

Experimentos mentais como metodologia de ensino: perspectivas teóricas para a soma dos ângulos externos de um triângulo euclidiano

Willian José da Cruz

Universidade Federal de Juiz de Fora

Juiz de Fora, MG — Brasil

✉ willian.cruz@ufjf.br

ORCID [0000-0001-7509-1021](https://orcid.org/0000-0001-7509-1021)



2238-0345 

10.37001/ripem.v14i2.3822 

Recebido • 06/03/2024

Aprovado • 01/07/2024

Publicado • 24/08/2024

Editor • Gilberto Januario 

Resumo: Este texto apresenta alguns resultados de uma pesquisa teórica que estuda a Semiótica e os Experimentos Mentais no ensino e na aprendizagem em Matemática. A intenção deste artigo é mostrar as características dos Experimentos Mentais que os qualificam como uma possível metodologia de ensino para Matemática, sobretudo aplicada à soma dos ângulos externos de um triângulo euclidiano. Os Experimentos Mentais, no campo da Educação Matemática, são formas de representar o objeto do conhecimento, por meio de um diagrama, e de desenvolver certas deduções e abduções no referido diagrama, a ponto de modificá-lo para se chegar a novos conceitos e/ou generalizações. Como resultado, construímos um conjunto de fundamentações teóricas, conceitos e ideias, justificando que os Experimentos Mentais podem, de fato, se constituir como uma metodologia para o ensino de Matemática. Neste contexto, buscamos estudar teorias, conceber ideias e combinar conceitos, construindo fundamentações teóricas capazes de sustentar os resultados apresentados.

Palavras-chave: Educação Matemática. Ensino de Matemática. Metodologia Alternativa. Semiótica.

Thought experiments as a teaching methodology: theoretical perspectives for the sum of the exterior angles of a Euclidean triangle

Abstract: This text presents some the results of the theoretical research that studies Semiotics and Thought Experiments in teaching and learning mathematics. The aim of this article is to present the characteristics of Thought Experiments that qualify them as a possible teaching methodology for maths, especially when applied to the sum of the external angles of a Euclidean triangle. Thought Experiments, in the field of Mathematics Education, are ways to represent the object of knowledge, by means of a diagram, and to develop certain deductions and abductions in this diagram, to the point of modifying it, in order to arrive at new concepts and/or generalizations. In this presentation, we seek to study theories, conceive ideas and combine concepts, building theoretical foundations that support the results presented.

Keywords: Mathematics Education. Mathematics Teaching. Alternative Methodology. Semiotics.

Los experimentos mentales como metodología de enseñanza: perspectivas teóricas de la suma de los ángulos exteriores de un triángulo euclídeo

Resumen: Este texto presenta algunos de los resultados de la investigación teórica que estudia la Semiótica y los Experimentos Mentales en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. El objetivo de este artículo es presentar las características de los Experimentos Mentales que los califican como una posible metodología de enseñanza de las matemáticas, especialmente cuando se aplican a la suma de los ángulos exteriores de un triángulo euclídeo. Los Experimentos Mentales, en el ámbito de la Educación Matemática, son formas de representar

el objeto de conocimiento, mediante un diagrama, y de desarrollar determinadas deducciones y abducciones en dicho diagrama, hasta modificarlo, para llegar a nuevos conceptos y/o generalizaciones. En esta presentación, tratamos de estudiar teorías, concebir ideas y combinar conceptos, construyendo las bases teóricas que sustentaron los resultados presentados.

Palabras-clave: Educación Matemática. Enseñanza de las Matemáticas. Metodología Alternativa. Semiótica.

1 Experimentos Mentais: uma nova metodologia alternativa da Matemática? Perspectivas teóricas

Este texto foi desenvolvido na intenção de trazer algumas discussões e perspectivas sobre os Experimentos Mentais na Educação Matemática, que se mostram como uma metodologia alternativa de ensino para a Matemática. Os resultados aqui presentes foram coletados a partir da pesquisa teórica denominada *A Semiótica e os Experimentos Mentais no ensino e na aprendizagem em Matemática*. Nossos objetivos são: apresentar as características dos Experimentos Mentais na Educação Matemática; estudar como esses experimentos influenciam o ensino e a aprendizagem dessa disciplina na Educação Básica; entender quais aspectos estão presentes nos Experimentos Mentais que os qualificam como tão importantes no processo de interpretação de questões matemáticas, a ponto de serem considerados uma nova metodologia alternativa para o ensino dessa ciência. Para alcançar tais objetivos, buscamos estudar teorías, conceber ideias e combinar conceitos, construindo fundamentações teóricas capazes de sustentar os resultados apresentados.

Este artigo está organizado em três partes. Na primeira, conceituamos os Experimentos Mentais no campo da Educação Matemática e apresentamos as principais características de tal processo, constituindo, dessa forma, a heurística fundamental que organiza o pensamento na aplicação dessa metodologia. Na segunda parte, discutimos a perspectiva pela qual a metodologia é concebida em sua ação político-pedagógica. Assim como Freire (2019) afirma, acreditamos que não existe neutralidade na educação. A educação é uma forma política de intervenção no mundo, pois este é humano. Como entendemos que não há ensino neutro, uma metodologia não pode ser neutra. Na terceira parte, apresentamos um exemplo que envolve a soma dos ângulos externos de um triângulo e suas possíveis generalizações, consolidando a metodologia.

2 Experimentos Mentais: uma nova metodologia

De onde nascem as ideias? Nós, seres humanos, somos a fonte de novas ideias. Essa capacidade exclusivamente humana é que transforma a vida, abrindo caminhos para novas possibilidades. Mark Turner (2014), em seu livro *The Origin of ideas*, escreve:

A contribuição humana para o milagre da vida ao nosso redor é óbvia: temos novas ideias, na hora, o tempo todo, e temos realizado essa mágica por pelo menos 50.000 anos. Nós não criamos galáxias. Nós não criamos a vida. Não criamos os vírus, o sol, o DNA ou a ligação química. Mas criamos ideias novas – muitas e muitas delas. Elas surgem constantemente nas mentes humanas e, às vezes, saem de nossas mentes para influenciar outras mentes e mudar o mundo. Temos uma visão criativa e reconhecemos novas possibilidades. Nossas novas ideias não são instintos fixos — como o instinto de um castor para construir uma represa ou o instinto de um morcego para ecolocalizar e ingerir um inseto. Certamente temos esses instintos, mas eles não são o assunto deste livro. O assunto é nossa incrível capacidade de apresentar novas ideias que vão muito além de nossas situações locais (Turner, 2014, p. 17).

O autor complementa afirmando que, “quando temos uma ideia nova, podemos

compartilhá-la com outras pessoas ou carregá-la conosco, podemos ensiná-la ou aprender uma ideia nova de outro” (Turner, 2014, p. 18). Essas novas ideias conferem um novo sentido ao mundo, a nós e aos outros também. Além disso, novas ideias podem ser utilizadas para gerar ideias ainda mais novas, criando assim um ciclo contínuo.

Consideramos que a Matemática não é um conhecimento meramente algorítmico, e nós, seres humanos, não somos calculadoras ou sofistas. Estamos constantemente à procura de novos fatos e de novas ideias, buscando sempre um processo de idealização e de generalização. Na Matemática, generalização é “um processo simbólico que opera por meio de abstrações hipostáticas” (Otte, 2012, p. 38).

A abstração hipostática é conceituada por Peirce como um modo “de pensamento que toma característica da percepção ou de um percepto (desde que já tenha sido prescindido de outros elementos do percepto) de modo a tomar forma proposicional em um julgamento” (CP¹, 4.235). Trata-se da maneira de criar conceitos e ideias novas, com o intuito de introduzir novos objetos ideais. O próprio Kant, em sua *Crítica da Razão Pura*, afirma que “a Matemática e a Física são os dois conhecimentos teóricos da razão que devem determinar *a priori* o seu objeto” (BX)².

No entanto, a perspectiva atual da Matemática na escola, muitas vezes, a coloca como um amontoado de fórmulas e afirmações tidas com verdades incontestáveis. Otte (2012) descreve essa perspectiva como a visão centrada em argumentos e provas, e complementa afirmando “que a prova pertence a metamatemática e parece ser um exercício de lógica, e lógica nada tem a declarar sobre qualquer coisa que não seja uma proposição” (p. 41).

Todo conhecimento inicia-se por atividades concretas. O conhecimento geométrico — ou mais especificamente a Geometria — trata de seus objetos. Mas quais objetos são esses? Como podemos representá-los?

Arsac, Colonna e Chapiron (1992, p. 25), no livro *Initiation au Raisonnement Deductif au College*, apresentam situações experimentais iniciando com uma questão que envolve números primos, a saber: “Na expressão $n \times n - n + 11$, se substituirmos n por qualquer número natural, sempre receberemos um número que tem exatamente dois divisores?”.

Os autores ainda dissertam que “parece mais fácil começar o raciocínio dedutivo com um problema aritmético; os estudantes podem fazer testes com cálculos simples, de modo que logo encontrem algo que todos estão procurando” (Arsac, Colonna & Chapiron, 1992, p. 48). Esse é um exemplo para ensinar a lei do terceiro excluído ou a lei da não contradição. Essa forma de ensinar se baseia no contexto da lógica proposicional e não da Matemática. “A lógica proposicional é construída completamente à base dessas duas regras fundamentais. No entanto, seu poder se torna a sua fraqueza, porque essas leis derivam precisamente de abstrações do concreto” (Otte, 2012, p. 46).

O olhar matemático procede ao considerar, por exemplo, a função $f(n) = n^2 - n + 11$ como um objeto do conhecimento, permitindo que o sujeito possa explorar suas variações locais e seu comportamento à medida que n varia, não apenas como uma proposição universalmente válida. Otte (2012, p. 46) aponta que “a lógica proposicional não se interessa pelas coisas em si”, isto é, os objetos estão mais próximos de seus objetivos do que as proposições, pois combinam generalizações, unindo particularidades e abstrações. Essa é a especificidade da

¹ Seguindo uma prática padrão referente às obras de Peirce, adotamos a referência CP para indicar *Collected Papers*, de Charles Sanders Peirce, por exemplo: CP 5.313, o primeiro número corresponde ao volume e os demais ao parágrafo.

² As citações das obras de Kant correspondem à forma recomendada pela *Akademie-Ausgabe* e adotada pela Sociedade Kant Brasileira. A base das citações, neste texto, é a obra *Crítica da Razão Pura*, de 2001, 5a. edição.

Matemática caracterizada pelos seus objetos. No entanto, esses objetos matemáticos não podem ser definidos ou determinados, são conceituados universalmente, como é o caso do triângulo geral. Otte (2012) escreve que

os conceitos são universais, de modo que os aspectos venham a ser reconhecidos. Um universal ou geral é, como diz Peirce, o indeterminado. Isso representa um olhar diferente. Um olhar que considera não os conceitos, mas o contínuo, como sendo representante da realidade objetiva e da generalidade com respeito à Matemática (Otte, 2012, p. 46).

Buscamos sempre uma complementaridade de objetos e meios, ou de fatos e representações. Essa complementaridade é essencial para o conhecimento matemático. De acordo com Otte (2012, p. 46), “um conceito matemático, tal como o conceito de função, não existe independente da totalidade de suas possíveis representações, no entanto não deve ser confundido com qualquer representação em particular”. Mas o que é uma representação? Essa talvez seja a questão mais importante para o realismo matemático, e talvez o processo de Experimentação Mental possa ajudar a respondê-la. Na perspectiva semiótica, representar significa explicar ou vice-versa, e essa representação é um aspecto da percepção, em certo sentido.

Adotamos a perspectiva semiótica peirceana, na qual considera-se que “todo pensamento é feito por meio de signos” (Peirce, NEM³ 1 122). Cruz (2018) afirma que, para Peirce, o signo é uma relação de representação. Isto é, o sinal atua como mediador entre os objetos e os interpretantes, oferecendo uma tríade. Essa tríade distingue entre o *representâmen*, que é o sinal, o *interpretante*, que é o sentido ou significado produzido pelo sinal, e o *objeto* representado pelo sinal.

O próprio Peirce destaca que “o homem só pode pensar por meio de palavras ou outros símbolos externos” (CP, 5.313) e que todo pensamento é um sinal. Tomado em conjunto com o fato de que a vida é uma linha de pensamento, isso prova que o homem é um sinal. Em consequência,

todo pensamento é um signo externo, prova que o homem é um signo externo. Ou seja, o homem e o signo externo são idênticos, no mesmo sentido em que as palavras *homo* e *homem* são idênticas. Assim, minha linguagem é a soma total de mim mesmo; pois o homem é o pensamento (CP, 5.314).

Em relação ao pensamento matemático, Peirce afirma que todo raciocínio necessário é raciocínio matemático e, por consequência, é diagramático. O autor pontua que

Não é necessária uma ciência da lógica para além daquilo que a matemática pode fornecer, a não ser, possivelmente, no que diz respeito à heurística matemática. Mas o exame dos métodos de demonstração matemática lança uma luz extraordinária sobre a lógica, tal como eu, pela minha parte, nunca sonhei de antemão, embora devesse ter adivinhado que haveria tesouros inesperados escondidos neste terreno completamente inexplorado. Que a lógica da matemática pertencia à lógica dos parentes, e à lógica das relações triádicas e não das relações diádicas, era, de fato, óbvio à partida; mas, para além disso, eu não tinha qualquer ideia da sua natureza. As primeiras coisas que descobri foram que todo o raciocínio matemático é diagramático e que todo o raciocínio necessário é raciocínio matemático, por mais simples que seja (NEM 4).

³ NEM: *New Elements of Mathematics* by Charles S. Peirce (Peirce, 1976) seguido por números de volume e página.

47).

Entende-se, com base em Peirce (NEM 4), que o raciocínio diagramático é um tipo de raciocínio pelo qual, por meio de um preceito expresso em termos gerais, constroem-se diagramas, realizam-se experiências nesses diagramas, anotam-se os resultados obtidos nessas experiências e garante-se que, se a mesma experiência for efetuada em qualquer outro diagrama construído sob o mesmo preceito, o resultado será idêntico, expressando esse fato em termos gerais. Essa descoberta foi de grande importância para Peirce e mostra que todo conhecimento, sem exceção, provém da observação. Em termos mais específicos, o conhecimento matemático é observacional e desenvolvido a partir de Experimentos Mentais.

Os Experimentos Mentais, no campo da Educação Matemática, são formas de representar o objeto do conhecimento, por meio de um diagrama, e de desenvolver certas deduções e abduções no referido diagrama, a ponto de modificá-lo, para que seja possível chegar a novos conceitos e/ou generalizações.

Sabemos que existem diversos tipos de Experimentos Mentais em várias áreas científicas. Neste contexto, destacaremos três autores com perspectivas distintas sobre tais experimentos. A escolha desses autores se baseia nos aspectos de suas conceituações que tangenciam o conceito de Experimentos Mentais adotado no campo da Educação Matemática.

O primeiro autor é um dos mais proeminentes filósofos da ciência, o físico Thomas S. Khun, que conceitua os Experimentos Mentais como “poderosos instrumentos no aprimoramento da compreensão humana sobre a natureza” (Khun, 2011, p. 257). Para esse autor, há duas funções que os Experimentos Mentais são capazes de fazer quando aplicados às ciências. A primeira função é colocar o cientista diante de uma contradição ou conflito no seu modo de pensar. A segunda função é ensinar ao cientista tanto sobre os seus conceitos quanto sobre o mundo.

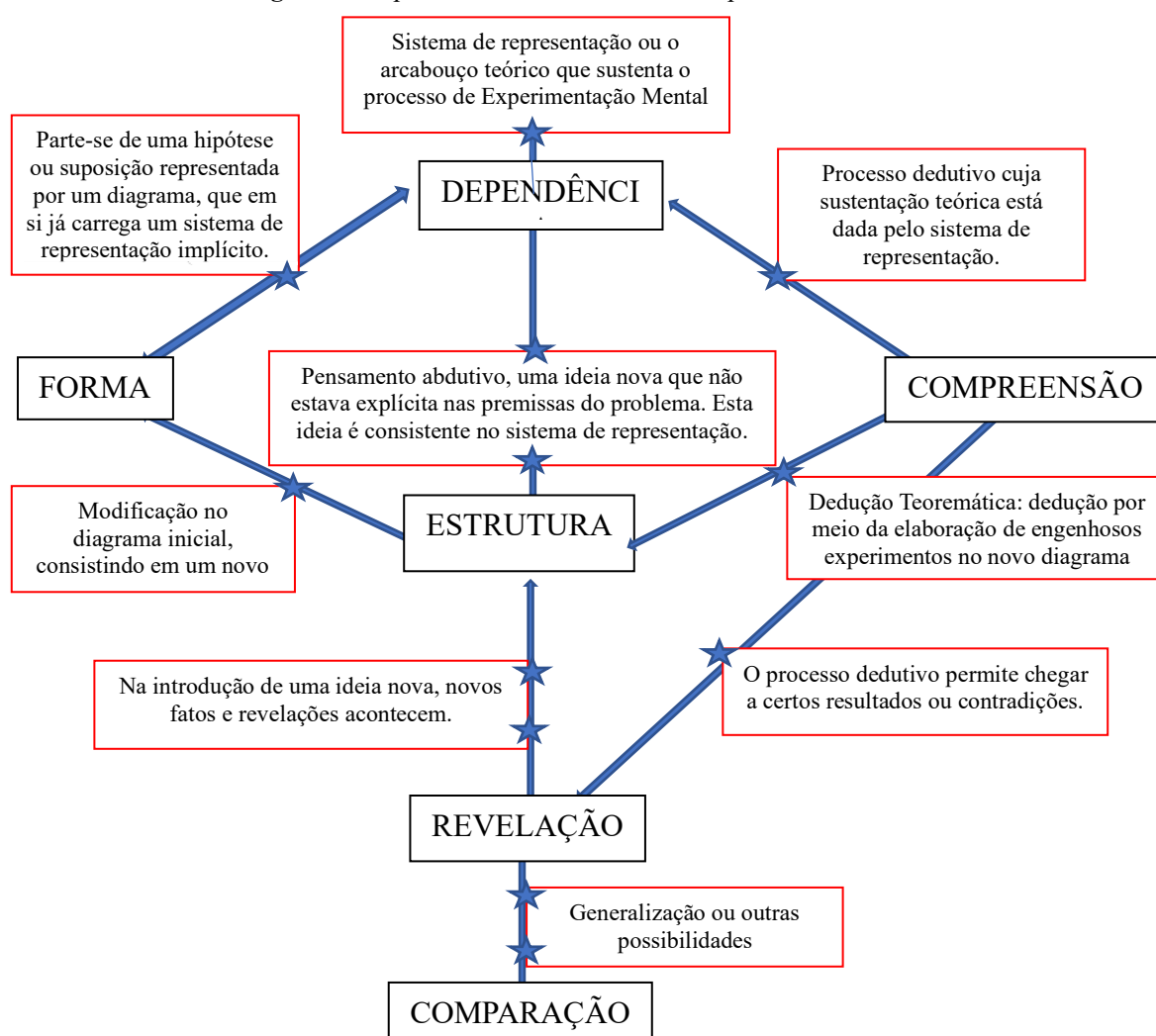
O segundo autor destacado é o filósofo canadense James Robert Brown (2005), que conceitua os Experimentos Mentais como formas de estabelecer algum fenômeno e buscar uma teoria para explicá-lo.

O terceiro e último autor é o estudioso da Filosofia Grega Antiga Ian Mueller (1969), o qual conceitua os Experimentos Mentais como um tipo de experiência que tem a capacidade de desenvolver um contexto de situações imaginárias, diferentemente de um sistema lógico formal.

No campo da Educação Matemática, apresentamos, com base nas concepções de Cruz (2022), o processo de Experimentação Mental como uma possível metodologia alternativa de ensino para essa ciência tanto na Educação Básica quanto na Superior. Para isso, a conceituação desses tipos de experimentos deve seguir a linha de transformar nossos pensamentos em representações, sob a égide de um sistema de representação coerente. Nesse caso, os pensamentos se tornam os objetos de consideração. Os Experimentos Mentais têm uma dupla função no ensino da Matemática: mostrar a coerência de um dado conceito e demonstrar a possibilidade de aplicação desse mesmo conceito (Cruz, 2018).

A heurística que modela esses tipos de experimentos como metodologia alternativa de ensino é formada por seis características fundamentais: *Forma, Estrutura, Compreensão, Dependência, Revelação e Comparação*. Do ponto de vista semiótico, esses termos assumem outras definições dentro desse processo, o que não representa necessariamente o significado usual de cada um deles. Essas características estão dispostas, ou interligadas, num processo não linear, conforme apresentado no mapa mental da Figura 1.

Figura 1: Mapa Mental: A Heurística dos Experimentos Mentais



Fonte: Elaboração própria

Para explicar os significados de cada uma dessas características, baseamo-nos em Cruz (2022). Assim, dissertamos que:

- *Forma* é um conjunto de atividades supostas, ou seja, são conjecturas e hipótese consideradas no início do processo de Experimentação Mental, dadas por meio de uma representação particular do objeto geral.
- *Estrutura* é a introdução de uma nova ideia no processo, a qual não estava explícita nos dados iniciais do problema e/ou da atividade. É o pensamento abdutivo, “cuja verdade pode ser questionada ou mesmo negada” (Peirce, 2010b, p. 229). No entanto, a abdução permite criar conexões que não seriam possíveis apenas com os dados iniciais do processo.
- *Compreensão* é o processo de dedução *teoremática*, “que representa as condições da conclusão, por meio da elaboração de engenhosos experimentos com o diagrama, a ponto de modificá-lo. Observando o diagrama modificado, afirma a verdade da conclusão” (Cruz, 2022, p. 13).
- *Dependência* é o sistema de representação, isto é, a teoria que sustenta todo o processo de Experimentação.

- *Revelação* é a obtenção de novos resultados e contradições no nosso sistema de conhecimento. Tem o potencial de mostrar a verdade de um fato ou apontar a impossibilidade de aplicação de uma determinada teoria.
- *Comparação* é o processo que permite afirmar que “é possível comparar o conhecimento com outras possibilidades de solução na dada atividade” (Cruz, 2022, p. 36).

Podemos conceituar que esse processo (Figura 1) é dinâmico e que todas as interfaces (características) se comunicam. Elas vão e vêm, mas sempre partindo de uma suposição (*Forma*), isto é, de uma hipótese que já está ancorada a um sistema de representação (*Dependência*).

A introdução de uma ideia nova, um pensamento abduutivo (*Estrutura*), também é desenvolvida por meio desse sistema de representação, assim como o processo dedutivo (*Compreensão*). Ao final, a *Revelação* pode ocorrer na introdução da ideia nova (uma contradição aparente ou implícita) ou ao término do processo dedutivo. Há possibilidades outras!? (*Comparação*).

A aplicação dos Experimentos Mentais na Matemática é viabilizada pela conceituação da Matemática como uma atividade semiótica que constrói diagramas, experimenta nesses diagramas e analisa criticamente os resultados apresentados.

3 Uma metodologia de ensino não é neutra

“O conhecimento matemático, na medida em que é o conhecimento do objeto, depende de intuições” (Otte, 2012, p. 49). Esse conhecimento é desenvolvido por meio de contradições entre o sujeito cognoscente e o objeto do conhecimento. Essas contradições são produzidas na ação de aplicação dos Experimentos Mentais e nas revelações que surgem neste processo. A justificativa para o uso dessa metodologia reside na crença na existência de objetos na Matemática. Como esses objetos não são físicos, o único acesso que temos a eles é por meio de representações, e qualquer experiência que possa ser realizada nesses objetos é desenvolvida nessas representações.

O aspecto central sobre o conhecimento “não é a redução, mas a generalização e continuidade” (Otte, 2012, p. 49). A generalização é uma situação particular da continuidade que ocorre a partir das atividades que o sujeito realiza, sendo essa a essência da relação dialética sujeito-objeto. Otte (2012) disserta que

a generalização na Matemática cria objetos ideias, abstrações hipostáticas ou reflexivas, como Piaget os chamava. Abstração reflexiva significa que um processo ou uma atividade se transforma num objeto de reflexão. Por exemplo, os números são produzidos através da contagem, um, dois, três, ... *ad infinitum*. Mas, tomando os números naturais como objetos matemáticos, como acontecem nos axiomas de Peano, isto representa uma abstração reflexiva e uma generalização (p. 55).

No entanto, um conjunto de axiomas representa apenas a forma, enquanto o aspecto da continuidade reside no geral e não na forma. O próprio Kant concebeu os números como uma inscrição no fluxo temporal, dependendo de uma intuição *a priori*, isto é, a ideia de número deve associar a forma ao conteúdo. Relembremos as considerações de Kant sobre a soma de 7 com 5.

À primeira vista poder-se-ia, sem dúvida, pensar que a proposição $7 + 5 = 12$ é uma proposição simplesmente analítica, resultante, em virtude do princípio de contradição,

do conceito da soma de sete e de cinco. Porém, quando se observa de mais perto, verifica-se que o conceito da soma de sete e de cinco nada mais contém do que a reunião dos dois números em um só, pelo que, de modo algum, é pensado qual é esse número único que reúne os dois. O conceito de doze de modo algum ficou pensado pelo simples fato de se ter concebido essa reunião de sete e de cinco e, por mais que analise o conceito que possuo de uma tal soma possível, não encontrarei nele o número doze. Temos de superar estes conceitos, procurando a ajuda da intuição que corresponde a um deles, por exemplo os cinco dedos da mão ou (como Segner na sua aritmética) cinco pontos, e assim acrescentar, uma a uma, ao conceito de sete, as unidades do número cinco dadas na intuição. Com efeito, tomo primeiro o número sete e, com a ajuda dos dedos da minha mão para intuir o conceito de cinco, adiciono-lhes uma a uma, mediante este processo figurativo, as unidades que primeiro juntei para perfazer o número cinco e vejo assim surgir o número doze. No conceito de uma soma de $7 + 5$ pensei que devia acrescentar cinco a sete, mas não que essa soma fosse igual ao número doze. A proposição aritmética é, pois, sempre sintética, do que nos compenetrámos tanto mais nitidamente, quanto mais elevados forem os números que se escolherem, pois então se torna evidente que, fossem quais fossem as voltas que dêssemos aos nossos conceitos, nunca poderíamos, sem recorrer à intuição, encontrar a soma pela simples análise desses conceitos (Kant, B15).

Percebe-se que os axiomas de Peano representam a forma dos números naturais, mas não respondem o que são esses números. “Frege e Russel, por isso, acharam a apresentação axiomática dos números incompleta” (Otte, 2012, p. 55).

René Thom, ao discutir a questão do formalismo excessivo no ensino de Matemática, pontua que “o verdadeiro problema que confronta o ensino da matemática não é o do rigor, mas o problema do desenvolvimento do ‘significado’, da ‘existência’ dos objetos matemáticos” (Thom, 1973, p. 2022). A forma de superar esse problema seria permitir que os estudantes experimentassem os processos de generalização e abstração por meio de Experimentos Mentais, ao invés de confrontá-los com o abstrato como tal. Otte (2012, p. 126) afirma que “o progresso da ciência e da Matemática poderá ser concebido, até um certo grau, como o processo de desenvolvimento de seus objetos e de sua noção real”.

O próprio Kant escreve que na Matemática

um postulado é uma proposição prática, que apenas contém a síntese pela qual damos a nós próprios um objeto e produzimos o seu conceito; assim, por exemplo, com uma linha dada, a partir de um ponto dado, descrevemos um círculo sobre uma superfície. E semelhante proposição não pode ser demonstrada, porque o processo que ela exige é, precisamente, aquele pelo qual produzimos, antes de mais, o conceito de tal figura (Kant, B287).

É o conceito de explicação que trará luz ao significado do objeto considerado. Essa consideração mostra a necessidade e a possibilidade de aplicação dos processos de Experimentação Mental. O formalismo, por sua vez, invocado pela comunicação em larga escala e à longa distância, simultaneamente facilitou e impediu a aprendizagem e o diálogo da Matemática. Destarte, Otte (2012) afirma que

as dificuldades de aprendizagem resultam não menos do fato de que o conceito de explicação é central para nossas práticas educacionais e objetivas, visto que a ciência moderna e a matemática não oferecem explicações de coisa alguma no sentido desejado. Elas são muito abstratas ou hipotéticas, ou são muito instrumentais e técnicas (p. 126).

Thom (1973) mostra que a tendência modernista da Matemática, presente até os dias atuais no ensino dessa disciplina, assenta-se no formalismo matemático. Em sua crítica, ele relembra a famosa fala de Bertrand Russel que em essência diz: “A Matemática pode ser definida como a disciplina na qual nunca sabemos do que estamos falando nem se o que estamos dizendo é verdade” (Thom, 1973, p. 204).

Otte (2012, p. 128) sugere que a Matemática “pode ser conceitualizada como uma interação recursiva entre formas e raciocínios relacionais e operativos e isso implica que a intuição e a lógica também interagem”. A Experimentação Mental traz em si essa interação entre a intuição e a prova, contradizendo-se e complementando-se.

A Matemática, sendo um processo de generalização que não conhece limites absolutos, torna-se um contínuo. Peirce (2010a, p. 177) descreve generalização como “o extravasamento de sistemas contínuos no pensar, no sentir, no agir”. Esses sistemas são os verdadeiros objetivos da vida e se relacionam com os problemas mais amplos da educação.

Otte (1993, p. 30) conceitua a educação como uma dualidade, sendo ao mesmo tempo “aprendizagem e meta-aprendizagem”. Aprendizagem refere-se ao conhecimento de uma ciência, uma arte, uma técnica, uma disciplina, enquanto a meta-aprendizagem se caracteriza como uma fonte de autorreflexão, criatividade e autonomia sobre a própria capacidade de aprender.

Em síntese, essas duas formas de entender a educação podem ser interpretadas nas considerações de D’Ambrosio (2011, p. 25) como “estratégias desenvolvidas pelas sociedades para: a) possibilitar a cada indivíduo atingir o seu potencial criativo; b) estimular e facilitar a ação comum, com vistas a viver em sociedade e exercer a cidadania”. A primeira estratégia pode ser entendida como meta-aprendizagem, e a segunda como aprendizagem. Duas estratégias contraditórias, mas, ao mesmo tempo, complementares.

Paulo Freire (2019) destaca que a educação é uma forma de intervenção no mundo e se caracteriza por ser uma experiência especificamente humana. Essa intervenção vai além do ensinar ou aprender determinado conteúdo, além de superar a reprodução da ideologia dominante. Freire (2019, p. 96) pontua que “dialética e contraditória, não poderia ser a educação só uma ou só a outra dessas coisas. Nem apenas reprodutora, nem apenas desmascaradora da ideologia dominante”. Do ponto de vista dos interesses dominantes, a educação se torna imobilizadora e ocultadora das verdades. Ao mesmo tempo, a educação não pode atuar livremente, pois todos nós, seres humanos, não estamos livres “dos condicionamentos genéticos, culturais, sociais, históricos, de classe e de gênero que nos marcam e a que nos achamos referidos” (Freire, 2019, p. 97). Não há neutralidade na educação.

Toda prática exige uma definição, ou seja, não há metodologia neutra. “Não posso ser professor se não percebo cada vez melhor que, por não poder ser neutra, minha prática exige de mim uma definição” (Freire, 2019, p. 100).

Manfredi (1993, p. 2) afirma que o conceito de *metodologia*, para além de uma conceituação genérica e abstrata do seu significado etimológico, carrega em si “diferentes concepções e práticas educativas que historicamente lhe deram suporte”. É na perspectiva do momento histórico, do contexto de sua produção e na intenção político-didática de seu desenvolvedor que a metodologia ganha forma.

Os Experimentos Mentais foram desenvolvidos em um momento de mudanças significativas na nossa concepção de Matemática e seu ensino. Nessa perspectiva, essa metodologia se fundamenta na concepção dialética da educação, abordando diretrizes que buscam identificar a lógica implícita no processo; o endereçamento do conhecimento

produzido; as distintas formas de saberes populares e saberes sistematizados; as relações dos diversos tipos de conhecimentos; o sentido e o significado de uma teoria centrada na perspectiva crítica da educação; a produção do conhecimento individual e sociocultural (Manfredi, 1993).

Esta concepção dialética se assenta no Materialismo Dialético de Marx, estabelecendo uma conexão entre teoria (conhecimento) e prática (ação). Segundo Gadotti (1995, p. 23), “a teoria não é um dogma, mas um guia para a ação”. A prática, por sua vez, torna-se a fonte ou o critério de verdade da teoria, pois “o conhecimento parte da prática e a ela volta dialeticamente” (Gadotti, 1995, p. 23).

Do ponto de vista formal, o conhecimento matemático é regido por três princípios ou leis, a saber: o princípio da identidade; o princípio da não contradição; e o princípio ou lei do terceiro excluído. O princípio da identidade afirma que uma coisa permanece sempre igual a si mesma. O princípio da não contradição estabelece que duas coisas não podem ser verdadeiras ao mesmo tempo. O princípio ou lei do terceiro excluído afirma que “ou é uma coisa ou é outra” (Gadotti, 1995, p. 28). Nas concepções do Materialismo Dialético, consideramos um quarto princípio que não exclui os outros três, mas os complementa. Esse é o princípio dialético, no qual busca-se entender os aspectos da realidade, da sociedade, do universo e do ser humano, visando conhecer o mundo como realidade material e modificá-lo.

Otte (2012, p. 13) enfatiza que a “realidade do conhecimento é um processo semiótico que envolve o próprio sujeito”. Disserta, ainda, que “cognição e conhecimento é um processo semiótico resultado de uma contradição entre o sujeito cognitivo e a realidade objetivo” (2012, p. 14). É na dialética do conhecimento que dispomos os Experimentos Mentais como uma metodologia alternativa para o ensino de Matemática, pois essa dialética é o “resultado de uma interação constante entre os objetos a conhecer e a ação dos sujeitos que procuram compreendê-los” (Gadotti, 1995, p. 27).

Essa interação coloca, de um lado, a sensação consciente e, do outro, a reação objetiva, estabelecida por meio de uma representação. “Essa é a única maneira de poder conhecer, isto é, pela construção de uma representação” (Otte, 2012, p. 14).

O problema epistemológico da Matemática está inexoravelmente ligado ao problema da educação, e toda construção de ideias novas nesse campo visa uma mudança significativa do nosso entendimento sobre as formas de promover a educação. Contudo, acreditamos, assim como D'Ambrosio (2011, p. 31), que “o mundo atual está a exigir outros conteúdos, naturalmente outras metodologias, para que se atinjam os objetivos maiores da criatividade e cidadania plena. Isso exige entender melhor o homem, a humanidade e o conhecimento”.

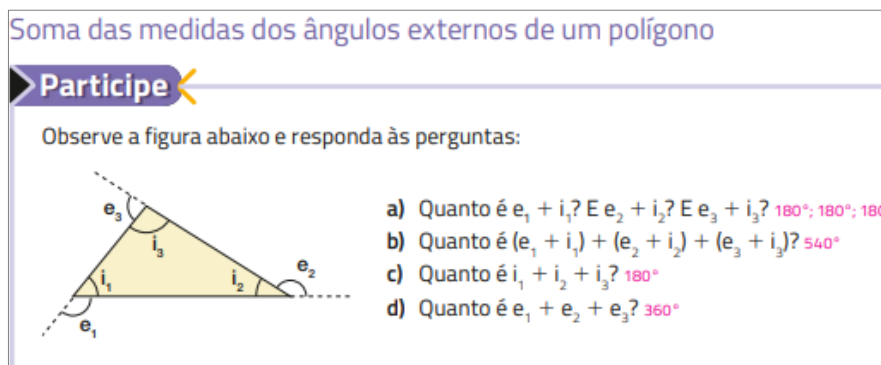
4 A soma dos ângulos externo de um triângulo: um exemplo

Neste tópico, apresentaremos um exemplo retirado do livro *Experimentos Mentais: uma nova metodologia para o ensino de Matemática*, o qual descreve uma interação hipotética entre um aluno (sujeito cognoscente) e o objeto considerado (ângulo externo de um triângulo). A questão central é: qual é o valor da soma dos ângulos externos de um triângulo euclidiano? Essa atividade pode ser desenvolvida sem a necessidade de conhecer a soma dos ângulos internos. Alguns livros didáticos, como o *Matemática e Realidade* (9º ano), mostra que a soma dos ângulos externos de um triângulo depende da soma dos ângulos internos, conforme pode ser visto na Figura 2, reduzindo o processo construtivo a um conjunto de cálculos envolvendo a soma e as relações com os ângulos suplementares no mesmo vértice.

O exemplo da Figura 2 retrata o caráter essencialmente algébrico dado ao problema apresentado, que é uma característica da matemática escolar. Esse enfoque algébrico “na

Matemática escolar cria tantas dificuldades, devido ao fato de que existe consciência insuficiente do potencial do sistema gráfico visual e das noções de modelagem ligadas a isto” (Otte, 2012, p. 104). Ou seja, a figura geralmente é colocada no problema como uma mera ilustração.

Figura 2: A soma dos ângulos externos nos livros didáticos

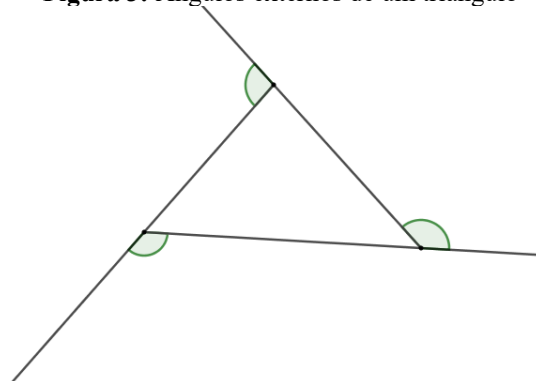


Fonte: Iezzi (2018, p. 250)

A matemática escolar admite dois sistemas de representação específicos: o aritmético, caracterizado pelos números naturais como referência absoluta; e o geométrico, determinado pela visão no plano e no espaço, de modo que ambos são essenciais. Os sistemas matemáticos são, antes de tudo, esquemas de organização gráfica e visual. Isso condiciona ao entendimento de que “a Matemática assenta, como quase toda a ciência, na visão e nas metáforas visuais e geométricas. A geometrização é a ideia mais fundamental da matemática e ela faz com que as mais variadas coisas sejam imaginadas” (Otte, 1993, p. 40).

A fim de identificar o objeto do conhecimento, isto é, o que ou como são os ângulos externos de um triângulo, apresentamos esse objeto por meio de uma representação (ou diagrama) na Figura 3.

Figura 3: Ângulos externos de um triângulo



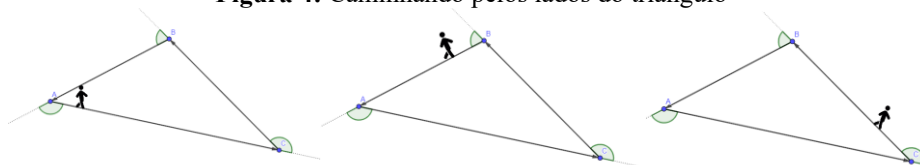
Fonte: Elaboração própria

Em termos conceituais, os ângulos externos de um triângulo são formados pelo prolongamento de um lado e o lado adjacente a esse prolongamento. Como um triângulo possui três lados e, portanto, três prolongamentos, teremos três ângulos externos.

A proposição apresentada pede para provar que a soma das medidas dos ângulos externos de um triângulo euclidiano é 360°. Aplicando a metodologia temos:

Forma: Nossa hipótese convida o aluno a “caminhar por toda a volta sobre a linha do triângulo e terminar olhando o caminho por onde começou” (Cruz, 2022, p. 83). Quantos graus você girou no total? O diagrama da figura 4 nos ajudará a pensar nesta hipótese.

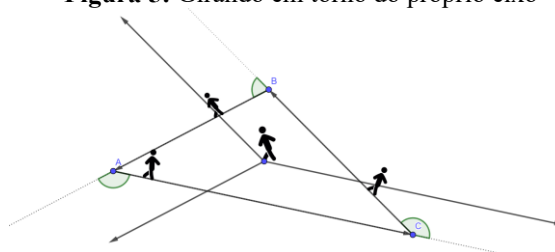
Figura 4: Caminhando pelos lados do triângulo



Fonte: Cruz (2022, p. 83)

Estrutura: Aplicando uma síntese abductiva, apresentamos uma ideia nova. “Este caminhar pelos lados do triângulo é o mesmo que dar uma volta completa em torno de si mesmo, sobre um ponto determinado no interior do triângulo” (Cruz, 2022, p. 83) e o caminho percorrido em cada lado descreve um vetor, que pode ser representado por um segmento orientado ou por qualquer um segmento equipolente a esse, conforme o diagrama da Figura 5 mostra.

Figura 5: Girando em torno do próprio eixo

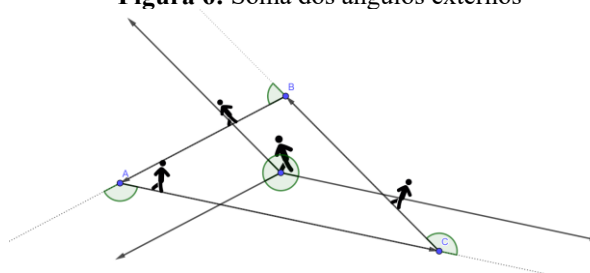


Fonte: Cruz (2022, p. 83)

Compreensão: “Esses vetores formam ângulos equivalentes aos ângulos externos do triângulo em função do paralelismo que os lados apresentam com esses vetores representantes” (Cruz, 2022, p. 84). A validade do quinto postulado de Euclides nos mostra que os ângulos correspondentes são congruentes, como mostra o diagrama da Figura 6.

Revelação: Ao juntar todos esses ângulos, chegamos a um ângulo cuja medida é 360° .

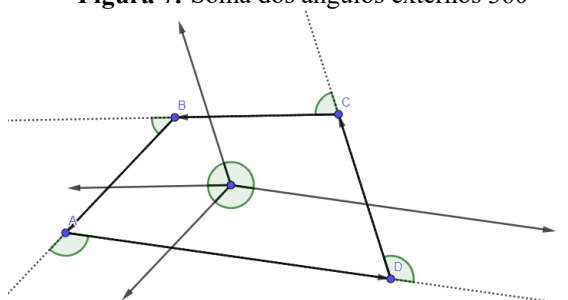
Figura 6: Soma dos ângulos externos



Fonte: Cruz (2022, p. 84)

Comparação: Esta experiência pode ser repetida em polígonos com número de lados maiores do que três. A título de exemplo, apresentamos o quadrilátero na Figura 7.

Figura 7: Soma dos ângulos externos 360°

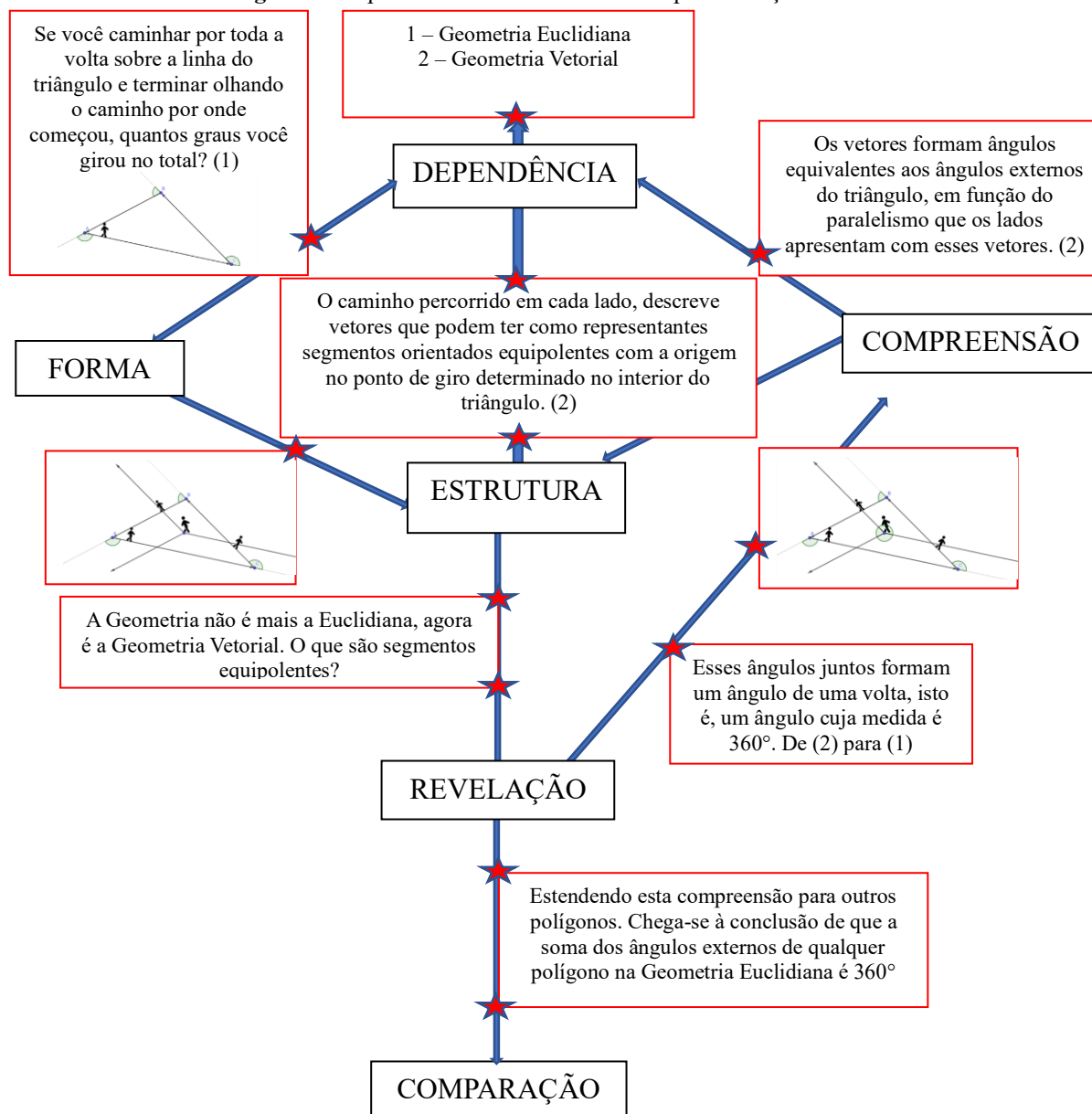


Fonte: Cruz (2022, p. 85)

Dependência: A atividade inicia-se no contexto da Geometria Euclidiana, passa pela Geometria Vetorial e retorna à Geometria Euclidiana, constituindo, assim, nosso sistema de representação.

Para sintetizar este Experimento Mental, apresentamos o mapa mental da Figura 8, o qual permite entender o funcionamento da metodologia na atividade, destacando que outras questões também poderiam ser feitas ao longo do processo de aplicação. Por exemplo, como seria o desenvolvimento desta atividade em uma Geometria não Euclidiana? Quais contradições, verdades e/ou possibilidades poderíamos encontrar nesse processo?

Figura 8: Mapa Mental 2: Um resumo da Experimentação Mental



Fonte: Elaboração própria

Em síntese, a Matemática “é um procedimento que começa com uma metáfora gráfica ou na forma de um Experimento Mental e não como uma indução positiva com base em fatos objetivos” (Otte, 1993, p. 43). O verdadeiro objeto da Matemática sempre precisa de um contexto, pois é uma variável livre, ou seja, uma variável que representa um conceito ou uma ideia.

5 Considerações

No contexto de um novo olhar para a educação, em especial para a Educação Matemática, apresentamos os Experimentos Mentais como uma nova metodologia alternativa para o ensino dessa ciência. Uma metodologia que resgata os processos de experimentação, o uso de metáforas e o pensamento especulativo na Matemática. Nossa crença na existência de objetos matemáticos nos condiciona a desenvolver atividades por meio de representações, imaginando um mundo de objetos ao qual nós próprios parecemos não pertencer.

A busca por coerência e contradições, assim como a concretização da aprendizagem e da meta-aprendizagem, são os objetivos de uma educação que ascende a duas ações complementares: o desenvolvimento da criatividade e a ação comum, que é a nossa função social. Precisamos ser capazes de criar ideias novas na esteira de entender a Matemática como um processo contínuo de generalização. Otte (1993) pontua que

No entanto, a matemática se caracteriza essencialmente pelo processo de generalização e, na medida em que esse processo não conheça limites absolutos, ele é contínuo. Uma ideia se generaliza pela sua extensão contínua. Charles S. Peirce chama à generalização “o derramar de sistemas contínuos no pensar, no sentir, no agir”, o verdadeiro objetivo da vida (Otte, 1993, p. 41).

A Matemática não pode ser simplesmente o resultado de processos de memorização ou *decoreba*, sem a identificação do objeto em consideração (no caso, o conceito ou objeto matemático abordado no problema e/ou atividade). A maneira como nos relacionamos com esse objeto é o que nos permite compreendê-lo ou modificá-lo.

A transformação do ensino reside na nossa capacidade de propor o novo, na forma como interagimos com as diferentes possibilidades de pensamentos e representações, e na superação de nossos preconceitos. Matemática é uma ciência social por excelência (Otte, 1993), uma ciência que busca na relação entre o sujeito e o objeto do conhecimento (no nosso contexto, conceitos e ideias matemáticas relacionadas à soma dos ângulos externos do triângulo euclidiano) construir a verdade de um fato. “Mas a verdade de uma proposição está na referência, isto é, nos objetos considerados de uma teoria” (Cruz, 2022, p. 106) e o próprio sujeito cria e se refere aos objetos por meio de representações.

Agradecimento

Agradecimento ao CNPq pelo apoio, por meio da Chamada Universal CNPq/MCTI N° 10/2023 – Projeto Colaboratório de Semiótica Cognitiva.

Referências

- Arsac, G., Colonna, A. & Chapiron, G. (1992). *Initiation au raisonnement déductif au collège: une suite de situations permettant l'appropriation des règles du débat mathématique*. Lyon : Presses Universitaires Lyon.
- Brown, J. R. (2005). *The Laboratory of the mind: Thought experiments in the natural sciences*. Abingdon: Taylor & Francis e- Library.
- Cruz, W. J. (2018). *Experimentos Mentais na Educação Matemática: uma analogia com provas matemáticas formais*. Curitiba, PR: Appris.
- Cruz, W. J. (2022). *Experimentos Mentais: uma nova metodologia para o ensino de Matemática*. Rio de Janeiro, RJ: Ciência Moderna.

- Cruz, W. J. (2022). Retângulo que não é retângulo? A aplicação dos experimentos mentais no Quadrilátero de Saccheri. *Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, 12(4), 1-16.
- D'Ambrosio, U. (2011). *Educação para uma sociedade em transição*. (2a. ed). Natal, RN: EdUFRN.
- Freire, P. (2019). *Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa* (59a. ed.). Rio de Janeiro, RJ: Paz e Terra.
- Gadotti, M. (1995). *Concepção dialética da educação: um estudo introdutório* (9a. ed.). São Paulo, SP: Cortez.
- Iezzi, G. (2018). *Matemática e realidade 9º ano* (9a. ed.). São Paulo, SP: Editora.
- Kant, I. (2001). *Crítica a razão pura* (5ª. ed.). Lisboa: Fundação Caloute Gulbenkian
- Kuhn, T. S. (2011). *A tensão essencial*. São Paulo, SP: EdUNESP.
- Manfredi, S. M. (1993). *Metodologia de Ensino: diferentes concepções* (versão preliminar). Campinas, SP: Unicamp.
- Mueller, I. (1969). Euclid's Elements and the Axiomatic Method. *British Journal for the Philosophy of Science*, 20(4), 289-309.
- Otte, M. F. (1993). *O formal, o social e o subjetivo: uma introdução à filosofia e à didática da matemática*. São Paulo, SP: EdUNESP.
- Otte, M. F. (2012). *A realidade das Ideias: uma perspectiva epistemológica para a Educação Matemática*. Cuiabá: EdUFMT.
- Peirce, C. S. (1976). *The New Elements of Mathematics by Charles S. Peirce*. The Hague: Mouton Publishers.
- Peirce, C. S. (1994). *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*. Cambridge: Harvard University Press.
- Peirce, C. S. (2010a). *Philosophy of Mathematics*. Bloomington: Indiana University Press.
- Peirce, C. S. (2010b). *Semiótica*. (Tradução de J. T. Coelho Neto; 4ª. ed.). São Paulo, SP: Perspectiva.
- Thom, R. (1973). Modern mathematics: does it exist? In: A. G. Howson (Ed). *Developments in Mathematical Education* (pp. 194-209). Cambridge: Cambridge University Press.
- Turner, M. (2014). *The origin of ideas: blending, creativity, and the human spark*. Oxônia: Oxford University Press.