

Explorando a Probabilidade Geométrica: o caso do Problema do Macarrão

Tatiane Aline Rodrigues Kayser

Secretaria de Estado de Educação do Rio Grande do Sul

Santo Antônio da Patrulha, RS — Brasil

✉ tati_alinerodrigues@hotmail.com

ORCID [0009-0000-2813-3540](https://orcid.org/0009-0000-2813-3540)

Rene Baltazar

Universidade Federal do Rio Grande

Santo Antônio da Patrulha, RS — Brasil

✉ renebaltazar.furg@gmail.com

ORCID [0000-0002-4107-6795](https://orcid.org/0000-0002-4107-6795)

Luciano Silva da Silva

Universidade Federal do Rio Grande

Santo Antônio da Patrulha, RS — Brasil

✉ lucianosilva@furg.br

ORCID [0009-0003-7937-3570](https://orcid.org/0009-0003-7937-3570)



2238-0345 

10.37001/ripem.v14i2.3898 

Recebido • 18/04/2024

Aprovado • 16/07/2024

Publicado • 24/08/2024

Editor • Gilberto Januario 

Resumo: Dividindo aleatoriamente um segmento em três partes, qual é a Probabilidade de que esses novos segmentos formem um triângulo? Tal problema, intitulado *Problema do Macarrão*, está proposto em Wagner (1997), utilizando espaguete como recurso e, conforme mostraremos, pode desencadear uma série de questionamentos quando aplicado na forma empírica. Mais do que isso, quando solucionado matematicamente, explicita conexões entre a Geometria e a Probabilidade. A resolução do problema surge como desdobramento da Probabilidade Geométrica, área da Probabilidade pouco explorada na Educação Básica. No que segue, explorar, propondo uma construção no GeoGebra, situações probabilísticas neste contexto: aplicando conceitos geométricos e analisando as condições de aleatoriedade inspirados na Investigação Matemática como metodologia de ensino.

Palavras-chave: Probabilidade Geométrica. Problema do Macarrão. Investigação Matemática. GeoGebra.

Exploring Geometric Probability: the Pasta Problem case

Abstract: Randomly dividing a segment into three parts, what is the probability that these new segments will form a triangle? This problem, called the Pasta Problem, is proposed in Wagner (1997) using spaghetti as a resource and, as we will show, can trigger a series of questions when applied empirically; more than that, when solved mathematically, it explains connections between geometry and probability. The resolution of the problem arises as a result of Geometric Probability, an area of Probability little explored in Basic Education. In what follows, we will explore, proposing a construction in GeoGebra, probabilistic situations in this context: applying geometric concepts and analyzing the conditions of randomness inspired by Mathematical Investigation.

Keywords: Geometric Probability. Pasta Problem. Mathematical Investigation. GeoGebra.

Explorando la Probabilidad Geométrica: el caso del Problema de los Fideos

Resumen: Al dividir aleatoriamente un segmento en tres partes, ¿cuál es la probabilidad de que estos nuevos segmentos formen un triángulo? Este problema, denominado Problema de los Fideos, es propuesto por Wagner (1997) utilizando espaguetis como recurso y, como mostraremos, puede desencadenar una serie de preguntas cuando se aplica empíricamente; más

que eso, cuando se resuelve matemáticamente, explica las conexiones entre geometría y probabilidad. La resolución del problema surge como consecuencia del desarrollo de la Probabilidad Geométrica, un área de la Probabilidad poco explorada en la Educación Básica. Exploraremos, proponiendo una construcción en GeoGebra, situaciones probabilísticas en este contexto: aplicando conceptos geométricos y analizando las condiciones de aleatoriedad inspiradas en la metodología de la Investigación Matemática.

Palabras clave: Probabilidad Geométrica. Problema de los Fideos. Investigación Matemática. GeoGebra.

1 Introdução¹

A Probabilidade tem inferência nas situações do cotidiano que envolvem acasos e incertezas. Batanero e Borovenik (2016) destacam que compreender fenômenos aleatórios é necessário para que a tomada de decisão seja adequada quando confrontada com a incerteza. Dessa forma, os fenômenos aleatórios são uma parte inerente da vida diária, de modo que os alunos geralmente os experimentam antes mesmo de serem expostos às estruturas curriculares formais. Conforme observado por Gondim (2013), lidar com a observação e análise da imprevisibilidade dentro do contexto escolar representa um desafio significativo, visando integrar conceitos, desenvolver métodos de resolução, soluções e aplicações que sejam compreensíveis e relevantes para os alunos.

Nesse contexto, a Probabilidade Geométrica — como uma área da teoria das Probabilidades — apresenta aspectos relevantes para a construção do raciocínio probabilístico. Tunala (1992) descreve que a temática integra duas áreas da Matemática: a Probabilidade e a Geometria, em situações probabilísticas nas quais os espaços amostrais são contínuos e os meios geométricos são instrumentos para a resolução. Assim, o trabalho com esse tipo de problema oportuniza o desenvolvimento de processos complexos, bem como a habilidade de investigação dos alunos na construção e análise de modelos.

Além disso, a conexão de conteúdos matemáticos que, por vezes são trabalhados de forma fragmentada, potencializa a aprendizagem, ampliando o trabalho pedagógico que pode se restringir à abordagem clássica, ao utilizar os jogos de azar como temática principal. Conforme exposto na Base Nacional Comum Curricular — BNCC (Brasil, 2017), orienta-se que conhecimentos específicos incitem processos mais complexos de reflexão e abstração, alicerçando o pensamento dos alunos na formulação e na resolução de problemas em realidades distintas, com autonomia e recursos matemáticos.

Este artigo propõe explorar as potencialidades do ensino de Probabilidade Geométrica na Educação Básica, centrando-se especialmente no intrigante Problema do Macarrão. A discussão é motivada pelo estudo de Wagner (1997) sobre Probabilidade Geométrica, também presente em Hellmeister (2013). O problema é apresentado como uma forma de introduzir outras situações, além daquelas já tradicionais que envolvem a contagem de casos favoráveis e possíveis em espaços amostrais finitos, instigando a discussão sobre temáticas, como: acaso, experimento aleatório e espaço amostral.

Nesse sentido, possibilita-se condições didáticas que viabilizem o aprendizado, destacando a importância da participação ativa do aluno na aquisição e na reflexão dos conceitos probabilísticos. A abordagem culminou na proposição de atividades com a metodologia da Investigação Matemática, conforme delineado por Ponte, Brocardo e Oliveira

¹ Este artigo é recorte de uma dissertação de mestrado defendida no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas, da Universidade Federal do Rio Grande, escrita pela primeira autora e orientada pelo segundo autor.

(2003).

Visando propiciar aos professores ferramentas significativas para abordar ideias que envolvem acaso, noções de Probabilidades e modelos probabilísticos, o presente estudo apresenta um contexto de problemáticas provenientes de uma discussão no tema, da aplicação de atividades centradas no Problema do Macarrão: explorada como um desafio probabilístico e inserida em um contexto geométrico ilustrado no GeoGebra.

2 Probabilidade Geométrica

A Probabilidade é um ramo da Matemática que estuda os fenômenos de caráter aleatório, ou seja, não determinísticos (Viali, 2008). Denomina-se *acaso* esse conjunto de forças que não são determinadas ou controladas, mas que inferem para a ocorrência ou não de um fenômeno ou experimento, sem que seja possível antecipar com convicção o que ocorrerá.

A abordagem tradicional nas escolas se concentra em problemas com espaços amostrais finitos, predominantemente relacionados a jogos de azar (Gondim, 2013). No entanto, a Teoria das Probabilidades envolve outras subáreas, com aplicações em diversos campos da ciência, entre elas, encontra-se a Probabilidade Geométrica.

Na Teoria das Probabilidades, entre as abordagens, destacam-se a clássica, a frequentista e a subjetiva. A Probabilidade Geométrica utiliza a abordagem clássica ao elencar, na resolução de problemas, a contagem, aqui com um sentido mais abrangente, de casos favoráveis entre os possíveis, enquanto as discussões tendem a abordar a temática frequentista e subjetiva.

Ao propor o trabalho com Probabilidade Geométrica, busca-se ampliar a gama de possibilidades de desenvolver o trabalho didático para alcançar o raciocínio probabilístico. De acordo com Batanero e Borovcnik (2016), esse raciocínio oportuniza pensar em cenários que permitam explorar e avaliar diferentes resultados em situações de incerteza, aplicando métodos e procedimentos de Probabilidade.

Assim, ao contrário dos problemas probabilísticos que são propostos com um número finito de casos e espaços amostrais contáveis, a Probabilidade Geométrica ocupa-se de problemas com espaços amostrais contínuos e determina estimativas do evento favorável ocorrer utilizando meios geométricos na sua resolução. Dessa forma, Tunala (1992) esclarece que

Alguns problemas de Probabilidades são equivalentes à seleção aleatória de pontos em espaços amostrais representados por figuras geométricas. Nos modelos em apreço, a Probabilidade de um determinado evento se reduz à relação ou ao seu limite, caso exista entre medidas geométricas homogêneas, tais como comprimento, área ou volume (p. 16).

Na Probabilidade Geométrica, quando há a referência de calcular Probabilidade, aborda-se experimentos aleatórios nos quais o espaço amostral é um conjunto de pontos no plano (figuras planas e retas) ou no espaço (volumes), e os eventos são subconjuntos desses objetos geométricos. Ou seja, trata-se do estudo das Probabilidades com ênfase nos aspectos geométricos que conceitos como experimento aleatório, espaço amostral e eventos podem adquirir dentro de determinados contextos.

Viana (2013) explica que o famoso *Problema das Agulhas de Buffon*, apresentado pelo Conde de Buffon no livro *Essai d'Arithmétique Morale*, é considerado o estudo inicial da

Probabilidade Geométrica. Nesse problema, determina-se de forma algébrica a Probabilidade de uma agulha lançada aleatoriamente em um assoalho de linhas paralelas cair sem que haja intersecção entre essas linhas e a agulha. Outros problemas também são apresentados em estudos matemáticos, como o problema do encontro (Tunala, 1994) e o problema do macarrão (Wagner, 1997), que iremos discutir neste artigo.

3 Contextualizando o Problema do Macarrão

A resolução de problemas probabilísticos por meios geométricos se apresenta como uma alternativa no ensino de Probabilidade na Educação Básica. Nessa perspectiva, Wagner (1997) publicou o artigo *Probabilidade Geométrica e um paradoxo famoso*, no qual discute as possibilidades de expandir o ensino de Probabilidades para além da contagem de casos favoráveis e casos possíveis em um experimento com número finito de situações ao abordar o Problema do Macarrão e o Paradoxo de Bertrand.

Wagner (1997) propõe a abordagem do Problema do Macarrão, num primeiro momento, a partir de um experimento empírico e, por fim, da sua resolução por meios geométricos, utilizando a desigualdade triangular como método para definir a Probabilidade de ocorrer o evento esperado.

Inicialmente, o experimento é conduzido de forma empírica, desafiando os participantes a quebrarem aleatoriamente um macarrão em três partes e, em seguida, formarem um triângulo com essas peças. Num curso com sessenta professores, quarenta e um triângulos foram formados.

Wagner (1997) enunciou o problema: *dividindo aleatoriamente um segmento em três partes, qual é a Probabilidade de que esses novos segmentos formem um triângulo?* Apesar da intuição inicial dos participantes sugerir uma Probabilidade de aproximadamente 0,68, embasados no experimento prático, esse resultado foi confrontado com a demonstração matemática, utilizando como ferramentas a propriedade da desigualdade triangular e o cálculo da área de triângulos, que gerou a Probabilidade de 0,25.

O confronto revelou uma considerável discrepância entre a intuição inicial e o cálculo de Probabilidade estimado por métodos geométricos. Wagner (1997) levanta alguns questionamentos sobre essa proposta: a divisão realizada no experimento não ocorreu de forma aleatória, indicando a tendência pessoal em dividir o macarrão em partes aproximadamente iguais, além de abordar questões relacionadas ao número de amostras e frequência.

Além disso, o Problema do Macarrão, de acordo com Gondim (2013), oportuniza a discussão entre os resultados de um experimento prático, com um espaço amostral relativamente pequeno, e a generalização que é encontrada por meio do cálculo matemático. Trata-se de um experimento aleatório, haja vista que enuncia partir o macarrão *aleatoriamente* em três partes distintas.

O evento, nesse caso, é que as três partes originem um triângulo. O que se busca é determinar a Probabilidade desse evento ocorrer indicando qual é o espaço amostral do experimento, ou seja, todos os possíveis comprimentos que as partes do macarrão podem assumir. Para isso, o aluno também precisa compreender alguns conceitos geométricos sobre as condições de existência do triângulo. Mais que isso, os espaços amostrais são contínuos, isto é, existe um número infinito não enumerável de pontos que a variável aleatória pode assumir.

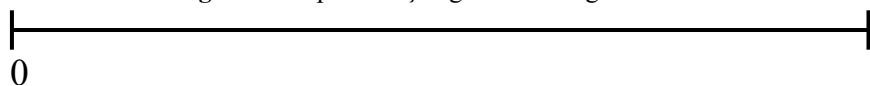
Explorar essas nuances desafia a percepção intuitiva inicial sobre a Probabilidade de formar um triângulo, estimulando uma reflexão crítica sobre o experimento. Esta pesquisa

propõe a investigação mais aprofundada dessas questões e de suas potencialidades, enfatizando a importância de abordagens inovadoras que desafiem o pensamento intuitivo no ensino de Probabilidade Geométrica na Educação Básica.

4 Resolução Matemática

A solução geométrica para o Problema do Macarrão, descrita abaixo, foi desenvolvida a partir do artigo de Wagner (1997). Consideramos o macarrão utilizado no experimento como 1 unidade de comprimento. Assim, temos o segmento AB de comprimento 1 (Figura 1).

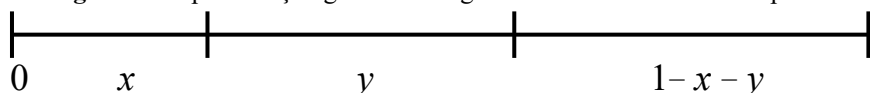
Figura 1: Representação gráfica do segmento AB



Fonte: Elaboração própria (2023)

O segmento é dividido em três partes, uma de comprimento x , outra de comprimento y e a terceira de comprimento $1-x-y$ (Figura 2).

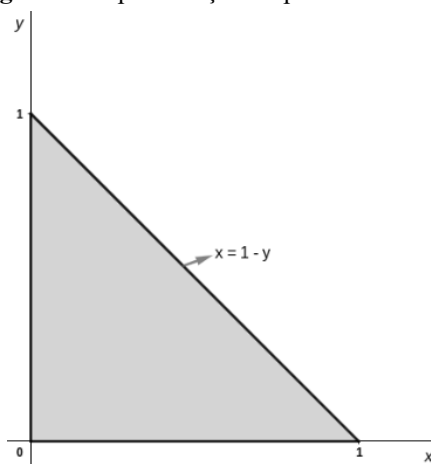
Figura 2: Representação gráfica do segmento AB dividido em três partes



Fonte: Elaboração própria (2023)

Cada forma de dividir o segmento fica associada a um par ordenado (x, y) , em que $x > 0$, $y > 0$ e $x+y < 1$. Representando no plano cartesiano, temos as coordenadas que indicam todas as possibilidades de dividir o segmento em três partes (Figura 3).

Figura 3: Representação no plano cartesiano.



Fonte: Elaboração própria (2023)

Então, cada forma de dividir um segmento em três partes será representada por um ponto interior ao triângulo na figura.

A problemática em questão reside no fato de que nem todas as divisões formam triângulos. Uma das propriedades dos triângulos é chamada de *Desigualdade Triangular ou Condição de Existência do Triângulo*, que enuncia que um triângulo existe, se, e somente se, cada lado for menor que a soma dos outros dois. Isso é equivalente a dizer que, em um triângulo, cada lado é menor que o seu semiperímetro que, no caso, é $\frac{1}{2}$.

Assim, pela desigualdade triangular, tem-se:

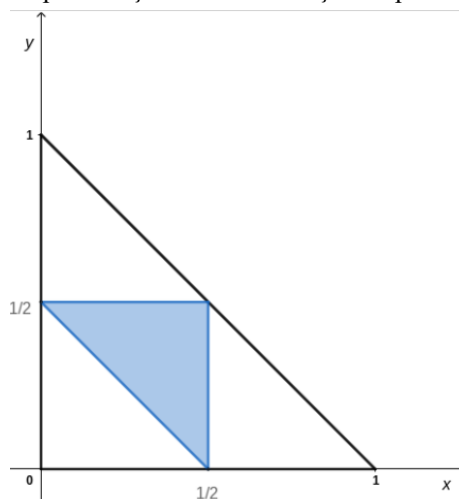
$$x < y + 1 - x - y \Rightarrow x < \frac{1}{2}$$

$$y < x + 1 - x - y \Rightarrow y < \frac{1}{2}$$

$$1 - x - y < x + y \Rightarrow x + y > \frac{1}{2}$$

Reunindo as três condições no plano cartesiano, obtemos a região favorável, que representa os pontos que formarão triângulos. Essa região é composta pelos pontos médios dos lados do triângulo, pela proposição (Figura 4).

Figura 4: Representação da demonstração no plano cartesiano.



Fonte: Elaboração própria (2023)

Desse modo, como se objetiva calcular a Probabilidade do evento “que as três partes formem triângulos”, sendo o triângulo inicial a representação de todos os casos possíveis e o triângulo sombreado a representação dos casos favoráveis, expressa na figura como 1/4 da área do triângulo grande. Concluimos, então, que a Probabilidade de formar um triângulo é 0,25.

5 Ensino de Probabilidade

A Probabilidade, como ciência, aborda a incerteza e a aleatoriedade, conceitos intrínsecos ao cotidiano de todos, mesmo que inconscientemente. Essa habilidade é essencial na vida diária, permeando a tomada de decisão e a análise de riscos, desde escolher levar um casaco ao sair de casa pela manhã até a compreensão de dados estatísticos na política ou participação em jogos para diversão e competição.

Ao contrário de outras áreas da Matemática, nas quais situações contraintuitivas surgem em trabalhos com conceitos mais avançados, a Probabilidade propõe desafios já aplicados em casos elementares. Um exemplo de situação contraintuitiva é que, no lançamento de uma moeda, obter uma sequência de caras não influencia na Probabilidade de que o lançamento seguinte resulte em coroa (Batanero & Borovcnik, 2016).

Nesse cenário, a aprendizagem de Probabilidade na Educação Básica permeia o contato com situações não determinísticas, aleatoriedade e estimativa de resultados, as quais a Matemática tradicional, com a exatidão e o rigor que convencionalmente são atribuídos como características predominantes, não oportuniza. Essa perspectiva evidencia a necessidade de um trabalho didático-pedagógico que contemple a aprendizagem da Probabilidade como a compreensão e análise de fenômenos probabilísticos que se desenvolvem com um conjunto de habilidades, extrapolando a intuição do sujeito.

No contexto do Ensino de Probabilidade na Educação Básica, o foco é desenvolver o raciocínio probabilístico, promovendo o pensamento crítico e a tomada de decisões embasadas em dados, destacando fortemente o acaso. Na sala de aula, em sua generalidade, é comum abordar problemas que utilizam a perspectiva clássica da Probabilidade. No entanto, há abordagens e métodos que podem enriquecer o debate e aprimorar as habilidades probabilísticas dos alunos.

Nesse sentido, os conceitos de pensamento probabilístico (Bryant & Nunes, 2012), letramento probabilístico (Gal, 2005) e raciocínio probabilístico (Batanero & Godino, 2002) apresentam nuances específicas e aspectos que se complementam, sendo relevantes para o Ensino de Probabilidade. Portanto, no que se segue, tais elementos são descritos para subsidiar a elaboração e análise da presente pesquisa.

Bryant e Nunes (2012) articulam quatro habilidades cognitivas que são necessárias para o desenvolvimento do pensamento probabilístico: compreender a natureza e as consequências da aleatoriedade; formar e categorizar o espaço amostral; comparar e quantificar probabilidades; e entender correlações. Essas habilidades são distintas entre si, mas se inter-relacionam, primeiramente, reconhecendo que as Probabilidades se constituem na incerteza, para então construir o espaço amostral, de modo a compreender os elementos do evento que o compõem. Em seguida, calcular as Probabilidades e, na última habilidades, refletir sobre as relações entre as variáveis que estão dependentes das outras, a fim de que a análise seja eficaz.

Na visão de Gal (2005), o conceito de letramento probabilístico envolve o desenvolvimento das habilidades de compreender, analisar, discutir e comunicar questões inerentes aos diferentes contextos. Isso transcende as formas de calcular Probabilidades e a linguagem do acaso para compreender o papel dos processos probabilísticos, bem como a comunicação no mundo. Para isso, Gal (2005) considera elementos do conhecimento e disposicionais para a apropriação do conhecimento probabilístico na perspectiva do letramento. Os elementos do conhecimento são aqueles dos grandes tópicos/temas, cálculos probabilísticos, linguagem, contextos e questões críticas; enquanto os elementos disposicionais envolvem crenças, atitudes e sentimentos pessoais em relação à incerteza e ao risco, por exemplo, a própria aversão ao risco.

O letramento probabilístico, como destaca Gal (2005), ocorre quando todos os elementos de conhecimento e disposicionais são desenvolvidos na sala de aula, de forma que interajam uns com os outros. Os elementos disposicionais têm papel fundamental na aprendizagem de Probabilidade, pois mostram como os sujeitos vão refletir sobre as informações probabilísticas e como agem em situações que envolvam a incerteza e o acaso, independentemente das realidades em que se aplicam, sejam elas fora ou dentro da sala de aula.

Seguindo a abordagem proposta por Batanero, Godino e Roa (2002), o desenvolvimento do raciocínio probabilístico requer:

1. Proporcionar uma ampla variedade de experiências que permitam observar os fenômenos aleatórios e diferenciá-los dos determinísticos;
2. Estimular a expressão de previsões sobre o comportamento desses fenômenos e os seus resultados, bem como sua Probabilidade;
3. Organizar o recolhimento de dados experimentais, de maneira que os alunos tenham oportunidade de confrontar as suas previsões com os resultados produzidos e rever as suas crenças com base nos resultados;

4. Destacar a imprevisibilidade de cada resultado isolado, bem como a variabilidade de pequenas amostras, comparando os resultados de cada criança ou dos pares;
5. Ajudar a apreciar o fenômeno da convergência, ao acumular os resultados de toda a turma e comparar a confiabilidade de amostras pequenas e grandes.

Sendo assim, a integração desses conceitos promove o Ensino de Probabilidade, que desenvolve competências práticas e disposicionais, utilizando os aspectos teóricos de forma que sejam aplicados em contextos diversos, com capacidade de analisar situações de maneira crítica.

No que se refere ao desenvolvimento do raciocínio probabilístico, o caráter aleatório dos problemas é complexo e recebe várias interpretações ao longo da história, tanto da Matemática como da Filosofia. Na Antiguidade, esteve ligado à sorte ou azar, remetendo à falta de controle sobre a aleatoriedade (Batanero & Serrano, 1995). Ayer (1974) *apud* Batanero e Serrano (1995) ressalta que a definição relacionada aos fenômenos aleatórios depende diretamente da abordagem probabilística contemplada.

Na abordagem clássica, a aleatoriedade está relacionada à equiprobabilidade — como no lançamento de dados — ou na abordagem frequentista, em que se determina a Probabilidade de um evento analisando a frequência com que ocorreu anteriormente. Por exemplo, determinar a Probabilidade de uma pessoa nascer do sexo feminino, observando o número de casos em relação ao total da população.

As referências ao aleatório estão inseridas no vocabulário, inclusive no infantil. Batanero, Godino e Roa (2002) destacam que a variedade de expressões, como *por acaso*, *sem intenção*, *sem querer*, demonstram que as crianças são capazes de observar o caráter de imprevisibilidade dos fenômenos. Identificar a aleatoriedade nos experimentos, ou seja, reconhecer que os resultados não são sempre os mesmos e que dependem de variáveis que não estão sob seu controle total, é fundamental para o desenvolvimento do pensamento científico e da capacidade de lidar com a incerteza.

Esse processo abre caminho para a diferenciação entre fenômenos determinísticos e não determinísticos, e em seguida analisar os experimentos aleatórios, os quais são um meio de representar a realidade e explorar as possibilidades por intermédio de modelos probabilísticos. Nesse contexto, oferecer oportunidades de discussão e reflexão sobre as decisões tomadas estimula os alunos a justificar respostas, analisar diferentes estratégias de resolução e comunicar os resultados de maneira coerente. Na Educação Básica, é crucial proporcionar situações de aprendizagem que incentivem a investigação, a discussão, a análise de conhecimentos e o desenvolvimento de argumentos, conforme preconizado pelas metodologias ativas (Morán, 2015).

O Ensino de Probabilidade, com a intencionalidade que é inerente à prática docente, não apenas desenvolve conceitos probabilísticos, mas também promove o protagonismo do aluno, utilizando roteiros de atividades que enfatizem os métodos ativos. Assim, ao planejar as atividades com o Problema do Macarrão, a intencionalidade pedagógica está mediada pela metodologia da Investigação Matemática, que tem como característica o estilo conjectura-teste-demonstração (Ponte *et al.*, 2003).

6 O Problema do Macarrão como atividade de ensino

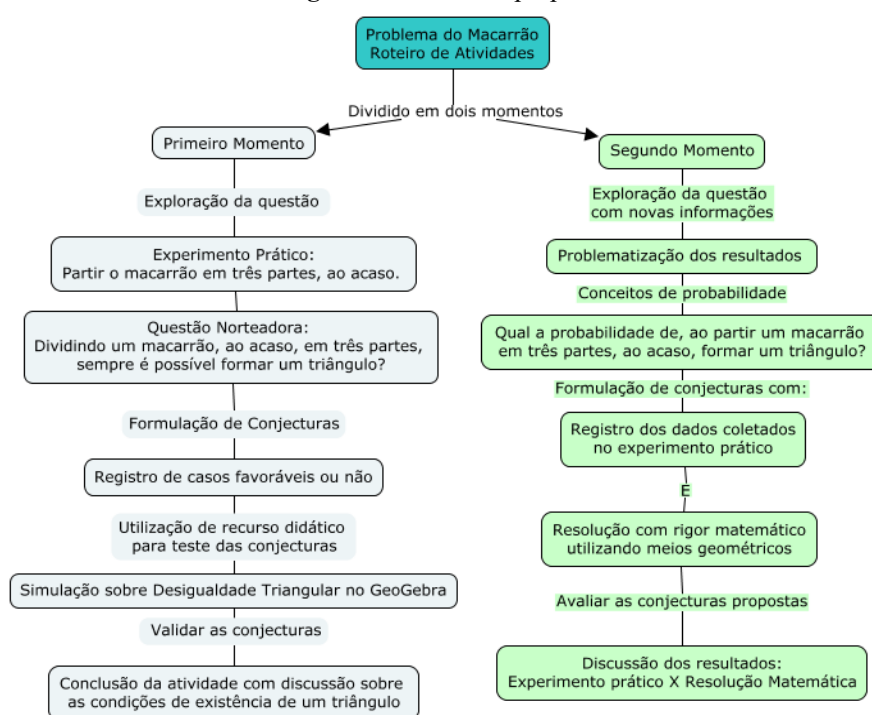
Neste artigo, investigamos as contribuições da Probabilidade Geométrica a partir do Problema do Macarrão no ensino de Matemática na Educação Básica. Participaram da pesquisa 14 alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e 17 alunos do 3º ano do Ensino Médio. Os alunos

pertencem a duas escolas públicas da região do Vale do Paranhana, e cada uma delas atua em determinada etapa do ensino. Além disso, destacamos que as atividades realizadas foram propostas em momentos distintos a cada grupo de alunos.

Abordaremos, neste estudo, as duas atividades envolvendo o Problema do Macarrão. No contexto da pesquisa, foram aplicadas três atividades com a turma de 9º ano, a primeira com problemas introdutórios sobre Probabilidade, haja vista que em avaliação prévia considerou-se necessário. Observando o cenário proposto por Wagner (1997), convergindo para a Educação Básica na percepção de Batanero, Godino e Roa (2002), desenvolveu-se um roteiro de atividades (Figura 5) que visou explorar as potencialidades do Problema do Macarrão. Tal roteiro esteve amparado na metodologia da Investigação Matemática (Ponte *et al.*, 2003).

Segundo Ponte *et al.* (2003), uma tarefa investigativa geralmente se desdobra em três etapas distintas. Primeiramente, na introdução da tarefa, o professor apresenta a atividade à turma, seja de forma oral ou escrita, marcando o “arranque da aula” como o momento inicial para motivar e organizar o trabalho. É crucial que os alunos compreendam a tarefa a partir da orientação do professor. Na segunda etapa, ocorre a realização da investigação, com a definição da forma de trabalho (individual ou em grupo). Nessa fase, os alunos exploram o tema, formulam questões, fazem conjecturas, testam e reformulam suas ideias, justificam seus raciocínios e são avaliados. Por fim, a terceira etapa consiste na discussão dos resultados em grupo, com a sistematização dos princípios aprendidos e a reflexão sobre o trabalho realizado.

Figura 5: Roteiro da proposta



Fonte: Elaboração própria (2023)

O roteiro foi dividido em momentos que se conectam no caminho para a resolução do problema e na discussão acerca dos resultados. Segue a descrição desses momentos.

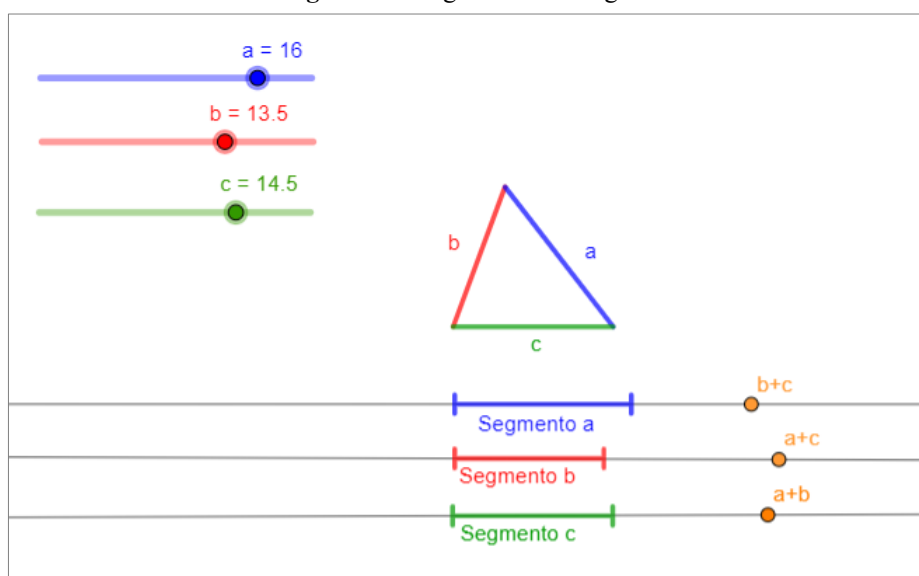
No primeiro momento, realiza-se a reprodução do experimento com espaguetes. Se possível, é interessante entregar uma variedade de espaguetes com a característica em comum de serem compridos: *spaguite* (comprido e maciço); *bugatti* (com furinho no meio); *linguine* (chato), assim, os alunos poderão testar com diferentes formatos de espaguite. Solicitar que os

alunos partam em três partes, ao acaso. Posteriormente, verificar se as três partes formam triângulos. Anotar o resultado do experimento no quadro (espera-se que alguns segmentos formem triângulo e outros não).

Diante da situação e registros, a questão inicial é: *dividindo um macarrão ao acaso, em três partes, sempre é possível formar um triângulo?* Nesse primeiro momento, o diálogo inicial entre professor e alunos é importante, pois desenvolve o conhecimento acerca de conceitos geométricos, os quais podem não estar consolidados. Questões instigadoras podem ser geradas, como: *quaisquer medidas de lado formam um triângulo?*; *Com três segmentos sempre é possível formar triângulo?*; *Por que alguns conjuntos de segmentos não formam triângulos?*; *Há relação entre o comprimento dos segmentos para a formação do triângulo?*

No desenvolvimento dessa atividade, é proposto uma investigação sobre a desigualdade triangular, com o uso do *software* GeoGebra (Figura 6). O simulador² proporciona testar os questionamentos sobre desigualdade triangular. A investigação pode ocorrer em duplas ou grupos maiores, a depender da disponibilidade de aparelhos eletrônicos para utilização do GeoGebra.

Figura 6: Desigualdade Triangular



Fonte: Elaboração própria (2023)

Na conclusão do primeiro momento, é importante retornar à questão inicial e verificar se foi possível comprovar que existem circunstâncias nas quais não é possível formar um triângulo e se podemos afirmar que há uma regra para a existência do triângulo em relação aos seus lados.

No segundo momento, há o retorno ao Problema do Macarrão, considerando as conjecturas formuladas na atividade anterior, sobre condições de existência de um triângulo. Na primeira etapa, indagamos se sempre é possível formar triângulo obtendo três partes ao acaso. Concluindo que há condições para a construção, questionamos: *Qual a Probabilidade de, ao partir um macarrão em três partes, se formar um triângulo?*

Considerando que, no primeiro momento foram registradas as tentativas dos alunos, quantas formaram triângulo e quantas não formaram, trazer para a aula o questionamento sobre a Probabilidade esperada coincide com o resultado encontrado no experimento feito com a

² Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/p5yg7qzv>

turma. Ao realizar a solução matemática por meio de um algoritmo, qual será o resultado obtido? Observando a etapa escolar, a efetivação da resolução pode ser adaptada pelo professor, pois o objetivo principal é que o aluno discuta sobre o resultado do experimento (quebrar o espagete em três partes) e o resultado do cálculo. Então, cabe ao professor decidir se propõe a investigação a partir da resolução do cálculo ou se explanará a resolução, conforme já proposto na primeira parte do artigo, mediante uma aula expositiva.

A discussão com os alunos é relevante para aprimorar os conceitos tanto de Probabilidade quanto de Geometria. A avaliação ocorre no decorrer da atividade e dos relatórios escritos pelos alunos sobre o tema em questão. Alguns questionamentos podem se tornar condutores da discussão, como: *Por que o experimento trouxe resultados diferentes da resolução matemática?*; *Quais aspectos geométricos são importantes na resolução?*

7 Discussões

Analisando o Problema do Macarrão e os conceitos probabilísticos, ocorre a possibilidade de discutir acerca dos experimentos aleatórios e determinísticos. Embora o experimento inicial de quebrar macarrões não aconteça ao acaso, refletir sobre as variáveis envolvidas no processo é importante. Corroborando Bryant e Nunes (2012), a proposta objetivou analisar as condições de aleatoriedade, explorando os elementos do espaço amostral, além de calcular a Probabilidade e refletir criticamente sobre as correlações entre os eventos.

Ao propor o problema inicial para alunos do Ensino Fundamental e Médio, a pergunta norteadora desse momento foi: *ao partir um macarrão em três partes, sempre é possível formar um triângulo?*

Essa questão objetivou encaminhar o grupo para uma exploração sobre o conceito de desigualdade triangular, um aspecto geométrico pertinente para entender o Problema do Macarrão e, mais amplamente, para o ensino de Geometria. Desse modo, no experimento de quebrar um macarrão em três partes ao acaso, os participantes buscaram algum tipo de simetria entre as partes quebradas. Posteriormente, ao construir o triângulo, as duas turmas levaram as discussões por caminhos distintos. Enquanto os alunos do 9º ano discutiram sobre as formas de um triângulo, entre triângulos escalenos e isósceles, a turma do Ensino Médio discutiu as relações que determinam ou não a existência do triângulo.

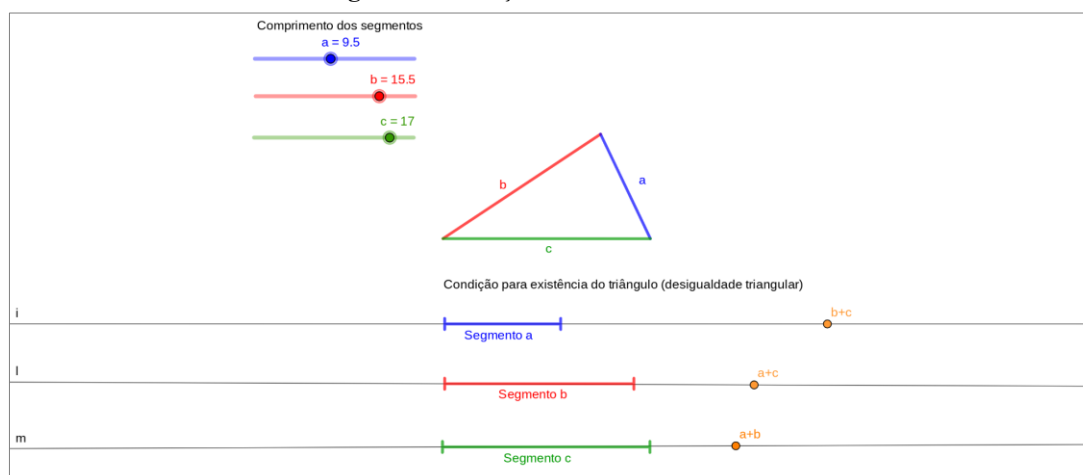
Na turma de Ensino Fundamental, o debate versou sobre uma figura que era formada por dois segmentos maiores e um menor, que para eles não representava um triângulo. Tomazetto e Nacarato (2009), alicerçados nos conceitos de Nacarato e Passos (2003), abordam a temática mediante o conceito de problema do objeto prototípico, que discute a influência das figuras estereotipadas no processo de aquisição de conceitos geométricos.

Essa concepção de figura geométrica pode representar um obstáculo para o ensino e aprendizagem, assim como para a percepção das tarefas investigativas, oportunizando outras descobertas que são tão relevantes quanto a solução do problema em si (Ponte *et al.*, 2003). Na aula, foram retomados, por intermédio da discussão entre os pequenos grupos, conceitos de triângulos e classificação quanto ao comprimento dos lados. Nesse momento, alguns alunos resgataram conceitos que já tinham construído sobre triângulos, para argumentar com os colegas.

A discussão da turma do Ensino Médio ocupou-se em formar ou não um triângulo. Utilizaram definições de Geometria, como segmentos e triângulos de formas diferentes, de acordo com o comprimento de seus lados, demonstrando conhecimentos prévios de Geometria estabelecidos, bem como a capacidade de utilizá-los na argumentação.

Em meio aos debates, introduziu-se a ilustração no GeoGebra (Figura 7), para explorar amplamente o questionamento inicial. Nas duas turmas, o conceito de *desigualdade triangular* era desconhecido. Essa etapa evoluiu de forma proporcional nos grupos. Inicialmente, os alunos movimentavam a barra deslizante e observavam o triângulo alterando o comprimento dos seus lados. Por intermédio dos questionamentos realizados, começaram a surgir conjecturas, haja vista que esse processo é uma característica do método investigativo. As conjecturas eram testadas e refinadas, por exemplo, determinado grupo iniciou anotando as ternas que formavam triângulos separadamente das ternas que não formavam. O questionamento posterior foi: *Qual relação esses valores têm entre si?* Assim, começaram a observar a parte inferior da ilustração, que representa geometricamente as relações.

Figura 7: Condição necessária e suficiente



Fonte: Elaboração própria (2023)

Percebeu-se que inferir sobre o conceito de desigualdade triangular, por meio da ilustração no GeoGebra, trouxe a construção desse conceito. Os alunos percorreram sobre as relações entre as medidas dos segmentos via controle deslizante, para que se formasse um triângulo, e realizaram o registro dessa etapa, justificando suas conjecturas.

Na segunda etapa da atividade, os alunos foram questionados sobre a Probabilidade de formar um triângulo quebrando ao acaso o macarrão: destaca-se que a ênfase neste momento está nas discussões dos aspectos probabilísticos do problema. Os alunos do 9º ano do Ensino Fundamental não tinham o conhecimento sistematizado do que é *acaso*. Então, apesar de construírem o conceito de *desigualdade triangular* e saber que nem sempre três segmentos formam um triângulo, ainda assim, não formularam argumentos fortes o suficiente para contrapor o resultado do experimento empírico.

A turma constituída por alunos do 3º ano do Ensino Médio trouxe elementos da Probabilidade Clássica para a discussão, de modo que alguns grupos utilizaram a expressão dos resultados em porcentagem. Argumentaram que o resultado do experimento empírico seria diferente do resultado matemático, visto que, no primeiro, todos conseguiram formar triângulo, porém, pela desigualdade triangular aferiram que a situação do experimento não se aplica a outros casos possíveis.

Observa-se que é necessário abordar fenômenos aleatórios nas escolas para aprofundar os conceitos de *acaso*, *evento possível*, *impossível*, *provável* ou *pouco provável*, a fim de consolidar as habilidades que inferem na compreensão de conceitos probabilísticos e aplicá-las em situações diversas. Na turma do Ensino Fundamental, compreender que fenômenos aleatórios são distintos dos fenômenos determinísticos foi uma habilidade que não estava

consolidada, haja vista que, no segundo momento, não se verificou o uso de termos associados ao aleatório como a expressão: *é pouco provável que se quebre um pedaço tão pequeno*.

Assim, destacamos a relevância de desenvolver atividades que abordem o raciocínio probabilístico e que promovam a noção de acaso: demonstrando o que é um experimento aleatório e o que é um experimento determinístico. Por exemplo, conceber contextos em que as variáveis são possíveis de se controlar no processo experimental, seja de forma consciente ou inconsciente.

Além disso, é essencial integrar o pensamento probabilístico, que envolve a compreensão e a aplicação dos conceitos de Probabilidade, bem como o letramento probabilístico, capacitando os alunos a analisar, discutir e comunicar questões probabilísticas em diversos contextos. Essa combinação permite uma abordagem educacional mais abrangente, preparando os alunos para aplicar o conhecimento probabilístico de maneira crítica e contextualizada em suas vidas cotidianas.

Na Probabilidade Geométrica, os espaços amostrais são contínuos, então, ao apresentar a demonstração matemática para o problema, partimos da construção do espaço amostral. Na representação do espaço amostral no plano cartesiano, os alunos tiveram a oportunidade de visualizar a construção e identificar as relações geométricas implicadas. Determinar o espaço amostral também é relevante, pois, segundo Hernández-Solís, Batanero, Gea e Álvarez-Arroyo (2021), por meio dele, o aluno pode comparar Probabilidades e considerar os casos favoráveis e não favoráveis que fazem parte de um mesmo conjunto. Nesse sentido, a Probabilidade Geométrica se ocupa de espaços amostrais contínuos, com intervalos de números reais, sejam finitos ou infinitos.

Outro questionamento válido, que facilmente pode gerar inúmeras discussões e inclusivamente produzir outros contextos, ocorre ao comparar os resultados do experimento empírico com os da resolução geométrica, quando todos os pontos possíveis são considerados naquele intervalo. Acreditamos que, devido a essa discrepância de resultados, existem dois cenários que não são totalmente disjuntos: o do hábito intuitivo (em muitas tarefas diárias precisamos dividir coisas em partes iguais) e o da física (é mais difícil quebrar em parte pequenas; o macarrão quebra ao aplicarmos um torque, que é proporcional à distância do ponto de aplicação).

Confrontar os resultados oportuniza desenvolver o raciocínio probabilístico, uma vez que, um dos aspectos complexos da Probabilidade está no fato de tomar decisões que muitas vezes são contrárias às crenças de cada ser (Batanero & Manfred, 2016). É, assim, uma questão filosófica que está inserida no ensino de Matemática a partir da Probabilidade.

Durante a atividade final, os alunos confrontaram suas crenças com os resultados obtidos por meio da resolução geométrica. As afirmações que demonstraram a comparação entre os resultados incluíram: *não seria possível quebrar um pedaço tão pequeno*, relacionando que, no caso do experimento empírico, não são consideradas todas as possibilidades. Outra afirmativa que diz respeito ao experimento empírico é a intencionalidade e o controle das variáveis: *tentei quebrar as partes em tamanhos iguais*. As afirmações são potencializadoras do debate, com intermédio dos questionamentos dos colegas e da pesquisadora, conduzindo para a análise e reflexão sobre os conhecimentos probabilísticos.

Então, a amostra em uma sala de aula, obtida por meio da quebra dos macarrões, pode ser considerada pequena ou grande? Esse é outro potencializador indicado por Batanero, Godino e Roa (2002) que é explorado no problema. A organização dos dados experimentais e

a comparação com o resultado obtido matematicamente oportunizam confrontar as crenças iniciais, destacando a imprevisibilidade de cada resultado diante do todo.

Por último, além dos conceitos probabilísticos envolvidos, os conceitos geométricos utilizados como meio para solucionar o Problema do Macarrão, possibilitam aplicar entes geométricos em perspectivas distantes das habituais.

8 Conclusão

Finalmente, fazendo uso de um problema já conhecido na literatura, buscou-se integrar conhecimentos geométricos e probabilísticos tendo como foco ampliar as possibilidades de promover o ensino de Probabilidade; ora destacando as contribuições da Probabilidade Geométrica para o Ensino de Matemática, ora buscando propor problemáticas, assim como o trabalho com espaços amostrais contínuos, nesse contexto.

Na estruturação da proposta, destacamos que perceber a natureza aleatória dos experimentos, ou seja, entender que os resultados podem variar e são influenciados por fatores fora do controle, é essencial para o desenvolvimento dos conhecimentos probabilísticos. Acreditamos, assim, que isso é extremamente pertinente em uma abordagem sobre Probabilidade Geométrica, bem como na habilidade de lidar com a incerteza.

Na discussão dos resultados, os percursos traçados facilmente poderiam ter tomado outros caminhos se aplicados em distintos ambientes, por exemplo, em atividades de formação de professores. Mais que isso, acreditamos que a abordagem criada possa incentivar a inserção em sala de aula da Probabilidade Geométrica, ratificando a importância dos conceitos utilizados e motivando a constituição de novas atividades.

Referências

- Batanero, C. & Borovcnik, M. (2016). *Statistics and Probability in High School*. Rotterdam: Sense Publishers.
- Batanero, C. & Godino, J. (2002). *Estadística y su didáctica para maestros: proyecto Edumat maestros*. Granada: Universidad de Granada.
- Batanero, C.; Godino, J. D. & Roa, R. (2004). Training teachers to teach probability. *Journal of Statistics Education*, 12(1), 1-15.
- Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. (2017). *Base Nacional Comum Curricular: Educação Infantil e Ensino Fundamental*. Brasília, DF: MEC/SEB.
- Bryant, P. & Nunes, T. (2012). *Children's understanding of probability: A literature review (full report)*. London: Nuffield Foundation.
- Gal, I. (2005). Towards "probability literacy" for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. In G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 39-63). New York: Springer.
- Gondim, H. F. (2013). *Probabilidade e Probabilidade Geométrica: conceitos e exemplos aplicáveis no ensino básico*. 78f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Campo Grande, MS.
- Hellmeister, A. C. P. (2013). *Geometria em sala de aula*. Rio de Janeiro, RJ: SBM.
- Hernández-Solís, L. A.; Batanero, C.; Gea, M. M. & Álvarez-Arroyo, R. (2021). Comparing probabilities in urns: A study with primary school students. *Uniciencia*, 35(2), 1-18.

- Morán, J. M. (2015). Mudando a educação com metodologias ativas. In: C. A. Souza & O. E. Torres-Morales (Ed.), *Convergências midiáticas, educação e cidadania: aproximações jovens* (v. 2; p. 15-33). Ponta Grossa, PR: UEPG.
- Nacarato, A. M. & Passos, C. L. B. (2003). A geometria nas séries iniciais: uma análise sob a perspectiva da prática pedagógica e da formação de professores. São Carlos, SP: EdUFSCar.
- Ponte, J. P., Brocardo, J. & Oliveira, H. (2003). *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte, MG: Autêntica.
- Tomazetto, M. & Nacarato, A. M. (2009). A desigualdade triangular: cenários para investigação numa sala de aula de 6ª série. *Boletim GEPEM*, (55), 93-109.
- Tunala, N. (1992). Determinação de probabilidades por métodos geométricos. *Revista do Professor de Matemática*, 20, 16-22.
- Viali, L. (2008). Algumas considerações sobre a origem da teoria da Probabilidade. *Revista Brasileira de História da Matemática*, 8(16), 143-153.
- Viana, F. C. A. (2013). *Estudo e aplicações de Probabilidade Geométrica e paradoxos*. 86f. Dissertação (Mestrado em Matemática). Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, PB.
- Wagner, E. (1997). Probabilidade geométrica: o problema do macarrão e um paradoxo famoso. *Revista do Professor de Matemática*, 34, 28-35.