajudam na escolha de estratégias para o ensino, possibilitando identificar quais são mais potentes para determinados conteúdos ao trabalhar com os alunos, assim como o contexto apropriado para a apresentação do problema. Neste estudo, a maioria dos professores demonstrou um conhecimento relacionado a situações geradoras com números decimais, especialmente no contexto dinheiro e culinária. Apresentamos uma síntese dos conhecimentos revelados pelos professores (Quadro 2) ao realizarem a tarefa de formulação de problemas no contexto da divisão de fração:

Quadro 2[4]: Conhecimento revelado pelos professores ao realizarem a tarefa de formulação de problemas no contexto da divisão de fração

Indicadores de MTSK		**Bruno**	**Dina**	**Carlos**	**Ana**	**Célia**	**Eva**	**Operação solicitada**
KoT - fenomenologia	Divisão de medição de grupo igual (M); Divisão de partição de grupo igual (P); Divisão de medição por comparação (MC);	P	P	P	P	P	M	a) $5 \div 2$
		P	P	P	P	P	P	b) $\frac{2}{5} \div 4$
		P	M	P	P	M	M	c) $7 \div \frac{1}{2}$

[4] Espaço vazio: os professores não foram capazes de apresentar problemas, soluções ou representações.

	Divisão de partição de comparação (PC); Área retangular divisão (A).	MC	MC	MC				d) $\frac{12}{15} \div \frac{3}{5}$
	Conhecimento de situações geradoras de números decimais: envolvendo dinheiro e culinária.	x	x	x	x	x		a) $5 \div 2$
		x	x	x	x	x		b) $\frac{2}{5} \div 4$
		x	x	x	x	x		c) $7 \div \frac{1}{2}$
		x	x	x	x	x		d) $\frac{12}{15} \div \frac{3}{5}$
KoT - propriedades, definições e fundamentos	Divisão e multiplicação como operação inversa (Dividir entre 4 é igual a multiplicar por 1/4).		x	x		x		a) $5 \div 2$
			x	x		x		b) $\frac{2}{5} \div 4$
			x	x		x		c) $7 \div \frac{1}{2}$
			x	x		x		d) $\frac{12}{15} \div \frac{3}{5}$
	Conhecimento de equivalência de frações e números decimais.	x	x	x	x	x	x	a) $5 \div 2$
		x	x	x	x	x	x	b) $\frac{2}{5} \div 4$
		x	x	x	x	x	x	c) $7 \div \frac{1}{2}$
		x	x	x	x	x	x	d) $\frac{12}{15} \div \frac{3}{5}$
KoT - registro de representação de divisão de frações	Discretas (D) e contínuas (CO) de frações; Área (A), comprimento (CP) e conjunto (C).	A	A	A	A	A	A	a) $5 \div 2$
		A	A	A	A	A	A	b) $\frac{2}{5} \div 4$
		A	CP	A	A	A	A	c) $7 \div \frac{1}{2}$
			CP	A	A			d) $\frac{12}{15} \div \frac{3}{5}$
KoT - procedimentos	Conhecimento do algoritmo para a divisão de frações: inverter e multiplicar, respostas numéricas corretas.	x	x	x	x	x	x	a) $5 \div 2$
		x	x	x	x	x	x	b) $\frac{2}{5} \div 4$
		x	x	x	x	x	x	c) $7 \div \frac{1}{2}$
		x	x	x	x	x	x	d) $\frac{12}{15} \div \frac{3}{5}$

Fonte: Elaborado pelas autoras.

Os professores revelam um conhecimento sobre o sentido de partilha para divisão de fração; razão para fração; a estrutura de problemas de partição de grupos iguais, medição por grupos iguais e por comparação (mesmo desconhecendo o sentido de medida). Além disso, conhecem situações geradoras de números decimais; equivalência de frações; números decimais; inverso multiplicativo; registros de representação figural (reta e região) e linguagem aritmética e algoritmos como IM. Percebe-se que o conhecimento matemático especializado que os professores detêm impacta sua prática docente sobre o tópico, assim como suas dificuldades e desafios.

Desse modo, apresenta-se algumas dificuldades encontradas pelos professores com relação à divisão de fração, abrangendo:

- o sentido de medida;
- o conceito de unidade;
- a representação discreta e contínua;
- outros modelos, como comprimento e conjuntos e representação matematicamente correta que corresponda à solução do problema;
- a formulação de problemas com divisor e dividendo contendo frações;
- a formulação de problemas que correspondam à divisão, e não à multiplicação de frações;
- a formulação de problemas que envolvam outras estruturas de problemas além da partição por agrupamentos iguais.

A dificuldade no conhecimento matemático dos professores (relacionado à divisão por fração usando representação pictórica) parece interferir em seu conhecimento sobre o ensino da divisão de frações, o que pode indicar o conhecimento de estratégias, como evitar o uso de representação pictórica para compreensão dessa operação e utilizar o procedimento IM) – relação entre KoT e KMT. A dificuldade no que se refere aos sentidos da divisão também parece impactar no ensino deste tópico, uma vez que é uma característica comum (transversal) entre divisão de números naturais e divisão de frações, a saber: em ambos os casos, tal operação pode ser interpretada com as ideias de partilha e medida (KSM).

Os desafios, as dificuldades e as lacunas revelados pelos professores nos apontam caminhos a serem considerados em tarefas para a formação docente, sobretudo em relação ao conhecimento especializado do professor no contexto da divisão de fração, a fim de conhecer e ampliar os conhecimentos especializados necessários ao professor de Matemática para o ensino desse tópico.

5 Conclusão

Os resultados desta investigação corroboram pesquisas já realizadas (Ball, 1990; Ma, 1999; Iskenderoglu, 2018), pois consideram que os professores apresentam desafios e dificuldades ao formular problemas relacionados à divisão de frações.

Nosso estudo traz resultados diferentes dos apontados por Lo & Luo (2012), que afirmam que os professores são mais propensos a formular problemas com sentido de medição do que com sentido partitivo quando se trata de divisão de frações. Os autores revelam que futuros professores do Ensino Fundamental, em Taiwan, não utilizavam o conceito de divisão partitiva ao resolver ou propor problemas de palavras com o divisor sendo uma fração própria, o que era um reflexo da ênfase dada nos livros didáticos de Matemática taiwaneses.

Todavia, nossa investigação demonstrou que os professores não possuíam conhecimento do sentido de medida para a divisão e, portanto, formulavam problemas com sentido de partilha. Acreditamos que isso se deve a contextos distintos de diferentes países ou localidades, pois, em um caso, o foco está no ensino do sentido de medida, e no outro, enfatiza-se o sentido de partilha, o que pode explicar a discrepância entre as investigações.

Desse modo, embora alguns estudos indiquem que os professores têm uma concepção para a divisão em relação ao sentido de medida (Tirosh, 2000; Zembat, 2004; Lo & Luo, 2012), nossa investigação apresenta um resultado diferente, no qual os professores demonstraram apenas conhecimento do sentido partitivo.

Retomando a nossa questão de investigação: Qual conhecimento matemático especializado os professores revelam ao realizar uma tarefa de formulação de problemas sobre divisão de fração? No Quadro 3, apresentamos de forma suscinta os conhecimentos revelados pelos professores:

Quadro 3: Conhecimento revelado pelos professores em relação à divisão de fração

Conhecimento especializado revelado pelos professores em relação a divisão de fração		
KoT Conhecimento dos tópicos	Fenomenologia e aplicações	- Conhecimento de um dos sentidos da divisão: partilha; - Sentido de razão para fração; - Estrutura dos problemas: partição por grupos iguais, medição por grupos iguais e medição por comparação (mesmo desconhecendo o sentido de medida).
	Propriedades	- Conhecimento de situações geradoras de números decimais: envolvendo dinheiro e culinária; - Conhecimento de equivalência de frações, números decimais, inverso multiplicativo; - Dividir entre 4 é igual multiplicar por ¼.
	Registro de representação	- Conhecimento da linguagem aritmética, comum e figural (reta e região).
	Procedimentos	- Conhecimento do algoritmo para a divisão de frações: inverter e multiplicar, conhecimento da resolução da divisão de fração.

Fonte: Elaborado pelas autoras.

Percebe-se que a maioria dos professores resolveu os problemas pelo algoritmo inverte-multiplica e não apresentaram flexibilidade com representação pictórica ou utilização do conceito de unidade. Eles possuíam o conhecimento do sentido de partilha e usaram esse entendimento para formular grande parte dos problemas, optando por representação contínua e modelo de área em relação a outros modelos. Referente à estrutura dos problemas, os professores preferiram a apresentação de divisão de partição de partes iguais.

Com esta investigação, foi possível identificar que há dificuldades anteriores às frações, relacionadas ao conceito e aos sentidos da divisão, assim como à formulação de problemas com sentido de medida, mesmo com números naturais. Percebe-se, também, uma dificuldade em compreender a divisão por $\frac{1}{2}$ como sendo metade, ou seja, entendê-la como multiplicação por dois. Além disso, foram identificadas dificuldades na representação discreta e contínua; no conceito de unidade de referência; e na correspondência e conexão entre o problema formulado e sua solução como representação pictórica.

A tarefa abordada nesta investigação se mostrou potente para revelar o conhecimento dos professores em relação à divisão de fração, assim como para destacar outros conhecimentos especializados. No entanto, não podemos considerar que o conhecimento relativo a essas questões foi desenvolvido pelos professores ou que se integrará às suas práticas. Isso ocorre porque a metodologia, a ferramenta de análise utilizada (MTSK) e o tempo da investigação não permitem a inferência de analisar o conhecimento desenvolvido pelo professor, mas apenas o conhecimento revelado.

Corroboramos os estudos de Toluk-Ucar (2009), Isik & Kar (2012), que afirmam que, ao fornecer aos professores oportunidades para atribuir sentido aos problemas e desenvolver raciocínios para suas justificativas, eles irão aprimorar seu conhecimento matemático, contribuindo, assim, para que ensinem com compreensão e raciocínio. Portanto, ressaltamos a importância de trabalhar a resolução e a formulação de problemas desde os números naturais, pois é por meio dessas experiências que as habilidades serão desenvolvidas e o conhecimento matemático ampliado. Destacamos a relevância de trabalhar a formulação de problemas nas formações inicial e continuada de professores, para que eles ampliem seu conhecimento especializado a respeito da divisão de fração.

Como possibilidades para pesquisas futuras , sugerimos investigações relacionadas ao conhecimento interpretativo do professor e aos problemas sobre a divisão de fração. Assim como estudos que aprofundem o conhecimento no que se refere à representação (discreta e contínua) para a resolução de problemas sobre divisão de fração.

Agradecimentos

Este estudo foi parcialmente financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código Financeiro 88881.311131/2018-00 e 88887.696474/2022-00. Pelo Projeto PID2021-122180OB-I00 (Governo da Espanha) e pela Red Iberoamericana sobre Conhecimento Especializado de Professores de Matemática (RED MTSK) patrocinado pela AUIP.

Referências

Abu-Elwan, R. (2002). Effectiveness of problem posing strategies on prospective mathematics teachers' problem-solving performance. *Journal of Science and Mathematics Education in Southeast Asia*, *25*(1), 56-69.

Ball, D. L. & Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics. In: J. Boaler (Ed.). *Multiple Perspectives on Teaching and Learning.* (pp. 83-104). Springer.

Ball, D. L. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *21*(2), 132-144.

Ball, D. L., Lubienski, S. & Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. In: V. Richardson (Ed.). *Handbook of Research on Teaching.* (pp. 433-456). American Educational Research Association.

Behr, M. J., Harel, G., Post, T. R. & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio, and proportion. In: D. A. Grouws (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* (pp. 296-333). Macmillan.

Cai, J., Hwang, S., Jiang, C. & Silber, S. (2015). Problem-posing research in mathematics education: Some answered and unanswered questions. In: F. M. Singer, N. F. Ellerton & J. Cai (Ed.). *Mathematical problem posing. From research to effective practice.* (pp. 3-34). New York: Springer.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Àvila, D., ... & Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's Specialized knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236-253.

Climent, N. (2002). *El desarrollo profesional del maestro de primaria respecto de la enseñanza de la matemática*. 2002. 185f. Tese (Doutorado). Universidad de Huelva.

Dehaene, S. (1997). *The number sense*. Oxford University Press.

DeWolf, M., Grounds, M. A., Bassok, M. & Holyoak, K. J. (2014). Magnitude comparison with different types of rational numbers. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, *40*, 71-82.

Ellerton, N. F. (2013). Engaging pre-service middle-school teacher-education students in mathematical problem posing: Development of an active learning framework. *Educational Studies in Mathematics, 83*(1), 87-101.

Ervin, H. K. (2017). Fraction multiplication and division models: A practitioner reference paper. *International Journal of Research in Education and Science*, *3*(1), 258-279.

Fazio, L., & Siegler, R. (2011). *Educational practices series 22: teaching fractions*. Unesco.

Fischbein, E.; Deri, M., Nello, M. S. & Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *16*(1), 3-17.

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. In: D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on *mathematics teaching and learning.* (pp. 276-295). Macmillan.

Isik, C. & Kar, T. (2012). An error analysis in division problems in fractions posed by preservice elementary mathematics teachers. *Educational Sciences: Theory & Practice*, *12*(3), 2289-2309.

Iskenderoglu, A. T. (2018). Fraction multiplication and division word problems posed by different years of pre-service elementary Mathematics teachers. *European Journal of Educational Research*, *7*(2), 373-385.

Izsák, A. (2003). "We want a statement that is always true". Criteria for good algebraic representations in the development of modeling knowledge. *Journal for Reaserch in Mathematics Education*, *34*(3), 191-227.

Janvier, C. (1987). Representation and understanding: The notion of function as an example. In: C. Janvier (Ed.). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics.* (pp. 67-71). Lawrence Erlbaum Associates Inc.

Kilic, C. (2015). Analyzing pre-service primary teachers' fraction knowledge structures through problem posing. Eurasia *Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, *11*(6), 1603-1619.

Lamon, S. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Towards a theoretical framework for research. In: F. K. Lester Jr (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning.* (pp. 629-667). National Council of Teachers of Mathematics.

Lee, K. H., Lee, E. J. & Park, M. S. (2016). Task modification and knowledge utilization by Korean prospective mathematics teachers. *Pedagogical Research*, *1*(2), 1–13.

Lee, S. J., Brown, R. E. & Orrill, C. H. (2011). Mathematics teachers' reasoning about fractions and decimals using drawn representations. *Mathematical Thinking and Learning*, *13*(3), 198-220.

Lesser, L. M. & Tchoshanov, M. A. (2005, 2, October). *The effect of representation and representational sequence on students' understanding.* 27º Annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Roanoke.

Lo, J. J. & Luo, F. (2012). Prospective elementary teachers' knowledge of fraction division. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *15*(6), 481-500.

Ma, L. (1999). K*nowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Earlbaum. National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and standards of school mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and standard for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Ribeiro, M., Almeida, A. & Mellone, M. (2021). Conceitualizando Tarefas Formativas para Desenvolver as Especificidades do Conhecimento Interpretativo e Especializado do Professor. *Perspectivas da Educação Matemática*,*14*(35), 1-32.

Rojas, N. & Moriel-Junior, J. G. (2016). Fracciones y decimales. In: J. Carrillo, L. C. Contreras, N. Climent, M. Montes, D. I. Escudero, E. Flores & M. C. Muñoz-Catalán (Ed.). *Didáctica de las Matemáticas para maestros de Educación Primária.* (pp. 75-98). Ediciones Paraninfo, S.A.

Silva, F. A. F., Vidal, F. A. & Carvalho Filho, E. A. de . (2023). Análise da compreensão de professores de Matemática sobre as características visuais de figuras geométricas para o estabelecimento da relação parte-todo dos números racionais. *Revista Internacional de Pesquisa Em Educação Matemática, 13*(2), 1-16.

Simon, M. A. (1993). Prospective Elementary Teachers' Knowledge of Division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *24*(3), 233-254.

Stake, R. E. (1995). *The art of case study research.* Sage Publications, Inc.

Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. *Journal for Research of Mathematics Education*, *31*(1), p. 5-25.

Toluk-Uçar, Z. (2009). Developing pre-service teachers understanding of fractions through problem posing. *Teaching and Teacher Education, 25*(1), 166-175.

Utley, J. & Redmond, A. (2008, March). P*rospective Elementary Teachers' Attitudes Towards and Knowledge of the Division of Fractions*. [Paper presentation]. Annual meeting of the Research Council on Mathematics Learning, Oklahoma City.

Xie, J. & Masingila, J. O. (2017). Examining interactions between problem posing and problem solving with prospective primary teachers: A case of using fractions. *Educational Studies in Mathematics*, *96,* 101-118.

Zembat, I. O. (2004). *Conceptual development of prospective elementary teachers: The case of division of fractions*. 2004. [Ph.D. dissertation]. The Pennsylvania State University.