

Um olhar sobre os enunciados de problemas de divisão elaborados por alunos dos 5º e 9º anos

Daiane Gomes Prior Cara

Universidade Estadual do Oeste do Paraná

Vera Cruz do Oeste, PR — Brasil

✉ daianeprior@hotmail.com

 0000-0002-1984-3628

Dulcyene Maria Ribeiro

Universidade Estadual do Oeste do Paraná

Cascavel, PR — Brasil

✉ dulcyene.ribeiro@unioeste.br

 0000-0002-5602-8032

Andréia Büttner Ciani

Universidade Estadual do Oeste do Paraná

Cascavel, PR — Brasil

✉ andbciani@gmail.com

 0000-0001-9735-6705



2238-0345 

10.37001/ripem.v14i4.3882 

Recebido • 18/03/2024

Aprovado • 13/05/2024

Publicado • 15/10/2024

Editor • Gilberto Januario 

Resumo: Este artigo tem por objetivo discutir o que se mostra da elaboração de problemas de divisão por alunos de um 5º e um 9º ano do Ensino Fundamental. Trata-se de uma pesquisa qualitativa, baseada na análise da produção escrita, pela qual foram identificados os tipos de problemas produzidos, as informações para a sua resolução, bem como as linguagens materna, simbólica e numérica mobilizadas. Como resultado, observou-se que a maioria dos alunos elaborou problemas de partição utilizando números naturais. No entanto, também houve o emprego de números fracionários e decimais. Em alguns enunciados elaborados pelos alunos do 9º ano, conceitos ensinados no Ensino Fundamental II, como o cálculo da área do triângulo e a fatoração, foram utilizados. Não houve variação expressiva nas características dos enunciados dos problemas elaborados pelos alunos do 5º e 9º ano. Os resultados podem ampliar as compreensões e reflexões sobre o ensino e a aprendizagem de divisão e contribuir para futuras pesquisas.

Palavras-chave: Proposição de Problemas. Ensino de Divisão. Aprendizagem de Divisão. Análise da Produção Escrita.

A look at the division problem statements elaborated by 5th and 9th grade students

Abstract: This article aims to discuss what is revealed in the elaboration of division problems by students in the 5th and 9th grade of Elementary School. This is a qualitative study based on the analysis of written production, through which the types of problems produced, the information needed for their resolution, as well as the mother tongue, symbolic and numerical languages mobilized were identified. As a result, it was observed that most students created partition problems using natural numbers. However, fractional and decimal numbers were also used. In some statements prepared by 9th grade students, concepts taught in Elementary School II, such as calculating the area of a triangle and factoring, were employed. There was no significant variation in the characteristics of the problem statements created by 5th and 9th grade students. The results can broaden understandings and reflections on the teaching and learning of division and contribute to future research.

Keywords: Problems Proposition. Teaching Division. Learning Division. Analysis of Written Production.

Un vistazo a los enunciados de problemas de división elaborados por alumnos de 5º y 9º grado

Resumen: Este artículo tiene como objetivo discutir lo que se revela en la elaboración de problemas de división por parte de alumnos de 5º y 9º año de Educación Primaria. Se trata de una investigación cualitativa basada en el análisis de la producción escrita, a través de la cual se identificaron los tipos de problemas producidos, la información para su resolución, así como los lenguajes materno, simbólico y numérico movilizados. Como resultado, se observó que la mayoría de los alumnos elaboró problemas de partición utilizando números naturales. Sin embargo, también se emplearon números fraccionarios y decimales. En algunos enunciados elaborados por los alumnos de 9º grado, se utilizaron conceptos que se enseñan en Educación Primaria II, como el cálculo del área del triángulo y la factorización. No hubo variación significativa en las características de los problemas elaborados por los alumnos de 5º y 9º grado. Los resultados pueden ampliar las comprensiones y reflexiones sobre la enseñanza y el aprendizaje de la división y contribuir a futuras investigaciones.

Palabras clave: Proposición de Problemas. Enseñanza de la División. Aprendizaje de la División. Análisis de la Producción Escrita.

1 Introdução

No processo de ensino e aprendizagem de Matemática, entre os assuntos considerados complexos para professores e alunos, está a operação de divisão e os problemas que a envolvem. Isso significa que, além da dificuldade em compreender e operar com o algoritmo da divisão, os alunos, frequentemente, se embaraçam na interpretação dos enunciados dos problemas e na identificação da operação de divisão para resolvê-los.

Segundo Molinari (2010), as características e a coordenação de ações tornam a operação de divisão complexa, mesmo para crianças mais velhas. A dificuldade na interpretação do enunciado, somada à complexidade do algoritmo, faz com que, mesmo tendo concluído o Ensino Fundamental, muitas vezes, os alunos ainda não consigam lidar com essa operação matemática em diferentes contextos.

Algumas pesquisas relacionadas à operação de divisão, como as de Soppelsa (2016); Oliveira (2015); Molinari (2010); Nunes, Campos, Magina e Bryant (2009); Nehring (1996, 2001) e Saiz (2001), versam sobre problemas previamente preparados pelos pesquisadores ou presentes em livros didáticos com abordagens direcionadas a analisar as resoluções e as respostas dos alunos para os problemas.

Por outro lado, as orientações dos documentos oficiais recomendam que os professores incentivem seus alunos a elaborarem enunciados de problemas (sejam eles de divisão ou não), além de apenas resolver problemas (Brasil, 2017; Paraná, 2018). Segundo Jurado (2015, p. 235, tradução nossa), “trabalhos nesta área, até mesmo a nível internacional, não são tão abundantes quanto os trabalhos referentes a resolução de problemas”.

Acompanhando essas orientações, Chica (2001); Domite (2006); Jurado (2015); Spinillo, Lautert, Borba, Santos e Silva (2017); Possamai e Alevatto (2023) destacam a relevância para a aprendizagem de Matemática da proposição de problemas pelos próprios alunos. Particularmente, Silva (2016) pesquisa a exploração e a proposição de problemas com diferentes ideias/significados da multiplicação e da divisão com alunos de um 5º ano.

A pesquisadora identificou que, no início, a elaboração de problemas pelos alunos se mostrou desafiadora. No entanto, ela concluiu que tal ação contribuiu para a autonomia, criatividade, reflexão, interpretação, criação de diferentes estratégias, apreensão de conhecimentos, desenvolvimento de habilidades para resolver problemas e aprimoramento da concepção de que um problema pode ser resolvido por mais de uma operação. Além disso, colaborou para o aperfeiçoamento da competência para propor problemas, realizar problematizações e reelaborar problemas propostos por eles anteriormente.

Considerando que a ação de formular problemas é ainda um aspecto pouco explorado na literatura ao se considerar experiências em sala de aula, conjectura-se sobre a importância de estimular o aluno a lidar com a elaboração do enunciado de um problema.

Diante dessa problemática – e com a intenção de compreender os conhecimentos e as dificuldades em relação à divisão que alunos concluintes do Ensino Fundamental I e II demonstram em suas produções escritas –, realizou-se uma pesquisa de mestrado que buscou revelar características de enunciados e de resoluções de problemas que envolvem a operação de divisão, elaborados por duas turmas de um 5º e um 9º anos do Ensino Fundamental (Cara, 2020). Assim, os dados foram construídos por meio da elaboração e resolução de problemas pelos alunos dessas turmas.

Este texto¹ apresenta o que se mostrou quanto à elaboração de enunciados de problemas que envolvem a operação de divisão por alunos do 5º e 9º anos do Ensino Fundamental. Buscou-se identificar, nos enunciados, os tipos de problemas produzidos, verificar se continham informações necessárias para serem resolvidos e de que modo as linguagens materna, simbólica e numérica foram mobilizadas. Os resultados estão apresentados na terceira seção deste texto, o qual é composto por duas outras seções que abordam divisão, elaboração e apresentação de problemas.

2 A operação de divisão

A palavra divisão na língua portuguesa do Brasil possui diversos significados, entre eles: separação; classificação; partilha; discórdia; setor e unidade militar, conforme Houaiss (2001). No entanto, qual ideia está vinculada ao conceito de dividir matematicamente? No dia a dia, para dividir algo, não há necessidade de que as partes resultantes da divisão sejam de medidas ou quantidades rigorosamente iguais, como na Matemática. Apenas a divisão matemática carrega um significado muito particular e preciso, originado do algoritmo de Euclides.

Molinari (2010) escreve que, para Correa, Nunes e Bryant (1998), “[...] a divisão, enquanto operação, não é o mesmo que partilha, apesar de esta constituir o esquema de ação que a origina: [...] quando partilham, as crianças não têm qualquer preocupação a não ser a igualdade das partes [...]” (Molinari, 2010, p. 33). No entanto, o conceito de divisão “[...] envolve a compreensão das relações entre os três valores, representados pelo dividendo, pelo divisor e pelo quociente” (Correa, Nunes & Bryant, 1998, p. 321 *apud* Molinari, 2010, p. 33).

Centurión (1994, p. 191, grifo como no original) define a divisão como “[...] dados dois números inteiros, chama-se **divisão exata** entre estes números a operação que nos fornece um terceiro número, que indica quantas vezes o primeiro contém o segundo”. Mais especificamente, Centurión (1994, p. 192) considera que “[...] a divisão está ligada a duas ideias: a ideia de repartir em partes iguais e a ideia de medir, ou seja, a de verificar ‘quantos cabem’”.

¹ Os dados foram obtidos com o trabalho de mestrado. As análises, discussões e referencial teórico foram ampliados para esse artigo.

Resumidamente, a ideia de divisão por partição considera que uma quantidade total será distribuída em um determinado número de partes, com o objetivo de calcular o valor de cada parte. A ideia de divisão por quotição envolve dividir uma quantidade total pelo valor de cada cota, com o objetivo calcular a quantidade de cotas. Dessa forma,

problemas de partição são aqueles nos quais são dados um conjunto maior e o número de partes em que o mesmo deve ser distribuído. O resultado é o valor de cada parte. Já os problemas de quotição, consistem em problemas que são dados o valor do conjunto maior e o valor das quotas em que se deseja dividir o mesmo. O resultado consiste no número de partes obtidas (Oliveira, 2015, p. 39).

Levando em conta o conjunto numérico ao qual a operação está restrita, outras denominações ou expressões relacionadas à divisão podem ocorrer, tais como: “[...] divisão exata, divisão com ou sem resto, quociente inteiro, quociente aproximado por falta ou por excesso, quociente dado como uma aproximação de, etc” (Saiz, 2001, p. 159).

Nos estudos de Vergnaud (2014), os problemas de estruturas multiplicativas, que incluem os de divisão, são categorizados em: comparação multiplicativa; isomorfismo de medidas ou proporção simples; produto de medidas ou produto cartesiano; função bilinear; e proporcionalidade múltipla. De acordo com Gitirana, Campos, Magina e Spinillo (2014), a categoria isomorfismo de medidas ou proporção simples se divide em quatro classes: um para muitos; partição; cota e quarta proporcional.

De modo geral, o ensino de divisão tem ocorrido por meio da apresentação do algoritmo, muitas vezes, de modo incompleto. Não se estabelece uma relação clara entre a operação e os significados que podem ser atribuídos a cada elemento do algoritmo apresentado. Saiz (2001) afirma que o ensino da divisão concentra-se exclusivamente no algoritmo, pois a sua aplicação pode ser facilmente verificada como certa ou errada em uma correção. Assim, fia-se que o ensino das operações, baseado na comunicação de um procedimento de cálculo, associado à resolução de alguns poucos problemas, seja suficiente para atribuir significado ao conceito (Saiz, 2001).

No entanto, isso não é suficiente nem mesmo para a compreensão do algoritmo. Discutir e promover a elaboração de problemas pelos alunos apresenta-se como uma possibilidade de atribuir significado à operação de divisão. Os documentos oficiais têm trazido essa demanda. Particularmente, no que se refere ao 5º ano do Ensino Fundamental, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) traz que o aluno, nessa faixa de escolaridade, deve ter a habilidade de

resolver e elaborar problemas de multiplicação e divisão com números naturais e com números racionais cuja representação decimal é finita (com multiplicador natural e divisor natural e diferente de zero) [...] resolver problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas, para associar a quantidade de um produto ao valor a pagar (Brasil, 2017, p. 295).

Para isso, o aluno deve utilizar estratégias diversas, como o cálculo por estimativa, cálculo mental e não se fixar em apenas um algoritmo. Em relação ao 9º ano, as habilidades que os alunos dessa faixa etária devem ter são: “resolver e elaborar problemas com números reais, inclusive em notação científica, envolvendo diferentes operações” (Brasil, 2017, p. 317).

Já em âmbito estadual, o Referencial Curricular do Paraná: Princípios, Direitos e Orientações, publicado em 2018, destaca que, entre outros aspectos, os alunos do 5º ano devem: “Elaborar e resolver problemas envolvendo mais do que uma operação (números naturais e

racionais), incluindo multiplicação e divisão” (Paraná, 2018, p. 852). Para o 9º ano, o Referencial Curricular do Paraná apresenta apenas as habilidades tratadas na BNCC.

Diante das habilidades almeçadas para os alunos do Ensino Fundamental com relação à operação de divisão, destaca-se a habilidade de elaboração de problemas de divisão exijam mais de uma operação para serem solucionados.

3 A elaboração e apresentação de problemas de divisão

A resolução de problemas tem se mostrado bem aceita como metodologia na área de ensino de conteúdos matemáticos, assim como no campo de pesquisas acadêmicas, seja como estratégia de ensino que busca a aprendizagem ou, simplesmente, como ferramenta para desenvolvimento de teorias. Autores como Andrade (1998), Onuchic (1999), Alevatto e Onuchic (2009) e Onuchic e Alevatto (2011) destacam que a utilização da resolução de problemas nas aulas de Matemática pode potencializar os processos de ensino e aprendizagem, de modo a fortalecer a construção de conceitos matemáticos pelos alunos. Assim,

a razão mais importante para esse tipo de ensino-aprendizagem é a de ajudar os alunos a compreenderem os conceitos, os processos e as técnicas operatórias necessárias dentro das atividades feitas em cada unidade temática [...] e de que o ensino pode ser feito por meio da resolução de problemas (Onuchic & Alevatto, 2011, p. 80).

Embora exista uma variada literatura sobre resolução de problemas, a elaboração de enunciados pelos alunos ainda conta com pouco respaldo acadêmico, apesar de ser considerada uma possibilidade de ensino e aprendizagem. Dante (2010, p. 23) afirma que “parece bastante razoável trabalhar com a formulação e resolução de problemas a fim de fazer emergir e desenvolver características criativas nas crianças”. Segundo Jurado (2015), a elaboração de problemas oferece oportunidades para revisar e exercitar a redação, a ortografia e a criatividade. Logo, os professores “podem contribuir muito para o desenvolvimento das potencialidades criativas de nossos alunos, se desde as primeiras séries da educação inicial e primária os estimularmos a criar problemas, a refletir sobre eles e a resolvê-los” (Jurado, 2015, p. 240, tradução nossa).

Mas elaborar problemas não é uma tarefa simples, pois

requer que o aluno organize o que sabe, de modo a elaborar um texto em forma de enunciado para comunicar o que deseja. Isso requer um controle sobre o texto e sobre as ideias matemáticas, sendo tal atividade um exemplo da aproximação entre Matemática e língua materna (Spinillo *et al.*, 2017, p. 931).

Quanto à língua materna, é possível afirmar que “a língua não é um código, mas um registro de representação semiótica” (Duval, 2011, p. 76), uma vez que, por meio dela, é possível dizer ou escrever qualquer coisa e compreender o que está escrito ou o que o outro quer dizer.

Para Marin, Spinillo e Lautert (2023), é necessário que os professores incentivem os alunos à compreensão de textos e a lidarem com as características linguísticas dos problemas verbais, para “compreender os significados matemáticos incorporados aos padrões linguísticos, e as relações entre a informação conhecida e a desconhecida, e identificar estratégias de solução relevantes” (Marin, Spinillo & Lautert, 2023, p. 12).

No entanto, conforme Jurado (2015, p. 240, tradução nossa), “os professores devem estar cientes que, mesmo para adultos, não é fácil escrever um problema de maneira que realmente expresse o que o autor pensou e que seja compreendido da mesma forma por todos os leitores”. Desse modo, a elaboração de problemas pelos alunos é importante para mobilizar o conhecimento que eles possuem e indicar como comunicam o que sabem.

Possamai e Alevatto (2023, p. 3) afirmam que “o desafio de fazer da proposição de problemas uma atividade frequente nas aulas de Matemática está nos professores aceitarem que planejarão uma atividade sem saber exatamente o que podem esperar dos estudantes”. Além disso, destacam que apoiar os professores com possibilidades de como ensinar Matemática por meio da proposição de problemas deve ser tomado como um fator principal nas pesquisas no que tange à proposição de problemas pelos alunos.

Por outro lado, a literatura apresenta uma diversidade de pesquisas sobre a conceituação e os tipos de problemas, com contribuições de autores como: Krulik e Rudnick (1980); Butts (1997); Ponte, Brocardo e Oliveira (2006); Lorensatti (2009); Dante (2010) e Onuchic e Alevatto (2011). De modo geral, os autores apresentam definição para problema, buscam diferenciar problemas e exercícios e classificam os problemas em tipos.

Para Onuchic e Alevatto (2011),

podem ser encontrados muitos conceitos de *problema* adjetivados, refletindo qualidades específicas que deles se espera: problemas de fixação, exercícios, problemas abertos, problemas fechados, problemas padrão, problemas rotineiros e não rotineiros, quebra-cabeças, desafios, entre outros. Na realidade, são todos problemas, e os adjetivos expressam diferentes tipos de problema que admitem, para sua resolução, diferentes estratégias (Onuchic & Alevatto, 2011, p. 81).

Dante (2010) apresenta a seguinte classificação: exercícios de reconhecimento; exercícios de algoritmos; problemas-padrão; problemas-processo ou heurísticos; problemas de aplicação e problemas de quebra-cabeça”. Para Butts (1997), os problemas podem ser classificados como: exercícios de reconhecimento; exercícios algorítmicos; problemas de aplicação; problemas de pesquisa aberta e situações-problema. E parte dos exercícios apresentados em livros didáticos são aqueles classificados como exercícios algorítmicos, exercícios de reconhecimento e problemas de aplicação, de modo que “o traço característico desses problemas é que seu enunciado contém uma estratégia para resolvê-los. O obstáculo a vencer, então, é traduzir a palavra escrita para uma forma matemática apropriada” (Butts, 1997, p. 35). Assim, o que resta como tarefa aos alunos é encontrar os algoritmos adequados para serem aplicados.

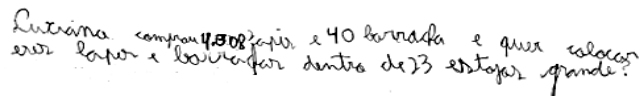
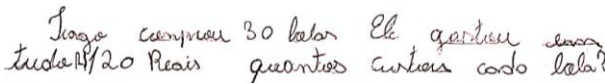
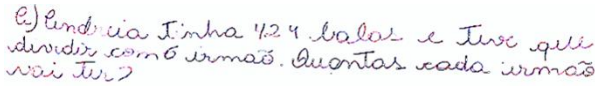
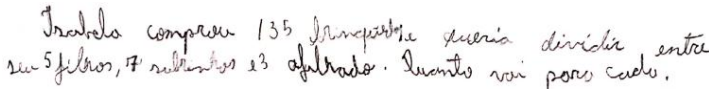
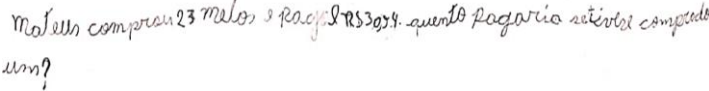
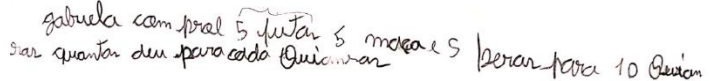
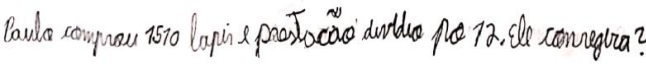
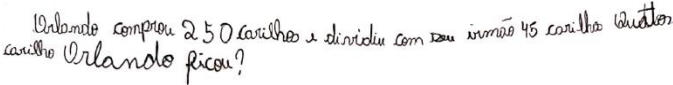
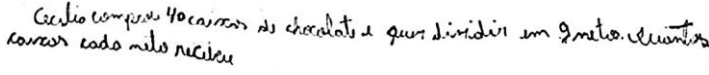
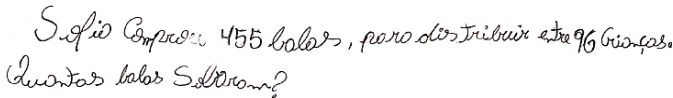
4 As produções escritas dos enunciados elaborados

Os sujeitos da pesquisa foram alunos de uma turma de 5º ano e outra de 9º ano do Ensino Fundamental de duas escolas públicas, municipal e estadual, respectivamente, de uma cidade no interior do Paraná. Optou-se por produzir os dados da pesquisa em dois momentos distintos de escolaridade, a fim de cotejar as produções escritas dos alunos ao elaborarem problemas envolvendo divisão, ao final do Ensino Fundamental I e ao concluir o Ensino Fundamental II. Foi solicitado, em cada uma dessas turmas, que os alunos se organizassem em duplas e que cada uma elaborasse um problema de divisão na folha que receberam, o qual seria resolvido por outra dupla da turma no verso da mesma folha. Dessa forma, os dados foram construídos com a elaboração e a resolução de problemas pelos alunos dessas duas turmas. Ao todo,

participaram 11 duplas do 5º ano e 10 duplas do 9º ano. Neste artigo, foca-se apenas na análise dos enunciados, os quais são apresentados nos quadros 1 e 2.

Com o intuito de agilizar a referência às produções (enunciados dos problemas elaborados pelos estudantes), denominou-se pela sigla E, um número variando de 1 a 11 e /5º para identificar os enunciados produzidos pelo 5º ano. Por exemplo, E6/5º diz respeito ao enunciado escrito pela sexta dupla do 5º ano. A seguir, o Quadro 1 traz as imagens das produções de cada dupla do 5º ano, seguidas da transcrição *ipsis litteris*.

Quadro 1: Enunciados elaborados pelos alunos do 5º ano

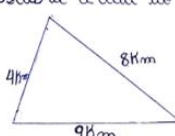
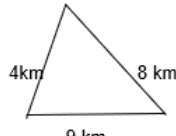
	Imagem do enunciado elaborado	Transcrição
E1/5º		Luciana comprou 4308 lapis e 40 borracha e quer colocar eses lapis e borrachas dentro de 23 estojo grande?
E2/5º		Tiago comprou 30 bolas. Ele gastou em tudo R\$120 Reais quantos custou cada bola?
E3/5º		Andreia tinha 424 balas e teve que dividir com 6 irmãos. Quantas balas cada irmão vai ter?
E4/5º		Isabela comprou 135 brinquedos e queria dividir entre seu 5 filhos, 7 subrinhos e 3 afilhado. Quanto vai para cada.
E5/5º		Mateus comprou 23 melos e pagou R\$30,94. quanto pagaria setivesse comprado um?
E6/5º		Gabriela com prol 5 futas 5 maça e 5 peras para 10 quiansas quantas deu para cada quiansas
E7/5º		Paulo comprou 1.510 lapis e prestação dividio po 12. Ele consegue?
E8/5º		Orlando comprou 250 carilhos e dividiu com seu irmão 45 carilho. Quantos carilho Orlando ficou?
E9/5º		Cecilia comprou 40 caixas de chocolate e quer dividir em 9 netos. Quantos caixas cada neto recebeu
E10/5º		Sofia comprou 455 balas, para distribuir entre 96 crianças. Quantas balas sobraram?
E11/5º		Maria tem 28 balas para distribuir para 20 crianças Ela vai conseguir?

Fonte: Elaborado com base nos dados da pesquisa.

O Quadro 2 traz as produções escritas de cada dupla do 9º ano, seguidas de suas transcrições *ipsis litteris*. Analogamente ao tratado com o 5º ano, denominou-se pela sigla E,

um número variando de 1 a 9 e /9º as produções do 9º ano. Por exemplo, a produção referenciada por E1/9º refere-se ao enunciado escrito pela primeira dupla do 9º ano.

Quadro 2: Enunciados elaborados pelos alunos do 9º ano

	Imagem do enunciado elaborado	Transcrição
E1/9º	Joãozinho tem 1252 carrinhos e ele quer duplicar sua coleção sendo que cada carrinho custa 4 reais. Quanto carrinhos ele vai ter? Quanto vai pagar? Ele vai dividir sua coleção em 20 caixas, quantos carrinhos vai ter em cada caixa? E quanto ele vai pagar em parcelas de 8x?	Joãozinho tem 1252 carrinhos e ele quer duplicar sua coleção sendo que cada carrinho custa 4 reais. Quanto carrinhos ele vai ter? Quanto vai pagar? Ele vai dividir sua coleção em 20 caixas, quantos carrinhos vai ter em cada caixa? E quanto ele vai pagar em parcelas de 8x?
E2/9º	Sabrina foi na feira e comprou 5 laranja, 7 melão, 10 limão e 5 cenoura. sendo que cada laranja custa 50 centavos, os melão 75 os limão 25 e as cenouras 40 quanto foi o total que ela pagou?	Sabrina foi na feira e comprou 5 laranja, 7 melão, 10 limão e 5 cenoura. Sendo que cada laranja custa 50 centavos os melão 75 os limão 25 e as cenouras 40 quanto foi o total que ela pagou?
E3/9º	João comprou 20 balas, e teve que dividir entre seus 5 irmãos. Quantas balas cada um ficou?	João comprou 20 balas, e teve que dividir entre seus 5 irmãos. Quantas balas cada um ficou?
E4/9º	Julia tinha R\$ 6565,00, para dividir com seus 5 irmãos. Quantos reais deu para cada?	Julia tinha R\$ 6565,00, para dividir com seus 5 irmãos. Quantos reais deu para cada?
E5/9º	Mario tem 4 bombons Paulo tem o triplo de bombons de Mario. E eles irão juntar essa quantia de doces para distribuir a 4 crianças. Sabendo disso quantos bombons cada criança irá receber?	Mario tem 4 bombons Paulo tem o triplo de bombons de Mario. E eles irão juntar essa quantia de doces para distribuir a 4 crianças. Sabendo disso quantos bombons cada criança irá receber?
E6/9º	Sophia participou de uma gincana no qual venceu doze brincadeiras. Cada brincadeira valia vinte e quatro ponto nos quais seriam trocados por balas. Quando chegou em casa Sophia ficou com $\frac{1}{3}$ das balas e dividiu o restante entre seus dois irmãos. Quantas balas cada irmão recebeu???	Sophia participou de uma gincana na qual venceu doze brincadeiras. Cada brincadeira valia vinte e quatro ponto nos quais seriam trocados por balas. Quando chegou em casa Sophia ficou com $\frac{1}{3}$ das balas e dividiu o restante entre seus dois irmãos. Quantas balas cada irmão recebeu?
E7/9º	Maria comprou um pacote de bombons, neste pacote continha 45 bombons, sua intenção era dividir estes bombons com suas 5 amigas. Quantos bombons cada amiga ganhou?	Maria comprou um pacote de bombons, neste pacote continha 45 bombons, sua intenção era dividir estes bombons com suas 5 amigas. Quantos bombons cada amiga ganhou?
E8/9º	Descubra a área do sítio de Edmilson. 	Descubra a área do sítio de Edmilson. 

E9/9º	Em uma fruteira há 10 maçã, 27 bananas, 15 laranjas 5 caixas de uva, com 15 cada uma, 18 melancias 2 melões, 5 morangos, 34 caju, 21 kiwi e 1 abacaxi. João comeu $\frac{1}{2}$ desse número de frutas, e sua irmã comeu a metade do que sobrou. Quantas frutas João comeu? E sua irmã? E sobrou quantas?	Em uma fruteira há 10 maçã, 27 bananas, 15 laranjas 5 caixas de uva, com 15 cada uma, 18 melancias, 2 melões, 5 morangos, 34 caju, 21 kiwi e 1 abacaxi. João comeu $\frac{1}{2}$ desse número de frutas, e sua irmã comeu a metade do que sobrou. Quantas frutas João comeu? E sua irmã? E sobrou quantas?
E10/9º	Sabe o número 729, cinco vezes pelo mesmo número (primo), até chegar nele mesmo (o número que está dividindo)	Fatore o número 729, cinco vezes pelo mesmo número (primo), até chegar nele mesmo (o número que está dividindo)

Fonte: Elaborado com base nos dados da pesquisa.

De posse dos materiais constituídos por enunciados dos problemas envolvendo a operação de divisão elaborados por alunos do 5º e do 9º ano (quadros 1 e 2), as produções foram lidas, interpretadas, organizadas, buscando-se identificar suas características, convergências e peculiaridades, com base em inferências a partir dos indícios colhidos nos registros. O processo de organização, interpretação e inferência baseia-se na análise da produção escrita, conforme descrita por Santos (2008) e Buriasco, Ferreira e Ciani (2009).

Uma análise da produção escrita dos alunos possibilita a obtenção de diversas informações, entre elas, identificar como os alunos lidam com a elaboração de questões de Matemática e quais conhecimentos matemáticos mobilizam. É preciso ter em mente que a análise da produção escrita possibilita dizer algo sobre o que o aluno fez, e não sobre o que ele não fez, como alerta Santos (2008).

Após o processo de leitura, descrição, interpretação e inferências sobre as produções escritas dos alunos, emergiram os agrupamentos dessa análise, relacionados aos tipos de problemas elaborados; à possibilidade de serem resolvidos; e ao modo que as linguagens materna, simbólica e numérica foram mobilizadas.

O Quadro 3 apresenta uma visualização dos agrupamentos produzidos, possibilitando observar características, semelhanças e peculiaridades identificadas nos dois níveis de escolaridade.

Quadro 3: Agrupamentos referentes às elaborações do 5º e do 9º ano

Agrupamentos		Produção do 5º ano	Produção do 9º ano
A pergunta se refere ao resto da divisão		E10/5º	E9/9º
Apresenta números não inteiros		E5/5º	E2/9º, E6/9º e E9/9º
Envolvem proporção simples – partição		E1/5º, E3/5º, E4/5º, E6/5º, E7/5º, E9/5º, E10/5º e E11/5º	E1/9º, E3/9º, E4/9º, E5/9º, E6/9º, E7/9º e E9/9º
Não apresenta um problema de divisão		E8/5º	E2/9º
Desconsidera que na divisão de grandezas discretas o resultado é inteiro		E1/5º, E3/5º, E9/5º e E11/5º	E1/9º
Tipos de problemas	Problemas-padrão simples	E2/5º, E3/5º, E5/5º, E7/5º, E8/5º, E9/5º, E10/5º e E11/5º	E3/9º, E4/9º e E7/9º
	Problemas-padrão compostos	E1/5º, E4/5º e E6/5º	E1/9º, E2/9º, E5/9º, E6/9º, E8/9º, E9/9º e E10/9º
Utilização de palavras que fazem referência direta à operação de divisão		E3/5º, E4/5º, E7/5º, E8/5º, E9/5º, E10/5º e E11/5º	E1/9º, E3/9º, E4/9º, E5/9º, E6/9º e E7/9º
A pergunta não depende de um cálculo para ser respondida		E11/5º	

Conhecimentos adquiridos após o 5º ano	E8/9º e E10/9º
--	----------------

Fonte: Elaborado com base nos dados da pesquisa.

Como é possível visualizar no Quadro 3, as características das produções que compõem os sete primeiros agrupamentos foram identificadas tanto nas produções das duplas de alunos do 5º ano quanto nas produções do 9º ano. O penúltimo agrupamento se refere somente ao 5º ano, e o último apenas ao 9º ano.

A seguir, discute-se sobre os agrupamentos construídos e analisa-se os resultados.

4.1 A pergunta se refere ao resto da divisão

Este agrupamento contempla os enunciados de problemas nos quais a pergunta final do problema se refere ao resto da divisão, e não ao quociente, como é mais rotineiro. Esse fato foi identificado em dois enunciados: E10/5º e E9/9º.

O enunciado E10/5º, do 5º ano, foi finalizado com a interrogação: *Quantas balas sobraram?*. Esta pergunta refere-se ao valor a ser encontrado após a divisão de 455 balas entre 95 crianças, em quantidades iguais. Já o enunciado E9/9º, do 9º ano, apresentou três perguntas e foi inserido nesse agrupamento porque uma das perguntas *e quantas sobrou*, relaciona-se às frutas que não foram comidas nem por João nem por sua irmã.

Segundo Cruz e Teles (2020, p. 12), “[...] o resto em uma divisão gera muita dificuldade por parte dos alunos, e o correto tratamento dado ao mesmo depende dos conhecimentos utilizados”.

As poucas produções desse agrupamento reforçam a suposição de que enunciados que problematizam sobre o resto de uma divisão não são os mais utilizados em salas de aula, pois, em geral, a problematização gira em torno de se obter o valor do quociente.

4.2 Apresenta números não inteiros

Este agrupamento contempla os enunciados de problemas que contêm números racionais na forma decimal e fracionária. Entre os onze enunciados elaborados pelas duplas de alunos do 5º ano, apenas a produção escrita E5/5º apresenta números racionais. Já entre as dez produções de enunciados do 9º ano, três apresentaram números racionais, são elas: E2/9º, E6/9º e E9/9º.

O enunciado E5/5º contém R\$ 30,94 para representar o valor a ser pago pelos 23 melões comprados. Logo, para a resolução do problema proposto, deveria ser realizada a operação de divisão para encontrar o valor pago por cada melão, ou seja, um valor aproximado de R\$ 1,34, que seria um número racional na forma decimal.

O enunciado E2/9º apresenta, aparentemente, apenas números naturais, trazendo o texto [...] *cada laranja custa 50 centavos os melão 75 os limão 25 e as cenouras 40* [...]. Porém, ao interpretar a produção escrita, seu significado traz o registro do valor monetário de cada fruta e legume, embora com valores inteiros, mas envolvendo centavos de reais. Assim, o trecho pode ser interpretado e reescrito como: [...] *cada laranja custa R\$ 0,50, cada melão R\$ 0,75, cada limão R\$ 0,25 e cada cenoura R\$ 0,40* [...]. Dessa forma, os valores são números decimais.

Já as duplas E6/9º e E9/9º apresentam, em seus enunciados, números fracionários ao descreverem a quantidade de balas com que Sophia ficou após participar de uma gincana e trocar os pontos por balas e, também, para descrever a quantidade de frutas que João comeu, respectivamente. Nesses dois enunciados, apareceram as frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$, o que é comum nos problemas presentes em livros escolares, mas não no vocabulário das crianças para tratar de

situações do dia a dia. Por exemplo, ao invés de utilizar a fração $\frac{1}{2}$ é mais comum o uso da palavra metade.

A natureza dos números: natural, inteira, decimal, fracionária ou irracional, é um exemplo de variável didática. A variável didática “[...] de um problema ou situação é uma variável cujos **valores podem ser alterados pelo professor** e cujas modificações podem provocar sensivelmente o comportamento dos alunos em termos de aprendizagem, assim como provocar procedimentos ou tipos de resposta distintos” (Almouloud, 2016, p. 121, grifos do autor). No caso dos dados desta pesquisa, a natureza dos números foi escolhida pelas duplas de alunos que elaboraram os enunciados apresentados.

A escolha dos números decimais para representar as unidades monetárias e fracionárias para indicar as partes das frutas ou das balas, fez com que os enunciados ganhassem um nível de dificuldade maior em relação aos elaborados com números naturais apenas. O interessante é que o nível de dificuldade foi mediado pelos próprios alunos, e não pela professora.

Pode-se dizer que foi atingido o que se espera de alunos do 5º ano que é resolver operação de divisão envolvendo um número racional com divisor natural, de modo contextualizado (Brasil, 2017; Paraná, 2018).

4.3 Envolvem proporção simples - partição

Este agrupamento contempla os enunciados de problemas que, segundo Gitirana *et al.* (2014, p. 60), são classificados como do tipo proporção simples e pertencem à subclasse partição ou de distribuição, em que “a divisão está articulada ao significado de distribuir ou de partilhar”, ou seja, “quando o valor correspondente a certa quantidade é conhecido e o que se busca é o valor correspondente à unidade” (Gitirana *et al.*, 2014, p. 58).

Entre as onze produções de enunciados do 5º ano, dez são desse tipo, são elas: E1/5º, E2/5º, E3/5º, E4/5º, E5/5º, E6/5º, E7/5º, E9/5º, E10/5º e E11/5º. Entre as dez do 9º ano, sete pertencem a essa classe de problemas: E1/9º, E3/9º, E4/9º, E5/9º, E6/9º, E7/9º e E9/9º. Em todos esses enunciados, tanto do 5º quanto do 9º ano são apresentados um conjunto maior e o número de partes nas quais o conjunto maior deve ser distribuído, buscando identificar o valor de cada parte, por exemplo, o enunciado elaborado por E3/9º, *João comprou 20 balas, e teve que dividir entre seus 5 irmãos. Quantas balas cada um ficou?*

Os problemas de divisão do tipo *partição* têm sido bem explorados, como é possível observar em estudos como os de Soppelsa (2016), Oliveira (2015), Gitirana *et al.* (2014) e de Lautert e Spinillo (2002). Estas últimas autoras mencionadas discutem a ideia de partição e outras que perpassam os problemas escolares de divisão, apontando que

a literatura mostra que problemas de partição são mais fáceis [...]. Uma das explicações para isto é que a noção inicial que a criança tem sobre a divisão, derivada das experiências sociais, é a de repartir um todo em partes iguais até que este todo se esgote. As noções sobre a divisão decorrem da idéia de distribuir, como evidenciam inúmeros estudos [...]. A ação de compartilhar baseia-se na idéia de distribuir quantidades iguais entre cada receptor a partir da correspondência um-a-um para cada conjunto, até que se esgotem os elementos a serem distribuídos ou que reste um número insuficiente de elementos para continuar a distribuição (no caso de haver resto). Importante ressaltar que esta idéia (*sic*) corresponde ao princípio envolvido nos problemas de partição (Lautert & Spinillo, 2002, p. 238-239).

Soppelsa (2016, p. 5) considera que “o modelo partitivo seja mais natural para o aluno, uma vez que se utiliza com grande frequência desse modelo em suas ações práticas de divisão

[...]”, como para associar a quantidade de um produto ao valor a pagar, exemplificado no texto da BNCC. De acordo com o que consta nesse documento, espera-se que, no 5º ano, os alunos sejam capazes de resolver problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas (Brasil, 2017).

Esse foi o agrupamento que mais teve similaridades: foram dezessete produções identificadas durante a análise dos dados, corroborando o que afirmam as pesquisas mencionadas.

4.4 Não apresenta um problema de divisão

Neste agrupamento, destaca-se o fato de que foi solicitado que as duplas de alunos elaborassem um problema que envolvesse a operação de divisão. No entanto, durante as análises das produções, identificou-se que o enunciado E8/5º, do 5º ano, e o E2/9º, do 9º ano não contemplaram a proposta solicitada. No enunciado E8/5º – *Orlando comprou 250 carrinhos e dividiu com seu irmão 45 carrinhos. Com quantos carrinhos Orlando ficou?* –, o trecho *dividiu com seu irmão* traz o significado de *deu a seu irmão*. Nesse caso, a palavra *dividiu* foi empregada com o significado de compartilhar, repartir, partilhar, mas não em partes necessariamente iguais.

Todavia, nenhuma das duas duplas que resolveram esses problemas relataram que não se tratava de problemas de divisão, o que se mostrou curioso. Destaca-se que a dupla resolvidora do problema E8/5º, do 5º ano, realizou a operação que julgava necessária para a resolução. Porém, a situação descrita pelo enunciado do problema necessitava de uma operação de subtração para obter a solução. Inferiu-se que a dupla apenas identificou os valores numéricos e a palavra-chave *dividiu*, e aplicou o algoritmo da divisão.

Segundo Gitirana *et al.* (2014, p. 119) “em diversas ocasiões, as resoluções adotadas pelos estudantes são fortemente marcadas pela linguagem presente no enunciado do problema – o que pode provocar erros”. Dessa forma, compreende-se que, possivelmente, a dupla resolvidora do 5º ano, ao ler o enunciado do problema e identificar a palavra que fazia referência à operação de divisão, executou o algoritmo, sem de fato notar que a questão seria resolvida por outra operação.

Já a dupla do 9º ano que resolveu o problema elaborado pela dupla E2/9º executou corretamente todos os cálculos que foram solicitados no enunciado, que envolviam multiplicações e adições, mas não a operação de divisão.

4.5 Desconsidera que na divisão de grandezas discretas o resultado é inteiro

Este agrupamento contempla os enunciados de problemas de divisão elaborados pelas duplas de alunos, nos quais não foram considerados no momento da elaboração, que determinados objetos não podem ser repartidos sem perderem suas características, permanecendo íntegros, como é o caso de lápis e carrinhos, por exemplo. As quantidades registradas nos enunciados, após uma divisão exata, não resultam em uma quantidade inteira.

Esse aspecto foi identificado nos enunciados E1/5º, E3/5º, E9/5º e E11/5º, do 5º ano, e E1/9º, do 9º ano. Os enunciados do 5º ano apresentaram números que, ao serem divididos, não resultaram em resto zero, por exemplo, 4308 lápis e 40 borrachas em 23 estojos, e 28 balas entre 20 crianças. Essas divisões apresentam como resto um número menor que o dividendo, não sendo possível realizar uma nova distribuição dos objetos (balas, lápis, borrachas) em partes inteiras iguais. Ao efetuar a divisão 40 por 23, por exemplo, em cada estojo haveria uma

borracha e sobrariam 17 borrachas, as quais se fossem cortadas e distribuídas seriam partes de borrachas.

Da mesma forma, o enunciado E1/9º, elaborado por uma dupla do 9º ano, considerava que Joãozinho tem 1252 carrinhos em sua coleção, e ao dobrar esse número como ele desejava, obteria 2504 carrinhos. Entretanto, com a informação *Ele vai dividir sua coleção em 20 caixas, quantos carrinhos vai ter em cada caixa?*, inferiu-se que a dupla não se deu conta de que, ao se dividir 2504 por 20, sobraria o resto 4, de modo que esses quatro carrinhos restantes não poderiam ser divididos, pois deixariam de ser carrinhos inteiros.

É importante destacar que as quatro duplas do 5º ano, que resolveram as situações que compõem esse agrupamento, erraram na resolução do algoritmo ou na escolha do algoritmo, mas não dividiram o resto que encontraram. Já a dupla do 9º ano, ao resolver a situação proposta, continuou com a divisão do resto até obter resto zero, desconsiderando que se tratava de uma grandeza discreta.

4.6 Tipos de problemas

Este agrupamento contempla os enunciados que, para a resolução, é necessária a aplicação de algoritmos já aprendidos anteriormente, não exigindo qualquer tipo de estratégia em suas resoluções, ou seja, “a tarefa básica é transformar a linguagem usual em linguagem matemática, identificando as operações ou algoritmos necessários para resolvê-lo” (Dante, 2010, p. 25). São os problemas que Butts (1997, p. 34) classifica como de aplicação, que incluem os problemas que, para serem resolvidos, requerem a sua formulação simbolicamente e depois a manipulação dos símbolos por meio de algoritmos diversos.

Ainda de acordo com Dante (2010, p. 25), “o objetivo desses problemas é recordar e fixar os fatos básicos por meio dos algoritmos das quatro operações fundamentais, além de reforçar o vínculo existente entre essas operações e seu emprego nas situações do dia a dia”. Os enunciados do tipo problemas-padrão podem ser divididos em duas categorias: i) problemas-padrão simples e ii) problemas-padrão composto, os quais são listados a seguir.

4.6.1 Problemas-padrão – simples

Este agrupamento contempla os enunciados de problemas de divisão elaborados pelas duplas de alunos de ambos os anos, nos quais era necessário realizar apenas uma operação para a resolução do problema proposto. Dentre os onze enunciados do 5º ano, oito são enunciados desse tipo: E2/5º, E3/5º, E5/5º, E7/5º, E8/5º, E9/5º, E10/5º e E11/5º. Dentre os dez do 9º ano, três enunciados pertencem a essa classe de problemas: E3/9º, E4/9º e E7/9º.

Com relação à quantidade de operações envolvidas em problemas-padrão simples, pode-se considerar que “[...] se a solução do problema envolve apenas uma operação, ele é mais simples do que aqueles que requerem duas ou mais operações” (Dante, 2010, p. 55). Dessa forma, é preciso que o resolvidor apenas retire do enunciado as informações necessárias para o desenvolvimento de um único algoritmo, obtendo o resultado de forma consideravelmente mecânica.

4.6.2 Problemas-padrão – compostos

Este agrupamento contempla os enunciados de problemas de divisão elaborados pelas duplas de alunos de ambos os anos, nos quais eram necessárias duas ou mais operações para a resolução, independentemente de serem operações de divisão. Três enunciados do 5º ano, E1/5º, E4/5º e E6/5º, envolviam mais de uma operação para a resolução. Já no 9º ano, sete enunciados

revelaram a necessidade de se realizar mais que uma operação para resolver o problema proposto, são eles: E1/9º, E2/9º, E5/9º, E6/9º, E8/9º, E9/9º e E10/9º.

Após a análise, pode-se inferir que todos os enunciados mencionados foram elaborados visando a necessidade da aplicação de mais de uma operação para a sua resolução. Mas houve variação na quantidade e no tipo de operações envolvidas. O enunciado E4/5º, por exemplo, descreve-se a necessidade de se realizar duas operações: adicionar a quantidade de pessoas (filhos, sobrinhos e afilhados) e dividir a quantidade de brinquedos entre as pessoas. Já o enunciado E1/9º envolve a realização de quatro operações: duplicar a quantidade de carrinhos; identificar quanto se pagará pelos carrinhos novos; dividir o novo total de carrinhos por 20 caixas e identificar qual o valor a ser pago em cada uma das oito parcelas.

Embora estejam classificados no mesmo agrupamento, o tipo e a quantidade de operações necessárias para resolver os respectivos problemas não foram idênticos. Dos três enunciados do 5º ano classificados nesse agrupamento, dois envolviam uma adição e, na sequência, uma divisão: E4/5º e E6/5º. O outro, E1/5º, envolvia duas divisões. Então, foram no máximo duas operações envolvidas em cada caso, sendo elas adição e divisão.

Já no 9º ano, dos dez enunciados produzidos, em sete eram necessários mais de uma operação. Mas a adição apareceu em apenas um deles. Nos demais, foram operações envolvendo multiplicação e divisão. No enunciado E1/9º, duas multiplicações e duas divisões; no E2/9º, não houve divisão, mas quatro multiplicações e uma adição; nos problemas E5/9º, E6/9º e E8/9º, uma multiplicação e uma divisão; E9/9º envolveu no seu enunciado uma multiplicação, uma adição e duas divisões e o E10/9º envolveu seis divisões (fatoração por 3).

Esse agrupamento mostra que os alunos, tanto do 5º quanto do 9º ano, por meio de suas produções escritas, demonstraram que alcançaram os objetivos apresentados no Referencial Curricular do Paraná, o qual descreve que os alunos devem ser capazes de elaborar e resolver problemas que envolvam mais que uma operação, destacando a multiplicação e a divisão e, também, que utilizem números naturais e racionais.

É importante destacar que, mesmo sendo a minoria das duplas do 5º ano que propuseram problemas que necessitavam da realização de mais de uma operação para serem resolvidos, os objetivos destacados no documento paranaense foram alcançados. Isso ficou explícito de modo mais expressivo nas produções escritas das duplas de 9º ano, o que é um indício de que os alunos estão se apropriando das habilidades matemáticas estabelecidas para esse ano escolar.

Destaca-se também o fato de que os enunciados elaborados que remetem à fatoração e ao cálculo da área de um triângulo, apesar de diferirem dos demais, ainda estão contemplados na categoria denominada por Butts (1997) de problemas de aplicação, por serem problemas que requerem a formulação do enunciado simbolicamente e pela necessidade da manipulação de símbolos envolvendo algoritmos.

4.7 Utilização de palavras que fazem referência direta à divisão

Na análise das produções escritas dos enunciados dos problemas, buscou-se identificar palavras que faziam referência à operação a ser executada para a resolução do problema elaborado.

Como de antemão foi solicitado que os alunos elaborassem problemas de divisão, essa busca resultou na identificação de 13 enunciados contendo as palavras dividir, dividiu e distribuir, consideradas como uma referência direta à divisão. No Quadro 4, a seguir, estão listadas as palavras e as duplas que as utilizaram, sendo sete, das onze, do 5º ano e seis, das dez, do 9º ano.

Quadro 4: Palavras utilizadas pelas duplas para fazer referência à operação de divisão

Palavras utilizadas	Produções do 5º ano	Produções do 9º ano
Distribuir	E10/5º, E11/5º	E5/9º
Dividir e dividiu	E3/5º, E4/5º, E7/5º, E8/5º, E9/5º	E1/9º, E3/9º, E4/9º, E6/9º, E7/9º

Fonte: Elaborado com base nos dados da pesquisa.

Esses enunciados deixaram explícita a necessidade da operação a ser utilizada para a resolução do problema. É expressiva a quantidade – a maioria, 13 de um total de 21 – de enunciados que trazem uma palavra-chave que remete diretamente à operação de divisão.

De acordo com Nehring (2001), a organização de um texto resulta da interação entre o conhecimento descrito e as estratégias consideradas: “Duval (1995, p. 326) chama, respectivamente, estes dois níveis de descrições de **conteúdo cognitivo do texto e organização redacional**” (Nehring, 2001, p. 57, grifo como no original).

as formas diferentes de dizer algo no texto ligam-se intrinsecamente às variações redacionais, possíveis de serem realizadas, considerando-o como algo em transformação. Estas variações dependem das situações e dos objetos aos quais a semântica e o conteúdo cognitivo se referem [...] (Nehring, 2001, p. 60).

Pode-se inferir que, as duplas de alunos utilizaram palavras que faziam referência à operação de divisão para facilitar a interpretação do enunciado pela dupla que resolveria o problema ou, simplesmente, por considerarem que, para que o enunciado estivesse completo, fosse necessária a indicação de valores para o divisor e dividendo e mais uma palavra indicando tratar-se de uma divisão. Problemas com todos esses elementos são os mais comuns em sala de aula.

4.8 A pergunta não depende de um cálculo para ser respondida

Este agrupamento foi construído com base na análise do enunciado elaborado por uma dupla de alunos do 5º ano, E11/5º apenas. Destaca-se que a pergunta final do problema, *Ela vai conseguir?*, busca saber se a ação de distribuir seria possível, não havendo necessidade de apresentar um cálculo numérico para respondê-la. É possível inferir que distribuir foi tomado como sinônimo de dividir, no enunciado. Assim, considerando os valores apresentados, identifica-se que Maria conseguiria dividir 28 balas entre 20 crianças, uma vez que 28 é maior que 20, logo, cada criança receberia, pelo menos, uma bala e, ainda, sobriam oito, não sendo preciso a realização de operações para responder à pergunta proposta.

4.9 Conhecimentos adquiridos após o 5º ano

Este agrupamento se refere aos enunciados elaborados por duas duplas de alunos do 9º ano apenas, E8/9º e E10/9º. Neles, aparecem contemplados conhecimentos adquiridos nos últimos quatro anos da sua vida escolar, a saber: o cálculo de área de um triângulo e a fatoração de um número.

O enunciado elaborado pela dupla E8/9º envolve o cálculo da área de um triângulo, apresentando um triângulo que *representa o sítio de Edmilson* e solicita que a dupla resolvedora encontre a área do sítio/triângulo. A dupla elaboradora relatou que o objetivo era que os colegas, ao calcularem a área do triângulo, usassem a fórmula $(\frac{b \times h}{2})$, em que *b* é a base e *h* a altura do triângulo. Como esse cálculo envolve dividir valores, um produto por 2, consideraram que estariam propondo um problema de divisão. Porém, o desenho apresentado, um triângulo

qualquer, dificultou a resolução, pois a altura não era fornecida, mas era necessário que fosse encontrada primeiro a altura relativa a um dos lados do triângulo. Vale ressaltar que os alunos não mencionaram que seria possível resolver o problema utilizando a fórmula de Heron ou inscrevendo uma circunferência no triângulo.

A análise dessa produção revelou, ainda, além do registro de representação em linguagem materna, a utilização do registro figural e do registro numérico.

Segundo Gitirana *et al.* (2014, p. 113) “o aluno deve ser sempre estimulado a usar simultaneamente, de forma combinada ou alternativa, diferentes sistemas de representação em sala de aula”, principalmente pelo fato de que os objetos matemáticos não são palpáveis e visíveis como ocorre em outras áreas do conhecimento.

O enunciado E10/9º envolve fatoração, solicitando que se fatorasse 5 vezes pelo mesmo número (primo). É possível inferir que o verbo fatorar é tomado também com o significado de dividir. Considerando que fatorar é escrever um número como uma multiplicação de números naturais na qual todos os fatores são primos, era, de fato, necessário dividir o número 729 cinco vezes, como indicado no enunciado, pelo número procurado. Nesse caso, além de buscar o quociente das divisões, que se transformava em dividendo da divisão seguinte, era necessário também encontrar o divisor, que era o 3 em todas elas, o tal número procurado, inferido como resposta do problema.

Não é comum encontrar problemas escolares que solicitam o divisor ou o dividendo. No entanto, nesse caso, os alunos que propuseram o problema conseguiram isso! Eles foram além do que se esperava, provavelmente pelo fato de não se utilizarem de uma situação rotineira envolvendo problemas escolares de divisão. Pode-se afirmar que foram criativos e que incorporaram, na sua elaboração, conhecimentos adquiridos depois do 5º ano.

4.10 Algumas análises

Verificou-se que, em relação à elaboração dos 21 enunciados, houve uma quantidade expressiva de convergências entre os enunciados produzidos pelos alunos do 5º e do 9º ano, uma vez que, dos nove agrupamentos, sete foram comuns às turmas.

Sobre a natureza dos números envolvidos nos enunciados, concluiu-se que dez enunciados elaborados pelo 5º ano e sete enunciados elaborados pelas duplas do 9º ano utilizaram números naturais. No entanto, uma dupla do 5º ano e três duplas do 9º ano apresentaram números racionais, na forma decimal ou fracionária, em suas elaborações. Esse fato pode ser considerado como indicativo de trabalhos/ações a serem desenvolvidas em sala de aula, uma vez que, com o passar do desenvolvimento escolar, esperava-se identificar mais enunciados envolvendo números racionais nas produções dos alunos do 9º ano.

Com relação aos tipos de grandezas envolvidas nos enunciados elaborados, identificou-se que nove duplas do 5º ano e seis do 9º ano utilizaram grandezas discretas, como frutas, bombons, balas e carrinhos. Duas duplas do 5º ano utilizaram valores monetários, uma dupla do 9º ano descreveu que as medidas do sítio seriam calculadas em quilômetros (km) e três apresentaram valores monetários, utilizando grandezas contínuas.

Ainda referente aos enunciados elaborados, apenas três problemas, dos onze elaborados pelas duplas do 5º ano, apresentaram números que resultaram em resto zero. Sete problemas continham números que resultaram em resto diferente de zero e um problema não era de divisão. Já no 9º ano, dos dez enunciados elaborados, seis resultavam em resto zero, dois em resto diferente de zero e dois enunciados não eram de divisão.

Como foram os próprios alunos que elaboraram os problemas, eles usaram os elementos que julgaram suficientes para que a outra dupla pudesse interpretar o enunciado e, conseqüentemente, resolver o problema. Foi predominante o uso da língua materna, mas também foi utilizada a linguagem numérica e simbólica.

Os alunos não se mostraram preocupados com os valores numéricos escolhidos, se a divisão seria exata ou não, se haveria resto, se o contexto do problema admitiria deixá-lo, ou se seria necessário continuar a divisão. Embora fosse importante, ao se formular os problemas, que os alunos tivessem antecipado os resultados e os procedimentos de resolução, já que “elaborar problemas requer uma mudança na maneira como se lida com a situação-problema: há um deslocamento do papel daquele que resolve para o papel daquele que formula o problema” (Spinillo *et al.*, 2017, p. 933).

Destaca-se que em ambas as turmas investigadas, a maioria das duplas elaborou enunciados de problemas de partição, dez do 5º ano e sete do 9º ano. Isso aconteceu, possivelmente, pelo fato de serem problemas com os quais os alunos já estão habituados a lidar, antes de serem apresentados aos conhecimentos formais de divisão e seus algoritmos, uma vez que “crianças, mesmo antes da instrução formal, conseguem solucionar situações-problema com a ideia de divisão” (Barcellos, 2017, p. 28). Também pode-se especular que esse é o tipo de problema mais comum nos livros didáticos, tratando-se de divisão nos Anos Iniciais, como apontam os trabalhos de Soppelsa (2016), Oliveira (2015) e Lautert e Spinillo (2002), entre outros.

Pode-se concluir, quanto à elaboração dos problemas envolvendo a operação de divisão, que não houve variação expressiva em relação às características dos enunciados elaborados pelos alunos do 5º e do 9º ano. E, os problemas elaborados por duas duplas do 9º ano, que utilizaram os conceitos de fatoração e de área do triângulo, exemplificam que conhecimentos adquiridos entre o 5º e o 9º anos foram incorporados pelos alunos ao proporem seus enunciados.

5 Considerações finais

Considerando o objetivo de discutir o que se mostra da elaboração de problemas de divisão por alunos de um 5º e um 9º ano do Ensino Fundamental, identificou-se que a maioria dos enunciados são classificados como problemas de partição, o que era de se esperar, já que são considerados os mais comuns nos livros didáticos e nas salas de aula, que, de modo geral focam na aplicação de algoritmos aprendidos anteriormente, como destacou Dante (2010). No entanto, alguns problemas fugiram desse padrão, como os que buscavam encontrar o resto da divisão.

Em relação à natureza dos números envolvidos nos enunciados, concluiu-se que, no 9º ano, os números racionais, em sua forma fracionária e decimal, foram pouco utilizados, prevalecendo os números naturais. No entanto, foi um pouco mais do que o encontrado no 5º ano, no qual apenas um enunciado trouxe um número decimal no contexto monetário. Esperava-se identificar mais enunciados envolvendo números para além dos naturais nas produções dos alunos do 9º ano.

Essa investigação indicou que os conhecimentos de divisão expressos nos enunciados não se alteraram de maneira significativa do 5º para o 9º ano, um indício de que os conhecimentos de divisão não se alteram ao longo da escolaridade no Ensino Fundamental. Isso faz refletir se o que se aprende sobre divisão até o 5º ano é suficiente para o sujeito lidar com a divisão até completar o processo de escolarização e na vida profissional. Além disso, indagar quais conhecimentos e ações poderiam contribuir para um desenvolvimento contínuo do aluno

em relação à aprendizagem da divisão depois do 5º ano. Esses são aspectos que podem ser investigados em trabalhos futuros.

Dessa forma, os resultados podem ampliar compreensões e reflexões em relação ao ensino e à aprendizagem de divisão pelos alunos no Ensino Fundamental e contribuir com pesquisas que investigam o ensino e aprendizagem da divisão.

Referências

- Allevato, N. S. G. & Onuchic, L. La R. (2009). Ensinando Matemática na sala de aula através da Resolução de Problemas. *Boletim GEPEM*, 33(55), 1-19.
- Almouloud, S. A. (2016). Modelo de ensino/aprendizagem baseado em situações-problema: aspectos teóricos e metodológicos. *Revemat*, 11(2), 111-141.
- Andrade, S. (1998). *Ensino-aprendizagem de matemática via resolução, exploração, codificação e decodificação de problemas e a multicontextualidade da sala de aula*. 1998. 325f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, SP.
- Barcellos, J. S. (2017). *Esse é mais difícil por causa das palavras: uma investigação psicolinguística acerca do papel da linguagem na resolução de problemas matemáticos de divisão*. 2017. 178 f. Dissertação (Mestrado em Estudos da Linguagem). Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, RJ.
- Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. (2017). *Base Nacional Comum Curricular: Educação Infantil e Ensino Fundamental*. Brasília, DF: MEC/SEB.
- Buriasco, R. L. C., Ferreira, P. E. A. & Ciani, A. B. (2009). Avaliação como prática de investigação (alguns apontamentos). *Bolema*, 22(33), 69-96.
- Butts, T. (1997). Formulando Problemas Adequadamente. In: S. Krulik & R. E. Reys. *A resolução de problemas na Matemática escolar*. (pp. 32-48). São Paulo, SP: Atual.
- Cara, D. G. P. (2020). *Uma análise sobre a elaboração e resolução de problemas de divisão por alunos do 5º e 9º ano do ensino fundamental*. 2020. 185f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Educação Matemática). Universidade Estadual do Oeste do Paraná. Cascavel, PR.
- Centurión, M. (1994). *Números e operações: conteúdo e metodologia da matemática*. São Paulo, SP: Scipione.
- Chica, C. H. R. (2001) Por que formular problemas? In: K. S. Smole & M. I. Diniz (Org.). *Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender Matemática*. (pp. 151-173). Porto Alegre, RS: Artmed.
- Cruz, J. A. B. & Teles, R. A. M. (2020). Divisão de números naturais: do saber previsto ao saber efetivamente ensinado em classes do Ensino Fundamental. *Educação Matemática Debate*, 4(10), 1-26.
- Dante, L. R. (2010). *Formulação e resolução de problemas de matemática: teoria e prática*. São Paulo, SP: Ática.
- Domite, M. C. S. (2006). Formulação de problemas e educação matemática: a quem compete? *Movimento – Revista de Educação*, 14, 24-37.
- Duval, R. (2011) *Ver e ensinar matemática de outra forma: entrar no mundo matemático de pensar: os registros de representações semióticas*. (V. 1). São Paulo, SP: PROEM.

- Gitirana, V., Campos, T. M. M., Magina, S. M. P. & Spinillo, A. G. (2014). *Repensando multiplicação e divisão: contribuições da teoria dos campos conceituais*. São Paulo, SP: PROEM.
- Houaiss, A. (2001). *Minidicionário Houaiss da Língua Portuguesa*. Rio de Janeiro, RJ: Objetiva.
- Jurado, U. M. (2015). Los niños crean problemas de matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 11(42), 235-241.
- Krulik, S. & Rudnick, J. A. (1980). *Problem solving: a handbook for teachers*. Boston: Allyn and Bacon.
- Lautert, S. L. & Spinillo, A. G. (2002). As relações entre o desempenho em problemas de divisão e as concepções de crianças sobre a divisão. *Psicologia Teoria e Pesquisa*, 18(1), 237-246.
- Lorensatti, E. J. C. (2009). Linguagem matemática e língua portuguesa: diálogo necessário na resolução de problemas matemáticos. *Conjectura*, 14(2), 88-99.
- Marin, L. J. P., Spinillo, A. G. & Lautert, S. L. (2023). Relações entre compreensão e resolução de problemas de estrutura multiplicativa. *RIPEM*, 13(4), 1-16.
- Molinari, A. M. C. (2010). *Representação e solução de problemas aritméticos de divisão: um estudo dos procedimentos empregados por alunos do ensino fundamental*. 2010. 252f. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Estadual de Campinas. Campinas, SP.
- Nehring, C. M. (1996). *A multiplicação e seus registros de representação nas séries iniciais*. 1996. 238f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, SC.
- Nehring, C. M. (2001) *Compreensão de texto: enunciados de problemas multiplicativos elementares de combinatória*. 2001. 210f. Tese. (Doutorado em Educação). Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, SC.
- Nunes, T., Campos, T. M. M., Magina, S. & Bryant, P. (2009). *Educação matemática: números e operações numéricas*. São Paulo, SP: Cortez.
- Oliveira, F. S. M. A. (2015). *Crianças do 5º ano do ensino fundamental resolvendo problemas de divisão: a calculadora pode contribuir?* 2015. 148f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica). Universidade Federal de Pernambuco. Recife, PE.
- Onuchic, L. R. & Allevato, N. S. G. (2011) Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. *Bolema*, 25(41), 73-98.
- Onuchic, L. R. (1999). Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: M. A. V. Bicudo (Org.). *Pesquisa em Educação Matemática*. (pp. 199-220). São Paulo, SP: Editora UNESP.
- Paraná. Secretaria de Estado da Educação. *Referencial curricular do Paraná: princípios, direitos e orientações*. (2018). Curitiba, PR.
- Ponte, J. P., Brocardo, J. & Oliveira, H. (2006). *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte, MG: Autêntica.
- Possamai, J. P. & Alevatto, N. S. G. (2023). Proposição de Problemas: imagens como elemento disparador da atividade. *RIPEM*, 13(1), 1-16.
- Saiz, I. (2001). Dividir com dificuldade ou a dificuldade de dividir. In: C. Parra & I. Saiz.

- Didática da matemática: reflexões psicopedagógicas.* (pp. 156-185). Porto Alegre, RS: Artes Médicas.
- Santos, E. R. (2008) *Estudo da produção escrita de estudantes do ensino médio em questões discursivas não rotineiras de matemática*. 2008. 167f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). Universidade Estadual de Londrina. Londrina, PR.
- Silva, S. V. P. (2016). *Ideias/significados da multiplicação e divisão: o processo de aprendizagem via resolução, exploração e proposição de problemas por alunos do 5º ano do Ensino Fundamental*. 2016. 170f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). Universidade Estadual da Paraíba. Campina Grande, PB.
- Soppelsa, J. J. C. (2016). Divisão euclidiana: um olhar para o resto. In: *Anais do XX Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática*. (pp. 1-12). Curitiba, PR.
- Spinillo, A. G., Lautert, S. L., Borba, R. E. S. R., Santos, E. M. & Silva, J. F. G. (2017). Formulação de problemas matemáticos de estrutura multiplicativa por professores do Ensino Fundamental. *Bolema*, 31(59), 928-946.
- Vergnaud, G. (2014). *A criança, a matemática e a realidade: problemas do ensino da matemática na escola elementar*. Tradução de M. L. F. Moro. Curitiba, PR: UFPR.