Sociedade Brasileira de Educação Matemática

RIPEM

A utilização de história em quadrinhos no processo de ensino e aprendizagem da Geometria Esférica

Gustavo Andrade dos Santos
Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Amargosa, BA — Brasil
gustavo.and1995@gmail.com
0000-0002-2949-2382

Elias Santiago de Assis
Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Amargosa, BA — Brasil
eliassantiago@ufrb.edu.br
0000-0002-5925-8810

2238-0345

10.37001/ripem.v14i2.3817

Recebido • 02/03/2024
Aprovado • 18/05/2024
Publicado • 20/08/2024

Editor • Gilberto Januario

Resumo: Este trabalho visa investigar as contribuições da utilização de uma história em quadrinhos (HQ) no processo de ensino e aprendizagem da Geometria Esférica (GE). Trata-se de um estudo de caso envolvendo três estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública da Bahia. Eles realizaram uma leitura e discussões acerca da HQ "As aventuras de Anselmo Curioso: Os Mistérios da Geometria", de Jean Pierre Petit. A pesquisa, de natureza qualitativa, teve como instrumentos de coleta de dados uma entrevista semiestruturada e um questionário sobre os conteúdos da HQ. Os resultados revelaram a viabilidade do uso da HQ na introdução às Geometrias Não Euclidianas (GNE), mais particularmente a GE, na formação dos futuros professores de Matemática. Foi possível constatar que as HQ não se resumem a uma literatura de entretenimento. Elas podem adentrar a sala de aula como ferramenta de apoio ao ensino e à aprendizagem das GNE.

Palavras-chave: Geometria Esférica. História em Quadrinhos. Ensino e Aprendizagem de Geometria.

The use of a comic in the teaching and learning process of Spherical Geometry

Abstract: This research aims to investigate the contributions of the use of a comic book (HQ) as a didactic resource for the teaching and learning of spherical geometry (SG). A case study was carried out involving three students from a mathematics undergraduate course at a public university in the state of Bahia. The comic book used in the investigation was "The Adventures of Curious Anselm: The Mysteries of Geometry" by Jean Petit. The research is qualitative in nature and had as data collection instruments a semi-structured interview and a questionnaire formed by questions regarding the contents of the comic. The results revealed the feasibility of the use the HQ to inserting Non-Euclidean Geometries (NEG), particularly SG, in the formation of future mathematics teachers. Moreover, it was found that comics are not limited to a literature focused on entertainment and, therefore, can be to utilize in the classroom as a support tool in the process of teaching and learning of the NEG.

Keywords: Spherical Geometry. Comics. Geometry Teaching and Learning.

El uso de una historieta en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría Esférica

Resumen: La presente investigación tiene como objetivo investigar las contribuciones del uso de un Cómic (HQ) en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría Esférica (GE).

Para ello, se llevó a cabo un estudio de caso con tres estudiantes de una carrera de matemáticas en una universidad pública de Bahía. Se llevó a cabo una lectura y debate sobre la historieta titulada “Las aventuras de Anselmo Curioso: Los misterios de la geometría”, de Jean Pierre Petit. La investigación, de carácter cualitativo, tuvo como instrumentos de recolección de datos una entrevista semiestructurada y un cuestionario sobre el contenido de la historieta. Los resultados revelaron la viabilidad del uso de HQ en la introducción a las geometrías no euclidianas (GNE), más concretamente GE, en la formación de futuros profesores de matemáticas. Se pudo comprobar que las historietas no se limitan a la literatura de entretenimiento y que, por tanto, pueden ingresar al aula como una herramienta de apoyo al proceso de enseñanza y aprendizaje de las GNE.

Palabras clave: Geometría Esférica. Historietas. Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría.

1 Introdução

Por volta dos anos 300 a.C., o matemático Euclides reuniu, em uma obra denominada *Os Elementos*, todo o conhecimento de Matemática básica de sua época (Andrade, 2008). Nessa obra, composta por treze livros, ele fez uso de um sistema axiomático com cinco noções comuns e cinco postulados. Segundo Barbosa (2008), as noções comuns contemplam os resultados válidos em qualquer ciência, como considerar que *o todo* é sempre maior que qualquer uma de suas *partes*. Já os postulados estão relacionados aos fatos assumidos como verdadeiros dentro da Matemática, como a ideia de que por dois pontos distintos passa uma única reta.

Os quatro primeiros postulados de Euclides foram aceitos imediatamente pela comunidade matemática. O quinto postulado, porém, causou controvérsias. Para um postulado, ele não era tão intuitivo e tampouco de compreensão imediata, tornando-se alvo de questionamentos e sendo considerado passível de demonstração (Souza, 2014). Euclides o apresentou nos seguintes termos:

> É verdade que, se uma reta ao cortar duas outras, forma ângulos internos no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então as duas retas, se continuadas, encontrar-se-ão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos (Barbosa, 2008, p. 2).

Não era raro encontrar matemáticos que acreditavam que o postulado acima poderia ser demonstrado a partir dos resultados que lhe precediam. De acordo com Honorato (2014), com a busca por tal demonstração, foram obtidas algumas proposições a ele equivalentes, chamadas de seus substitutos. O substituto mais conhecido, atribuído ao matemático escocês John Playfair (1748-1819), afirma que “por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada” (Barbosa, 2008, p. 9). O quinto postulado de Euclides passou a ser conhecido como o axioma das paralelas, em referência ao substituto apresentado por Playfair. Nas chamadas Geometrias Não Euclidianas (GNE), nega-se esse axioma. Uma das formas de fazê-lo consiste em considerar a inexistência de paralelas a uma reta passando por um ponto fora dela.

Dessa forma, dá-se origem à Geometria Esférica (GE). Nela, de acordo com Silva (2015), a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é maior do que 180º e não existem retas paralelas. Além disso, nem todos os resultados que precedem o axioma das paralelas na Geometria de Euclides permanecem válidos na GE. Por exemplo, nessa GNE, nem sempre por dois pontos distintos passa uma única reta, bem como o Teorema do Ângulo Externo (TAE) não é mais assegurado. Segundo o TAE, a medida de qualquer ângulo externo de um triângulo é maior que as medidas dos ângulos internos que não lhe são adjacentes (Barbosa, 2006).

A passagem da Geometria Euclidiana para outros modelos geométricos implica na mudança na forma de se calcular distâncias (Cavalcante & Oliveira, 2020). Assim, as curvas que gozam da propriedade de minimizar percursos em uma Geometria podem perder essa característica em outros espaços geométricos. Da mesma forma, o que é círculo na Geometria Euclidiana pode deixar de ser em outros tipos, a exemplo da Geometria do táxi, retratada por Cavalcante e Oliveira (2020). Nesse modelo, a (menor) distância real entre dois pontos não é necessariamente a (menor) distância ideal. De fato, para ir de um ponto A até um ponto B de determinada cidade, um automóvel (táxi) nem sempre consegue percorrer o segmento de reta que os une. De modo geral, é necessário se deslocar por ruas que o permitem chegar de um ponto a outro.

Segundo Santos (2009), Bonete (2000) e Caldatto (2011), as GNE nem sempre são contempladas nos currículos dos cursos Licenciatura em Matemática, no Brasil. Isso se deve a uma tradição de ensino voltada para a Geometria Euclidiana e ao fato de alguns resultados das GNE não estarem associados à intuição humana. A natureza mais abstrata das GNE demanda do professor a utilização de variadas metodologias de ensino, a exemplo da utilização de materiais manipuláveis, *softwares* matemáticos e até mesmo HQ[1]. Neste trabalho, a discussão será restrita ao uso das HQ no processo de ensino e aprendizagem da GE.

Na década de 1980 do século passado, o francês Jean Pierre Petit publicou a HQ intitulada *As aventuras de Anselmo Curioso: os mistérios da Geometria*[2]. Nessa obra, Petit faz um paralelo entre a Geometria de Euclides e as GNE. O autor trata da noção de retas na GE, da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo, do paralelismo entre retas etc. Por meio de uma história fictícia, Petit mostra que nem todos os problemas do mundo real são resolvidos à luz da Geometria Euclidiana.

De acordo com Neves (2012, p. 20), a utilização de HQ "pode ser um recurso didático que oferece uma variação de metodologia para se trabalhar em sala de aula". Nessa mesma direção, Santos e Vergueiro (2012, p. 93) recomendam a realização de "atividades práticas a partir das histórias [em quadrinhos pois] tornam as aulas mais dinâmicas e o aprendizado mais prazeroso". Esses autores contemplam discussões mais amplas, inseridas no contexto educacional como um todo e não circunscritas exclusivamente à Matemática.

O presente trabalho tem como objetivo investigar as contribuições da utilização de uma história em quadrinhos (HQ) no processo de ensino e aprendizagem da Geometria Esférica (GE). Para tanto, a HQ *As aventuras de Anselmo Curioso: os mistérios da Geometria*, de Jean Pierre Petit, foi lida por três estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública do estado da Bahia. Após a leitura, os participantes responderam a um questionário acerca dos conteúdos matemáticos presentes na história. Houve também uma entrevista semiestruturada realizada em um momento posterior à leitura da HQ.

2 Ensino e aprendizagem da Geometria Esférica

O ensino de Geometria presente nas escolas brasileiras assenta-se nas ideias euclidianas. Esse fato deve-se a uma tradição que atribuía a geometria de Euclides a condição de verdade absoluta (Kaleff, 2010; Reis, 2006). Assim, quando expostos a resultados inerentes às GNE, grande parte dos alunos costuma ter dificuldades para aceitá-los (Carli, 2012). Ademais, conforme destacam Caldatto e Pavanello (2014), a própria natureza abstrata das GNE, aliada à

[1] Neste trabalho adotamos a definição de histórias em quadrinhos (HQ) apresentada por Santos e Silva (2015, p. 11). Segundo esses autores, as HQ são "narrativas gráficas constituídas por escrita e desenho, que exigem de seus leitores e leitoras interpretações visuais e verbais".

[2] Disponível em: http://www.mat.uc.pt/~alma/escolas/bd/OS_MISTERIOS_DA_GEOMETRIA.pdf; acesso 19 abr. 2024.

falta de conhecimento de muitos professores a seu respeito, dificulta a entrada desse tipo de Geometria no currículo da Educação Básica.

Kaleff e França (2012) analisaram de que forma as GNE eram contempladas nas coleções de livros didáticos selecionadas pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). A pesquisa se restringiu às duas obras mais requeridas nas escolas públicas do Brasil no ano de 2006. Os autores constataram que as GNE costumam ser referenciadas de maneira esporádica e meramente ilustrativa, com ênfase nos fatos históricos. Ou seja, não houve uma apresentação sistemática e lógico-dedutiva de seus conceitos básicos.

Paradoxalmente, nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) para o ensino de Matemática já era reconhecida, à época, a validade de geometrias diferentes da Euclidiana, a despeito de sua inserção na Educação Básica ainda ser diminuta: "uma mudança de paradigmas ocorreu quando se superou a visão de uma única geometria do real, a Geometria Euclidiana, para aceitação de uma pluralidade de modelos geométricos, logicamente consistentes, que podem modelar a realidade do espaço físico" (Brasil, 1998, p. 25).

Na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), também já se reconhecia, ainda que de forma menos direta, a importância das Geometrias Não Euclidianas ao propor que os estudantes sejam capazes de "utilizar estratégias, conceitos, e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diferentes contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza" (Brasil, 2018, p. 531).

As Diretrizes Curriculares (DC) de alguns estados brasileiros vão ao encontro dos PCN e da BNCC. Segundo Assis (2017), as DC dos estados de São Paulo, Ceará e Paraná fazem referência a outros modelos de Geometria diferentes do euclidiano. No estado de São Paulo, o documento recomenda "uma reflexão sobre as diversas formas de conceber o espaço" para "inspirar algumas noções de geometrias não euclidianas" (São Paulo, 2011, p. 40). No Ceará, propõe-se "uma discussão referente à Geometria e suas partes, onde se destacariam a Euclidiana Plana e a Não Euclidiana, a Espacial, a Métrica e a Descritiva" (Ceará, 2008, p. 18). As DC do Paraná propõem que no Ensino Médio sejam realizados "os estudos das noções de Geometrias Não Euclidianas" (Paraná, 2008, p. 57). Em particular, no que diz respeito à GE, esse documento diz ser necessário

> fundamentá-la através do seu desenvolvimento histórico e abordar: postulado de Riemann; curva na superfície esférica e discutir o conceito de geodésia; círculos máximos e círculos menores; distância na superfície esférica; ângulo esférico; triângulo esférico e a soma das medidas de seus ângulos internos; classificação dos triângulos esféricos quanto à medida dos lados e dos ângulos; os conceitos referentes à superfície da Terra: polos, equador, meridianos, paralelos e as direções de movimento (Paraná, 2008, p. 57).

A recomendação acerca do ensino das GNE no âmbito da Educação Básica, apresentada acima, esbarrou-se na falta de preparo de alguns professores para abordar um conteúdo que não lhes era familiar. Lovis e Franco (2015) buscaram identificar as concepções de um grupo de vinte e sete professores de Matemática da Educação Básica do estado do Paraná acerca das GNE. Esses autores constataram que seis professores não tinham noção alguma sobre esse tipo de Geometria. Treze professores tinham algumas noções e apenas oito professores tinham conhecimentos mais estruturados acerca das GNE. Esses dados se justificam pela ausência das GNE na maioria dos cursos de Licenciatura em Matemática do estado e do país.

De acordo com Ribeiro, Santos e Ferreira (2012), os cursos de formação de professores de Matemática privilegiam a formação euclidiana em detrimento de outros modelos axiomáticos igualmente consistentes. Em consonância com esses autores, Bonete (2000), Santos (2009) e Caldatto (2011) assinalam a ausência do ensino das Geometrias Não Euclidianas na maioria dos cursos de Licenciatura em Matemática ofertados no Brasil.

Após analisar a matriz curricular de trinta e cinco cursos de Licenciatura em Matemática ofertados por universidades brasileiras, Assis (2017) identificou em apenas treze deles a existência de componentes curriculares que contemplam ambas as GNE, a Esférica e a Hiperbólica. A Geometria Euclidiana aparece no projeto político pedagógico de todos os cursos analisados.

Apesar do absolutismo da Geometria de Euclides no âmbito escolar e universitário, alguns problemas do cotidiano são resolvidos de forma mais eficaz pela aplicação de conhecimentos das GNE, afinal, o mundo não é um plano no sentido euclidiano. Uma aplicação da GE, por exemplo, é a prática de navegação em que o caminho que se deseja percorrer em longa distância será o de um arco, pois, nesse caso, a curvatura da Terra tem que ser preservada. A menor distância de uma cidade a outra deixa de ser o segmento de reta da Geometria Euclidiana e passa a ser o segmento de reta da Geometria Esférica, ou seja, arcos de círculos máximos (Brum, Schuhmacher & Silva, 2015). Uma aplicação da GE à aviação aparece na obra de Jean Pierre Petit mencionada na introdução deste artigo. A Figura 1, extraída dessa obra, ilustra a situação:

Figura 1: Distância entre Nova York e Madri

Fonte: As aventuras de Anselmo Curioso: os mistérios da Geometria

Na Figura 1, é retratada a tentativa de um dos personagens de ir da cidade de Nova York, nos Estados Unidos, até Madri, na Espanha, por meio do menor caminho possível. A despeito da existência de um círculo paralelo ao Equador ligando as cidades estadunidenses e espanholas, ele não constitui uma curva que minimiza a distância. O menor caminho consiste no arco do círculo máximo que liga as duas cidades (Silva, 2015). Como se pode perceber em outros momentos da narrativa, a obra de Petit (1982) apresenta alguns conceitos da GE de maneira lúdica e prática a partir da literatura quadrinística.

Ribeiro, Santos e Ferreira (2012) investigaram a utilização de HQ na apresentação de outros tipos de Geometria diferentes do euclidiano. Eles criaram uma HQ com o intuito de introduzir fatos históricos acerca do surgimento da Geometria Hiperbólica. A HQ foi lida por um grupo de vinte e sete alunos do Ensino Médio do estado do Paraná, no município de Terra Boa. Após a leitura, os participantes responderam a um questionário elaborado pelos autores. Foi possível constatar que a utilização da HQ contribuiu para a aprendizagem dos conteúdos nela expostos.

Segundo Vergueiro (2006), as HQ podem ser utilizadas em sala de aula tanto para introduzir determinado assunto como para aprofundar algum conteúdo já explorado. As duas propostas são válidas e a escolha entre uma ou outra depende de elementos como o conteúdo propriamente dito, as fontes de estudo disponíveis, o público-alvo etc. De acordo com Upson e Hall (2013), as HQ podem ser obras prontas cujo conteúdo dialoga com o tema da aula ou, ainda, podem ser HQ confeccionadas pelos próprios estudantes. Já Kessler (2009) sugere que as HQ sejam elaboradas pelo professor em parceria com uma equipe de colaboradores (podendo incluir os discentes) que lhe auxiliarão na edição gráfica e na elaboração do roteiro da história. Kundlatsch e Silveira (2018) propõem que as HQ sejam criadas pelos próprios estudantes. Também é possível utilizar HQ já prontas, retirando-lhes a parte textual para que os discentes a completem (Rosa, Pazuch & Silva, 2012; Santos & Vergueiro, 2012). O contexto e os objetivos da aula ajudarão o professor a escolher a melhor alternativa.

É possível encontrar HQ e livros paradidáticos que abordam alguns conteúdos matemáticos do Ensino Médio ou do Ensino Superior. A título de exemplos podem ser citadas as obras: *Saiba mais sobre a história da Matemática* de Maurício de Sousa, em que o autor apresenta fatos e personagens históricos ligados à Matemática (Sousa, 2011); *Logicomix* de Doxiadis e Paradimitriou (2013), na qual são retratados alguns conceitos da lógica matemática; *Guia Mangá de Cálculo Diferencial e Integral* de Kojima, Togami e Co (2010), em que é feita uma introdução às ideias de função, limites, derivadas e integral. Há também a obra de Petit (1982) já citada neste trabalho.

3 Aspectos metodológicos

A presente pesquisa foi desenvolvida no pavilhão de aulas da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia (UFRB), situado no campus da cidade de Amargosa, a 240 km da capital do estado. Em uma das salas de aula, os participantes realizaram a leitura da HQ e, em seguida, responderam a um questionário relacionado ao conteúdo lido. A escolha dos participantes deveu-se aos critérios de interesse[3] e disponibilidade desses sujeitos. Nenhum deles tinha à época noções prévias sobre a GE, o que se justifica, em partes, pela ausência de componentes curriculares voltados para as GNE na matriz curricular do curso de Licenciatura em Matemática da UFRB.

A coleta de dados ocorreu em dois encontros com duração média de duas horas cada. No primeiro encontro, o pesquisador apresentou os objetivos da pesquisa, comentou acerca dos instrumentos de coleta de dados e, em seguida, solicitou aos participantes, designados aqui por A_1, A_2 e A_3, que realizassem a leitura da HQ e que respondessem a um questionário composto por dez perguntas sobre o seu conteúdo (a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo; o teorema do ângulo externo; as retas da Geometria Esférica e sobre o axioma de incidência).

A obra *As aventuras de Anselmo Curioso: os mistérios da Geometria*, de Jean Pierre Petit, é composta por sessenta e nove páginas, das quais foram utilizadas as trinta e uma primeiras. A partir da trigésima segunda página, são abordados conteúdos que se distanciam do objetivo da investigação (curvatura, imersão, superfícies orientáveis e noção orientáveis etc.). A leitura da HQ foi dividida em duas partes, uma para cada encontro. No primeiro deles, os participantes leram, individualmente, a HQ e ao final o pesquisador lhes entregou a primeira parte do questionário. As questões versavam acerca da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo, o TAE, as retas da Geometria Esférica (grandes círculos) e sobre o axioma de incidência (por dois pontos distintos passa uma única reta).

[3] O interesse dos participantes decorreu da oportunidade de entrarem em contato com conceitos básicos da GE, o que não costuma ser contemplado nos componentes curriculares do curso de Licenciatura em Matemática da UFRB.

O segundo encontro ocorreu de forma semelhante ao primeiro. Desta vez, porém, um dos participantes, o A_3, não pôde comparecer por motivos pessoais. O pesquisador entregou aos presentes a segunda parte da HQ. Após concluírem a leitura, foi entregue a eles a segunda parte do questionário. Suas questões contemplaram as diferenças entre os círculos das geometrias Euclidiana e Esférica; o Teorema de Gauss (TG); as diferenças e semelhanças entre a GE e a Geometria de Euclides. O TG relaciona a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo esférico à área desse polígono. Após recolher os questionários, o investigador instituiu um momento para discutir com os participantes a respeito do que eles haviam compreendido (ou não) a partir da leitura realizada.

Com a finalização dos dois encontros, foi conduzida uma entrevista individual semiestruturada composta por sete perguntas. As entrevistas foram realizadas à parte, agendadas individualmente com cada participante, com a finalidade de identificar as suas compreensões sobre a GE, os obstáculos à aprendizagem e angariar sugestões de mudanças na HQ tendo em vista a viabilização do processo de aprendizagem. De acordo com Goldenberg (2004, p. 88), as entrevistas representam um importante instrumento na coleta de dados, pois "as pessoas têm maior paciência e motivação para falar do que para escrever". Além disso, a entrevista permite ao investigador esclarecer informações que não foram devidamente coletadas ou compreendidas por meio de outros instrumentos de coleta de dados.

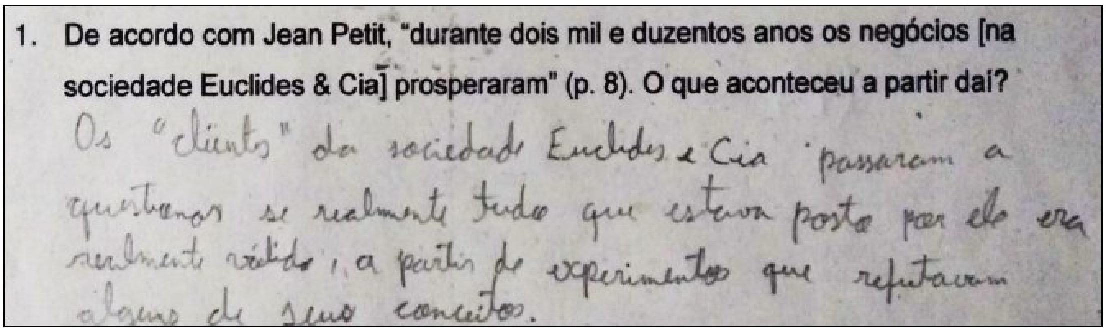
4 Resultados e discussões

Durante a entrevista, os participantes afirmaram ter compreendido que a soma das medidas dos ângulos internos em um triângulo esférico é maior que 180º (e inferior a 900º) e que não existem retas paralelas na GE. Outros resultados devidamente compreendidos, desta vez identificados por meio dos questionários, são apresentados a seguir.

4.1 A Geometria Euclidiana não contempla todas as situações reais

Os participantes conseguiram perceber que Anselmo, personagem da HQ, havia feito experimentos cujos resultados iam de encontro ao que previa a Geometria Euclidiana. Segundo eles, os negócios na "sociedade de Euclides & Cia", retratada na HQ, deixaram de prosperar devido ao fato de a Geometria Euclidiana não conseguir resolver todos os problemas do mundo real. A Figura 2 apresenta o comentário de A_2:

Figura 2: Crise na sociedade Euclides & Cia


1. De acordo com Jean Petit, "durante dois mil e duzentos anos os negócios [na sociedade Euclides & Cia] prosperaram" (p. 8). O que aconteceu a partir daí?

Os "clientes" da sociedade Euclides e Cia passaram a questionar se realmente tudo que estava posto por ele era realmente válido, a partir de experimentos que refutavam alguns de seus conceitos.

Fonte: Dados da pesquisa

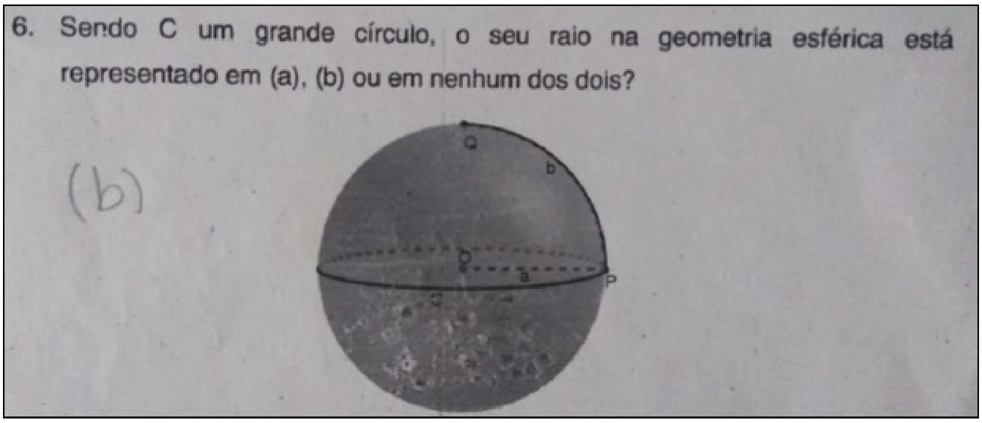
O comentário de A_2 faz referência aos resultados obtidos por Anselmo ao longo das primeiras páginas da HQ. Sem saber que estava caminhando sobre a superfície de uma esfera de raio r, o personagem resolve preencher com ladrilhos a área de um círculo (esférico) de raio a. Surpreende-se ao descobrir que a sua área é igual a $2\pi r^2$ (trata-se de um círculo máximo!) e não πa^2 como prevê a Geometria Euclidiana. O círculo é o mesmo, seja na GE ou na Geometria de Euclides, contudo, os seus centros e os seus raios diferem. Na Geometria Euclidiana, o centro e raio de um círculo máximo coincidem com os da esfera.

As respostas dadas pelos participantes encontram-se, em certa medida, alinhadas aos PCN e à BNCC de Matemática, à medida que esses documentos assinalam a necessidade de se romper com o absolutismo da Geometria Euclidiana (Brasil, 1998, 2018). A_1, A_2 e A_3 perceberam que nem todos os problemas podem ser resolvidos por meio da Geometria de Euclides.

4.2 Raios de um círculo esférico e de um círculo euclidiano

Todos os participantes já sabiam, *a priori*, identificar o raio de um círculo na Geometria Euclidiana. Restava saber se, após a leitura da HQ, eles conseguiriam reconhecer o raio de um círculo esférico. No questionário aplicado, o estudo foi feito em um grande círculo. Todos os participantes conseguiram identificar o seu raio, tanto na Geometria de Euclides como na GE. No primeiro caso, trata-se do próprio raio da esfera (Silva, 2015). A resposta do participante A_2 aparece na Figura 3:

Figura 3: Raio de um grande círculo na GE



Fonte: Dados da pesquisa

Na Figura 3, são apresentados dois possíveis raios, *a* e *b*, do grande círculo C. O *a* refere-se ao raio na Geometria Euclidiana, e *b* refere-se ao raio na Geometria Esférica. Havia, ainda, a opção de considerar nenhum dos dois raios, entre *a* e *b*. Os três participantes responderam corretamente.

Embora o grande círculo C presente na Figura 3 tenha raios diferentes quando se passa da Geometria Euclidiana para a Esférica, trata-se do mesmo círculo em ambas as geometrias. Conforme destacado por Cavalcante e Oliveira (2020), esse fato nem sempre ocorre ao se passar para a Geometria do táxi.

4.3 Retas da Geometria Esférica

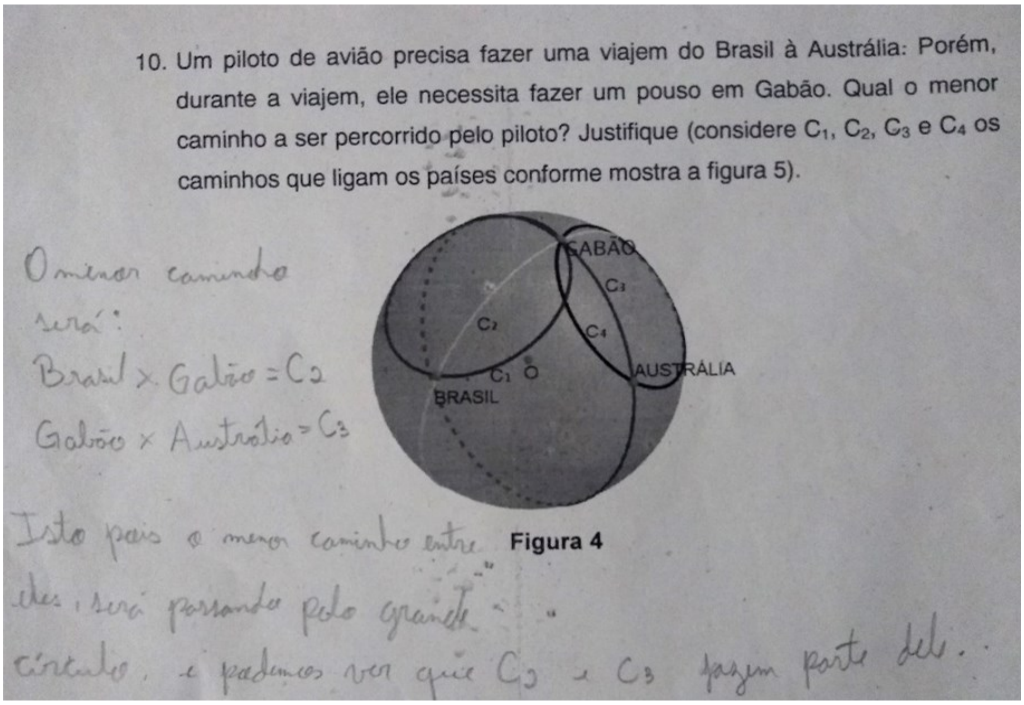
Todos os participantes relataram que o menor caminho ligando dois pontos quaisquer na Geometria Esférica é o arco de um círculo máximo. Esse fato é assegurado à luz do cálculo diferencial e integral para curvas no espaço (Adames, 2005).

Quando questionados acerca do menor caminho a ser percorrido por um piloto de avião que pretende fazer uma viagem do Brasil à Austrália, pousando primeiro em Gabão, todos eles responderam corretamente. Na Figura 4, em que aparece a resposta dada por A_2, tem-se o arco de um círculo C_1 e o arco de um círculo máximo C_2 que ligam o Brasil ao Gabão. Os arcos que ligam o Gabão à Austrália são os arcos de um círculo qualquer e de um círculo máximo, C_4 e

C_3, respectivamente.

Apesar de o participante não se referir à palavra *arco*, ele compreende que o menor caminho que liga dois pontos quaisquer em uma superfície esférica se dá percorrendo parte de um círculo máximo. Ele afirma que a menor trajetória se dá passando por C_2 e C_3, pois estes arcos fazem parte de círculos máximos (grandes círculos).

Figura 4: Menor caminho que une o Brasil à Austrália



Fonte: Dados da pesquisa

Para responder corretamente à questão retratada na Figura 4 é necessário se atentar à curvatura da Terra. Os participantes utilizaram o fato de que os círculos máximos ao longo da superfície da Terra minimizam distâncias (e não um segmento de reta em um sentido euclidiano). Esse tipo de aplicação da GE é assinalado por Brum, Schuhmacher e Silva (2015) quando fazem referência ao uso dessa geometria não euclidiana na aviação.

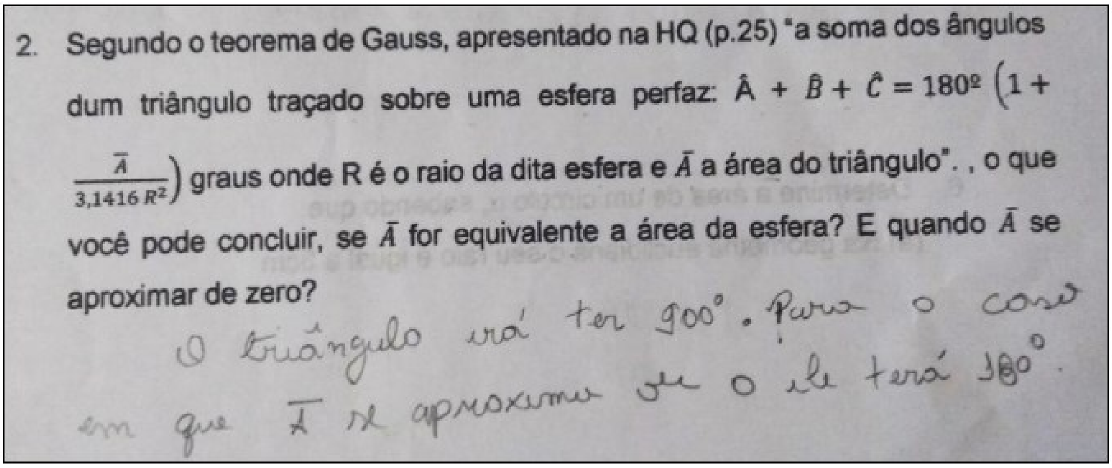
4.4 Inexistência de retas paralelas

Foi solicitado aos participantes que desenhassem, se possível, duas retas paralelas na GE. Os participantes A_1 e A_3 apresentaram as seguintes respostas, nesta ordem: "Não é possível"; "Impossível, não existem retas paralelas na Geo[metria Esférica].". De fato, conforme assinalado por Silva (2015), na GE não existe paralelismo entre retas uma vez que elas sempre se encontram em seus pontos antípodas.

A HQ faz referência à formula de Gauss, a qual nos permite relacionar a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo esférico ABC com a área da superfície esférica por ele limitada. Mais precisamente, $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180° \left(1 + \frac{\bar{A}}{3{,}1415R^2}\right)$, em que R é o raio da esfera e $\bar{A}$ corresponde à área do triângulo esférico. Os participantes foram convidados a utilizar essa relação para investigar o que acontece quando a área $\bar{A}$ de um triângulo esférico se aproxima da área da esfera e quando $\bar{A}$ se aproxima de zero. Os dois participantes presentes no dia, A_1 e A_3, responderam corretamente. A Figura 5 apresenta a resposta de A_1.

Por meio da Figura 5, na qual aparece a resposta de A_1, percebe-se que esse participante encontrou os valores esperados, porém não teve o devido cuidado na redação do texto:

Figura 5: Soma das medidas dos ângulos de um triângulo esférico segundo A_1

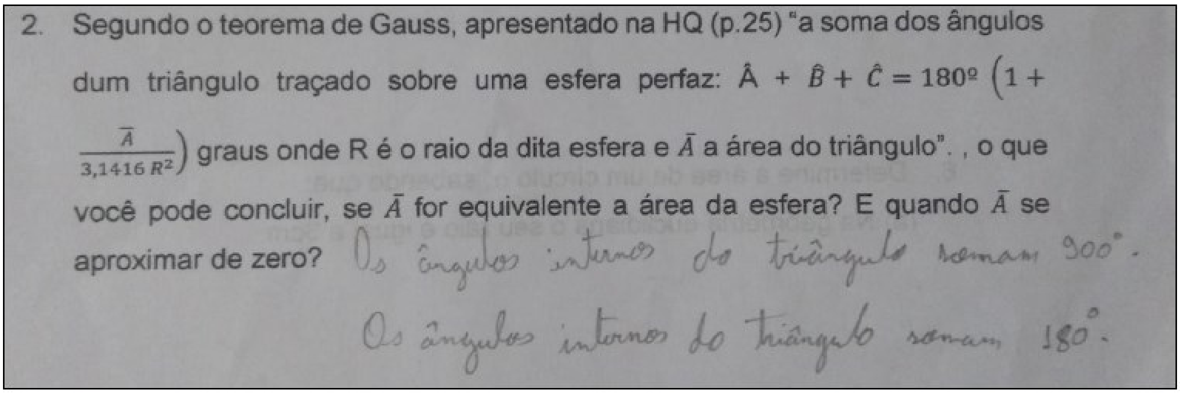

2. Segundo o teorema de Gauss, apresentado na HQ (p.25) "a soma dos ângulos dum triângulo traçado sobre uma esfera perfaz: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^{\circ}\left(1 + \frac{\bar{A}}{3{,}1416\, R^2}\right)$ graus onde R é o raio da dita esfera e $\bar{A}$ a área do triângulo". , o que você pode concluir, se $\bar{A}$ for equivalente a área da esfera? E quando $\bar{A}$ se aproximar de zero?

O triângulo irá ter 900°. Para o caso em que $\bar{A}$ se aproxima de 0 ele terá 180°.

Fonte: Dados da pesquisa

Conforme aparece na Figura 5, A_1 não deixa explicitado (embora fique subentendido) que 180º e 900º referem-se à "soma das medidas dos ângulos internos do triângulo". O participante A_2 foi mais cuidadoso no uso da linguagem matemática. A Figura 6 mostra a sua resposta:

Figura 6: Soma das medidas dos ângulos de um triângulo esférico segundo A_2


2. Segundo o teorema de Gauss, apresentado na HQ (p.25) "a soma dos ângulos dum triângulo traçado sobre uma esfera perfaz: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^{\circ}\left(1 + \frac{\bar{A}}{3{,}1416\, R^2}\right)$ graus onde R é o raio da dita esfera e $\bar{A}$ a área do triângulo". , o que você pode concluir, se $\bar{A}$ for equivalente a área da esfera? E quando $\bar{A}$ se aproximar de zero? Os ângulos internos do triângulo somam 900°.

Os ângulos internos do triângulo somam 180°.

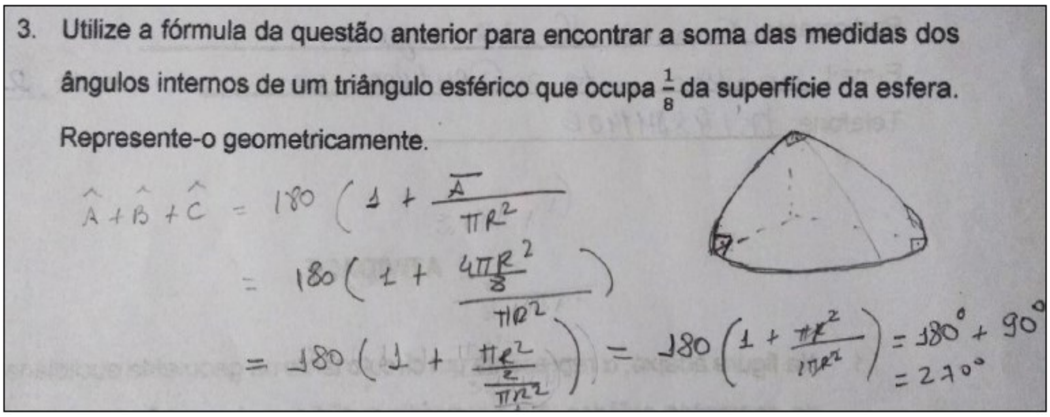
Fonte: Dados da pesquisa

Como se pode ver na Figura 6, A_2 relaciona 900º e 180º à soma das medidas dos ângulos internos dos triângulos. É possível perceber que os alunos A_1 e A_2 não explicaram como encontraram tais valores, o que nos leva a inferir que eles fizeram o cálculo mentalmente, fato ratificado com a resposta apresentada na Figura 7.

Utilizando a fórmula de Gauss, os dois participantes, A_1 e A_2, conseguiram perceber que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo que ocupa um oitavo da superfície da esfera equivale a 270º. Na Figura 7, aparece a resposta dada por A_1. Esse participante sabe que, na Geometria Euclidiana, a área da superfície de uma esfera de raio r é $4\pi r^2$, pois utiliza essa expressão para encontrar a área de um triângulo que ocupa um oitavo da superfície da esfera.

Conforme mostra a Figura 7, após obter a área do triângulo indicado na questão, A_1 a substitui no Teorema de Gauss e, assim, encontra a soma das medidas dos ângulos internos deste polígono, a saber, 270º.

Figura 7: Triângulo esférico em um octante


3. Utilize a fórmula da questão anterior para encontrar a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo esférico que ocupa $\frac{1}{8}$ da superfície da esfera. Represente-o geometricamente.

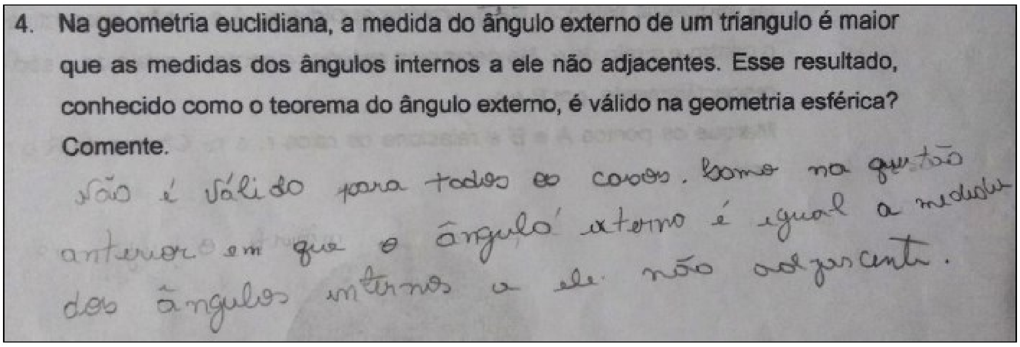
$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C} = 180\left(1+\frac{A}{\pi R^2}\right.$$
$$= 180\left(1+\frac{\frac{4\pi R^2}{8}}{\pi R^2}\right)$$
$$= 180\left(1+\frac{\frac{\pi R^2}{2}}{\pi R^2}\right) = 180\left(1+\frac{\pi R^2}{2\pi R^2}\right) = 180^\circ + 90^\circ = 270^\circ$$

Fonte: Dados da pesquisa

4.5 Teorema do Ângulo Externo

Os participantes foram questionados acerca da validade do TAE na GE. A_1 apresentou um contraexemplo recorrendo a um triângulo que ocupa um oitavo da superfície esférica, conforme pode ser verificado por meio da Figura 8.

Figura 8: Não validade do TAE um octante


4. Na geometria euclidiana, a medida do ângulo externo de um triangulo é maior que as medidas dos ângulos internos a ele não adjacentes. Esse resultado, conhecido como o teorema do ângulo externo, é válido na geometria esférica? Comente.

Não é válido para todos os casos. Como na questão anterior em que o ângulo externo é igual a medida dos ângulos internos a ele não adjacente.

Fonte: Dados da pesquisa

A "questão anterior", mencionada por A_1 na Figura 8, aparece na Figura 7. O participante A_2 apresenta resposta semelhante utilizando outras palavras. A_3 não esteve presente neste encontro.

A despeito dos resultados apresentados até aqui, houve também equívocos na aprendizagem mediante a leitura da HQ. Algumas dessas situações são apresentadas a seguir.

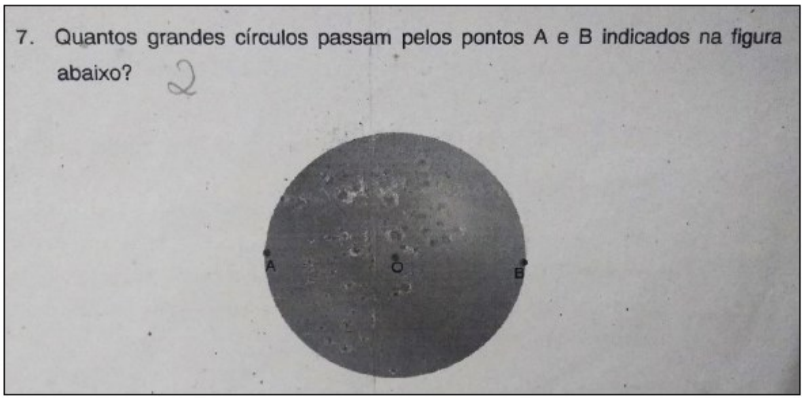
4.6 Erros na aprendizagem

Um resultado que não foi devidamente compreendido por alguns dos participantes foi a não unicidade da reta que passa por dois pontos antípodas. Em uma das atividades, foram dados dois pontos antípodas, A e B, sobre uma superfície esférica. Em seguida, questionou-se aos participantes[4] acerca da quantidade de círculos máximos que passam por esses pontos. O participante A_3 afirmou que por A e B passa "apenas 1", o que não é verdade de acordo com Silva (2015). O participante A_2 afirmou que, nesse caso, há dois grandes círculos. Embora, em sua resposta, A_2 não tenha feito representação geométrica alguma, conforme pode ser

[4] Apenas o participante A_1 respondeu corretamente, afirmando que por A e B passam infinitas retas (grandes círculos).

visualizado na Figura 9, é possível que ele tenha considerado apenas os círculos dispostos nas posições horizontal e vertical.

Figura 9: Círculos e pontos antípodas segundo A_2

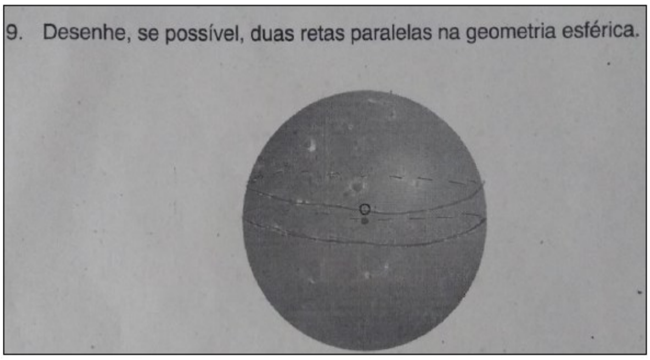


Fonte: Dados da pesquisa.

Na Figura 9, aparecem dois pontos antípodas, A e B, sobre uma superfície esférica de centro em um ponto O. Assim, A, B e O estão sobre uma mesma reta euclidiana, sendo, portanto, colineares do ponto de vista euclidiano. Sabe-se que, na Geometria Euclidiana, por três pontos colineares passa uma infinidade de planos (Lima, Carvalho, Wagner & Morgado, 2005). Consequentemente, por A e B passa uma quantidade infinita de grandes círculos, um em cada plano. O participante A_2, porém, afirmou passar apenas dois, sem, contudo, representá-los geometricamente.

O participante A_2 (foi o único que) considerou possível haver retas paralelas na GE. Em uma tentativa de exibi-las, ele desenhou dois círculos que não se interceptam, como pode ser visualizado na Figura 10:

Figura 10: Círculos que não se interceptam



Fonte: Dados da pesquisa

Por meio da Figura 10, é possível perceber que um dos círculos desenhados por A_2 não tem o centro coincidindo com o da esfera, portanto, não é uma reta da GE. Tem-se, na figura, dois círculos paralelos em vez de grandes círculos paralelos (o que, de fato, não existe). Conforme pode ser verificado na Figura 11, na HQ de Jean Pierre Petit, aparecem circunferências[5] paralelas (para se referir a circunferências de mesmo centro, a saber, os pontos N ou S). Esse fato pode ter levado o participante a concluir indevidamente a existência de paralelismo entre retas da GE.

[5] Na HQ e ao longo desse texto, os termos “círculo” e “circunferência” são adotados como sinônimos: lugar geométrico dos pontos do plano (euclidiano ou não euclidiano) que equidistam de um ponto fixo desse plano.

Figura 11: Circunferências paralelas na GE

Fonte: HQ As Aventuras de Anselmo Curioso: Os Mistérios da Geometria

Na Figura 11, é representado um conjunto de circunferências paralelas. Todas elas têm, na GE, o mesmo centro, o Polo Norte N (ou o Polo Sul S). Têm-se, conforme citado na HQ, "circunferências paralelas" (e não grandes círculos paralelos).

De acordo com Carli (2012), as dificuldades enfrentadas na aprendizagem das GNE dizem respeito à resistência em aceitar resultados que diferem daqueles dispostos no modelo euclidiano. Apesar de concordar com esses dois autores, esse fato não foi identificado nesta pesquisa a partir do comportamento ou das respostas apresentadas pelos participantes e expostas nesta seção.

5 Considerações finais

A presente pesquisa proporcionou aos participantes o contato com um modelo de Geometria diferente daquele comumente difundido nos cursos de Licenciatura em Matemática. A ideia de reta como a linha do horizonte, por exemplo, precisou ser reconstruída. Para ser considerado uma reta, o lugar geométrico dos pontos do plano precisa gozar da propriedade de minimizar distância. Sem essa noção, a compreensão de que as retas da GE são os seus círculos máximos estaria fadada ao fracasso. Da mesma forma, os participantes precisaram ressignificar a forma de calcular distância para compreender que o centro de um círculo na Geometria Euclidiana difere do centro desse mesmo lugar geométrico na GE.

A tradição de ensino de Geometria pautada nos axiomas de Euclides resulta no entendimento de que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º. Entretanto, muitas vezes, não é revelado aos estudantes que esse resultado não é uma verdade universal. Ele está atrelado a uma estrutura axiomática predeterminada e, fora dela, tem-se outra realidade. Nesta investigação, os participantes conseguiram compreender que, na GE, a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo esférico assume outros valores: varia entre 180º e 900º, excluindo os extremos. A ideia de relativização da verdade acompanha, ainda que forma indireta, a apresentação de modelos de Geometria diferentes do euclidiano.

Os participantes conseguiram perceber, ao longo da pesquisa, que a Geometria de Euclides não é absoluta, pois não contempla todos os problemas do mundo real. O formato esférico da superfície da Terra, por exemplo, implica na utilização de um tipo de Geometria que não se furta de considerar a sua curvatura. Na HQ de Petit (1982), é possível perceber que a trajetória descrita para ir de Nova York a Madrid não se dá em linha reta no sentido euclidiano. Nesse caso, deve-se percorrer um arco de um círculo máximo que passa pelas duas cidades. Da mesma forma, na atividade proposta aos participantes, eles foram capazes de identificar a trajetória que torna mais rápida a viagem do Brasil até o Gabão. A ideia dos círculos máximos como as curvas minimizantes da GE foi assimilada por todos eles.

Se por um lado os participantes mostraram ter compreendido uma série de resultados da GE, por outro, foi possível identificar conteúdos cuja aprendizagem não ocorreu a contento. Esse fato revela que sempre haverá o que esclarecer e aprimorar. A HQ sozinha não conseguirá os melhores êxitos. É preciso saber utilizá-la. A participação do professor (ou pesquisador, conforme o caso) é essencial. Necessita-se promover o debate, fomentando discussões a partir da leitura.

A abordagem da HQ não privilegiou a apresentação de resultados da GE por meio de provas ou demonstrações matemáticas. Tratou-se de um processo de iniciação à GE e de ilustração de seus resultados. Isso significa que o tratamento desses conteúdos não se esgota com a própria HQ. É necessário ampliar e aprofundar a discussão a partir de outras fontes, como livros didáticos, dissertações, teses e artigos, além da utilização de *softwares* matemáticos e materiais manipuláveis.

Nesta investigação, a literatura em quadrinhos foi adotada como forma de se introduzir os conteúdos da GE. Esse tipo de abordagem é defendido por Vergueiro (2006) para o tratamento de qualquer tema, não necessariamente vinculado à Matemática. Caberá ao professor ou pesquisador escolher o momento certo para utilizar a HQ em sala de aula. É necessário se atentar ao fato de que essa mídia não deve ser reduzida à dimensão motivacional e lúdica. Há conteúdos que são abordados a partir dela e que podem promover uma discussão que seja provocativa, reflexiva e que, a depender da HQ utilizada, avance para além da superficialidade.

Como desdobramento da presente investigação, recomenda-se a identificação e a utilização de outras literaturas em quadrinhos que contemplam as GNE. Se não localizadas, caberá ao pesquisador confeccioná-las, como ocorreu no trabalho de Ribeiro, Santos e Ferreira (2012), ou solicitar aos participantes que as produzam, conforme propõem Upson e Hall (2013). Cabe também investigar a possibilidade de se utilizar, na Educação Básica, HQ que abordem de forma intuitiva esse tipo de Geometria.

Referências

Adames, M. R. (2005). *Geometria Esférica.* Trabalho de Conclusão de Curso (Matemática). Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, SC.

Andrade, P. F. A. (2008). *Introdução à Geometria Hiperbólica Plana*. Fortaleza, CE: UFC.

Assis, E. S. A. (2017). Geometria Hiperbólica nos currículos escolares e universitários. *Educação Matemática Pesquisa, 19*(3), 393-413.

Barbosa, J. L. M. (2006). *Geometria Euclidiana Plana*. Rio de Janeiro, RJ: SBM.

Barbosa, J. L. M. (2008). *Geometria Hiperbólica*. Rio de Janeiro, RJ: Impa.

Bonete, I. P. (2000). *As geometrias não-euclidianas em cursos de licenciatura: algumas experiências.* Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Estadual de Campinas. Campinas, SP.

Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental*. Apresentação dos temas transversais. Brasília: MEC/SEF.

Brasil. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. (2018). *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC/SEB.

Brum, W. P., Schuhmacher, E. & Silva, S. C. R. (2015). As Geometrias Esférica e Hiperbólica em Foco: sobre a Apresentação de alguns de seus Conceitos Elementares a Estudantes do Ensino Médio. *Bolema, 29*(51), 419-427.

Caldatto, M. E. (2011). *O processo coletivo de elaboração das diretrizes curriculares para a educação básica do Paraná e a inserção das geometrias não euclidianas*. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática). Universidade Estadual de Maringá. Maringá, PR.

Caldatto, M. E. & Pavanello, R. M. (2014). O processo de inserção das geometrias não euclidianas no currículo da escola paranaense: a visão dos professores participantes. *Bolema*, *28*(48), 42-63.

Carli, F. A. R. (2012). *A Aprendizagem de Geometrias Não Euclidianas: um estudo realizado com alguns professores da Rede Pública de Ensino*. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática). Universidade Estadual de Maringá. Maringá, PR.

Cavalcante, R. N. B. & Oliveira, J. Q. (2020). Construindo o círculo na Geometria do taxi: uma proposta de insubordinação criativa. *REnCiMa*, *3*, 450-464.

Ceará. Secretaria de Estado de Educação. (2008). *Diretrizes Curriculares da Educação Básica Matemática*. Fortaleza, CE: SEE.

Doxiadis, A. & Paradimitriou, C. H. (2013). *Logicomix: uma jornada épica em busca da verdade*. São Paulo, SP: WMF Martins Fontes.

Goldenberg, M. (2004). *A arte de pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em ciências sociais*. Rio de Janeiro, SP: Record.

Honorato, K. P. R. (2014). T*rês modelos para a geometria hiperbólica.* Trabalho de Conclusão (Especialização em Matemática). Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte, MG.

Kaleff, A. M. M. R. (2010). Geometrias Não-Euclidianas na Educação Básica: Utopia ou Possibilidade? In: *Anais do Encontro Nacional de Educação Matemática* (pp. 1-17). Salvador, BA.

Kaleff, A. M. M. R. & França, J. C. (2012). Uma análise da apresentação de retas paralelas em livros didáticos do ensino médio. *Caderno Dá Licença*, *7*(1), 11-32.

Kessler, B. (2009). Comic books that teach mathematics. In: C. S. Kaplan & R. Sarhangi. (Eds.). *Proceedings of Bridges 2009: Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture* (pp. 97-104). London: Tarquin Books.

Kojima, H., Togami, S. & Co, B. (2010). *Guia Mangá de Cálculo Diferencial e Integral.* São Paulo, SP: Novatec Editora Ltda.

Kundlatsch, A. & Silveira, C. (2018). A temática soluções nas histórias em quadrinhos: análise de uma atividade desenvolvida com estudantes do ensino médio. *REnCiMa*, *9*(5), 36-55.

Lima, E. L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E. & Morgado, A. C. (2005). *A Matemática do Ensino Médio.* Rio de Janeiro, RJ: SBM.

Lovis, K.A., & Franco, V. (2015). As concepções de Geometrias não Euclidianas de um Grupo de Professores de Matemática da Educação Básica. *Bolema, 29*(51), 369-388.

Neves, S. C. (2012). *A história em quadrinhos como recurso didático em sala de aula.* Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Artes Visuais). Universidade de Brasília. Palmas, TO.

Paraná. Secretaria de Estado de Educação. (2008). *Diretrizes Curriculares da Educação Básica Matemática*. Curitiba, PR: SEE.

Petit, J. P. (1982). *As aventuras de Anselmo Curioso: Os mistérios da Geometria*. Lisboa: Publicação Dom Quixote.

Reis, J. D. A. D. S. (2006). *Geometria Esférica por Meio de Materiais Manipuláveis*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, SP.

Ribeiro, G. F., Santos, T. S. & Ferreira, L. (2012). Utilizando história em quadrinhos como metodologia para o ensino da geometria hiperbólica: uma aplicação com alunos do ensino médio. In: *Anais do Encontro de Produção Científica e Tecnológica* (pp. 1-15). Campo Mourão, PR.

Rosa, M., Pazuch, V. & Silva, S. T. (2012). O feedback de professores de matemática sobre a vivência com histórias em quadrinhos: reflexões para o processo de ensinar Matemática. *Educação Matemática em Revista*, *13*(2), 71-80.

Santos, E., Neto & Silva, M. R. P. (2015). *Histórias em Quadrinhos e Práticas Educativas: os gibis estão na escola e agora?*. São Paulo, SP: Criativo.

Santos, T. S. (2009). *A inclusão das Geometrias Não-Euclidianas no Currículo da Educação Básica*. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e Matemática). Universidade Estadual de Maringá. Maringá, PR.

Santos, R., & Vergueiro, W. (2012). Histórias em quadrinhos no processo de aprendizado: da teoria à prática. *EccoS, 27*, 81-95.

São Paulo. Secretaria de Estado de Educação. (2011). *Diretrizes Curriculares da Educação Básica Matemática*. São Paulo, SP: SEE.

Silva, W. D. (2015). *Uma introdução à Geometria Esférica*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, SP.

Sousa, M. (2011). *Turma da Mônica em Saiba mais sobre a história da Matemática*. Barueri, SP: Pannini.

Souza, C. B. (2014). *Geometria hiperbólica consistência do modelo de disco de Poincaré*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal Rural de Pernambuco. Recife, PE.

Upson, M. & Hall, C. M. (2013). Comic book guy in the classroom: the educational power and potential of graphic storytelling in library education. *Kansas Library Association College and University Libraries Section Proceedings, 3*(1), p. 28-38.

Vergueiro, W. (2006). Uso das HQs no ensino. In: A. Rama & W. Vergueiro. (Org.), *Como usar as histórias em quadrinhos na sala de aula*. (pp. 7-30). São Paulo, SP: Contexto.