Sociedade Brasileira de Educação Matemática

RIPEM

Um ETG para o ensino e a aprendizagem em tópicos de superfícies parametrizadas

Anne Desconsi Hasselmann Bettin
Universidade Franciscana
Santa Maria, RS — Brasil
✉ annedesconsi@gmail.com
0000-0003-1834-164X

José Carlos Pinto Leivas
Universidade Franciscana
Santa Maria, RS — Brasil
✉ leivasjc@gmail.com
0000-0001-6876-1461

CC BY NC SA

2238-0345

10.37001/ripem.v15i1.3963

Recebido • 05/06/2024
Aprovado • 17/10/2024
Publicado • 02/03/2025

Editor • Gilberto Januario

Resumo: Este artigo teve, como objetivo, analisar contribuições do Espaço de Trabalho Geométrico (ETG), envolvendo a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), para o ensino e a aprendizagem de superfícies parametrizadas. A pesquisa, de natureza qualitativa, teve, como referencial teórico, o ETG e metodológico a TRSS. As atividades foram estruturadas em 4 módulos: sólidos e superfícies (representações), parametrização do plano, da superfície do cilindro circular reto e da superfície esférica. Foram aplicados com acadêmicos de um programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática na disciplina de Geometria. Resultados evidenciaram contribuições que favorecem o desenvolvimento de conhecimentos geométricos para o entendimento e a resolução de problemas em tópicos de superfície parametrizadas, partindo da visualização para a construção de conceitos e propriedades. A mobilização de diferentes registros ajudou na ativação das gêneses para a aquisição e a compreensão dos conteúdos trabalhados e na articulação dos planos pela Gênese Figural, Instrumental ou Discursiva.

Palavras-chave: Espaço de Trabalho Matemático. Superfícies de Revolução. Registros de Representação Semiótica. GeoGebra. Pensamento Geométrico.

A geometric workspace (GTE) for teaching and learning on parameterized surface topics

Abstract: This article aimed to analyze the contributions of a Geometric Workspace (ETG), involving the Theory of Semiotic Representation Registers (TRRS), for teaching and learning on parameterized surfaces. The research, of a qualitative nature, had the ETG as its theoretical reference, while its methodological reference was the TRSS. The research was structured into 4 modules: solids and surfaces (representations), plane parameterization, straight circular cylinder surface parameterization and spherical surface parameterization. The modules were tested with students from a Postgraduate program in Mathematics Teaching in the discipline of Geometry. The results highlighted contributions that favored the development of geometric knowledge for understanding and solving problems in parameterized surface topics, starting from the visualization to the construction of concepts and properties. The mobilization of different records helped in activating the genesis for the acquisition and the understanding of the contents and in the articulation of the plans by means of Figural Genesis, Instrumental or Discursive.

Keywords: Mathematical Workspace. Revolution Surface. Records of Semiotic Representation. GeoGebra. Geometric Thinking.

Un ETG para la enseñanza y el aprendizaje sobre temas superficiales parametrizados

Resumen: Este artículo tiene como objetivo analizar las contribuciones de un Espacio de Trabajo Geométrico (ETG), involucrando la Teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS), para la enseñanza y el aprendizaje sobre superficies parametrizadas. La investigación, de carácter cualitativo, tiene como referente teórico la ETG y su referente metodológico la TRSS. Las actividades se estructuraron en 4 módulos: sólidos y superficies (representaciones), parametrización de planos y de superficies de cilindros circulares rectos y de superficies esféricas. Se aplicó con estudiantes de un programa de Postgrado en Didáctica de las Matemáticas en la disciplina de Geometría. Los resultados resaltaron aportes que favorecieron el desarrollo del conocimiento geométrico para la comprensión y resolución de problemas en temas de superficies parametrizadas, desde la visualización hasta la construcción de conceptos y propiedades, ayudando en el desarrollo del pensamiento geométrico. La movilización de diferentes registros ayudó a activar la génesis para la adquisición y comprensión de los contenidos trabajados y en la articulación de los planes a través de Génesis Figural, Instrumental o Discursiva.

Palabras clave: Espacio de Trabajo Matemático. Superficie de Revolución. Registros de Representación Semiótica. GeoGebra. Pensamiento Geométrico.

1 Introdução

O estudo da geometria é uma parte importante do ensino de Matemática, pois permite aos indivíduos a utilização de modelos concretos como representações de objetos matemáticos, o que possibilita o desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos. Como professora, tenho percebido algumas dificuldades dos alunos em relação a visualização e a representação no estudo de Geometria e acreditamos que o uso de materiais manipulativos e softwares de Geometria Dinâmica, por exemplo, o GeoGebra, possam auxiliar no ensino e na aprendizagem. Isso motivou o desenvolvimento de uma pesquisa de natureza qualitativa em um Programa de Pós-graduação[1], a qual teve, como referencial teórico, o ETG e metodológico a TRSS.

Segundo Duval (1995), temos acesso aos objetos do conhecimento por meio de suas representações, e, para que o aluno compreenda a Matemática, é preciso que ele diferencie um objeto matemático, por exemplo, um triângulo de sua representação semiótica. As representações semióticas são, resumidamente,

> As frases em linguagem natural, as equações, e não as palavras, os algarismos e as letras. São as figuras, os esquemas, os gráficos e não os pontos, raramente visíveis, ou os traços, Muitas vezes associamos os signos a essas unidades elementares de sentido, que são apenas caracteres para codificar: letras, siglas, algarismos, às vezes palavras-chave, ou os gestos da mão. O que equivale a considerar os signos como "coisas" pelas quais é preciso começar para dar sentido. (Duval, 2011, p. 38).

Devido à grande variedade de representações semióticas, o autor utiliza o termo "registros de representação semiótica" para diferenciar aquelas relacionadas ao campo matemático dos demais campos. Duval (2011) menciona a importância dos registros de representação para o aprendizado e reforça que, para que ele ocorra, o aluno precisa transitar por, pelo menos, dois tipos de registros de representação diferentes.

[1] Este artigo é recorte de uma tese de doutorado defendida no Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Franciscana, escrita pela primeira autora e orientada pelo segundo autor.

A importância dos registros é enfatizada, também, por Simonetti e Moretti (2021, p. 101), ao mencionar que "podemos manipular os objetos matemáticos à medida que fazemos uso de uma representação semiótica" e, diante disso, trabalhar com a Matemática dessa forma "permite o professor organizar a sua prática de ensino considerando as operações cognitivas (tratamento e conversão) envolvidas na aprendizagem de determinado objeto matemático indo além de um olhar meramente conceitual" (Simonetti e Moretti, 2021, p. 105).

Segundo Souza, Fontes e Borba (2019), existe uma preocupação maior em relação aos cálculos algébricos em detrimento das representações visuais. Nesse sentido, o uso de ambientes de geometria dinâmica pode auxiliar no processo de ensino e de aprendizagem integrando cálculos algébricos e representações visuais, o que possibilita que o aluno construa, teste hipóteses, anime, entre outros, relacionando os diferentes registros de representação.

A interação entre o indivíduo e as tecnologias é mostrada na Abordagem Instrumental de Rabardel (1995), na qual um artefato (computador, régua, compasso ou outros), com o auxílio de esquemas de utilização, a transformam num instrumento para a construção do conhecimento e, ao trabalhar com as apreensões, seguindo as ideias de Duval (1998), o aluno consegue obter uma percepção visual o que pode ser alcançado com as tecnologias como a do GeoGebra.

A Teoria do Espaço de Trabalho Geométrico (ETG), introduzida por Houdement e Kuzniak (1999, 2006), propõe elementos para a construção de um espaço de trabalho para abordar, refletir e interpretar um problema geométrico que possibilita a articulação dos planos cognitivo e epistemológico por meio de três gêneses: a Figural, a Instrumental e a Discursiva.

O presente artigo parte de uma tese de doutorado, na qual iniciaram-se os estudos sobre o ETG, que envolvem o conteúdo de superfícies parametrizadas com base nos registros de representação semiótica de Duval, partindo da visualização para a construção e exploração de conceitos geométricos para o entendimento e a resolução de problemas em tópicos de superfícies parametrizadas.

Assim, a pesquisa da tese teve, por objetivo geral, "analisar as contribuições de um Espaço de Trabalho Geométrico, envolvendo a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, para o ensino e a aprendizagem em tópicos de superfícies parametrizadas".

Estão explicitadas, na próxima seção, o referencial teórico com a abordagem de ETG de Kuzniak. Em seguida, explicita-se a síntese das atividades aplicadas na pesquisa, juntamente com os encaminhamentos metodológicos e, na sequência, a análise de alguns resultados e considerações finais.

2 Fundamentos teóricos e metodológicos

A Teoria dos Espaços de Trabalho Matemático (ETM), de Kuzniak (2011), foi desenvolvida, inicialmente, por Houdement e Kuzniak (1999, 2006), então denominada de Paradigmas Geométricos (PG), ampliando-se para o Espaço de Trabalho Geométrico (ETG) e, atualmente, abrange outros domínios da Matemática como a Álgebra e a Probabilidade.

Essa teoria foi recentemente reconhecida e é considerada, também, como uma ferramenta metodológica, a qual permite observar as atividades desenvolvidas pelos indivíduos ao resolverem problemas matemáticos (Gómez-Chacón, Kuzniak & Vivier, 2016), (Kuzniak, 2018a).

Um mapeamento das publicações dos anais do Eleventh Congress of the European Society for Reserch in Mathematics Education (CERME 11) identificou 7 trabalhos sobre o

Espaço de Trabalho Matemático, os quais possibilitaram um maior entendimento da teoria. No catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), foi encontrada apenas uma tese sobre a teoria. Outra busca em publicações de pesquisas nacionais em alguns periódicos, evidenciaram apenas 7 trabalhos, isso indica que o tema é atual e promissor, com poucas pesquisas brasileiras publicadas, sendo, em grande maioria, produções internacionais.

Houdement e Kuzniak (2006) comentam que, antigamente, as evidências visuais e as construções materiais bastavam para convencer pesquisadores em Geometria. Com o surgimento da obra "Os Elementos de Euclides", ela passou a ser baseada em axiomas e organizada dentro de um raciocínio hipotético-dedutivo. No século XIX, o surgimento das Geometrias Não-Euclidianas - a Elíptica e a Hiperbólica - tornou a Geometria mais abstrata, com o surgimento de novos paradigmas.

Houdement e Kuzniak (1999) desenvolveram a noção de PG baseados nos trabalhos de Gonseth (1945–1955) e Kuhn (1962–1970). Os autores identificam, na Geometria, três paradigmas:

- Geometria Natural ou Geometria I: a experiência envolve problemas com dobras, utilização de instrumentos como régua, compasso, TIC´s, dentre outros. O desenho é objeto de estudo e a comprovação ocorre por meio da visualização;
- Geometria Axiomática Natural ou Geometria II: o desenho é apenas um suporte para o raciocínio e a comprovação é por meio de propriedades e axiomas, sendo a validação feita por meio de regras matemáticas, conforme Houdement e Kuzniak (1999);
- Geometria Axiomática Formalista ou Geometria III: o desenho representa uma classe de objetos não mais materializáveis (Salazar & Garcia-Cuella, 2020) e, segundo Kuzniak (2018a, p. 11, tradução), "usualmente não está presente na escolaridade obrigatória, mas que é a referência implícita dos professores de matemática com formação em matemática avançada".

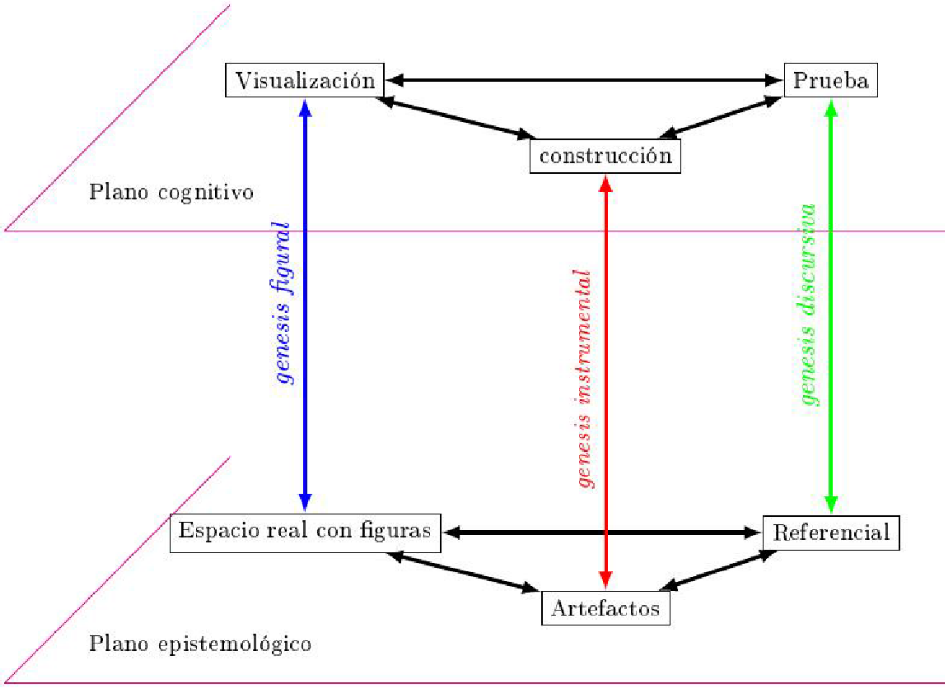
A partir de pesquisas de Houdement e Kuzniak (1999), surgiram mais trabalhos e pesquisadores interessados na temática e em desenvolver uma metodologia para o ensino e a aprendizagem em Matemática, "levando em consideração a ideia de espaço de trabalho" (Kuzniak, 2018b, p. 24).

Conforme Kuzniak, Montoya-Delgadillo e Vivier (2016), pode-se dizer que o ETG é um espaço organizado para promover a operação de trabalho geométrico (em contexto educativo), com base em dois planos. O primeiro deles com dimensão matemática, na qual se encontram três componentes: espaço real e local (como suporte material e com objetos tangíveis), conjunto de artefatos e um sistema de referência teórica (definições e propriedades). O outro, com dimensão cognitiva, adaptada das ideias de Duval (1995), na qual se tem, como componentes, a "visualização relacionada à decifração e interpretação dos sinais; construção em função dos artefatos utilizados e das técnicas associadas; prova transmitida por meio de processos de validação e com base no referencial teórico" (Kuzniak, 2018a, p. 12, tradução).

Esses planos se articulam por meio de três gêneses: a Figural, a Instrumental e a Discursiva, conforme Figura 1.

Kuzniak (2011) ampliou o ETG graças à colaboração de diversos pesquisadores, estendendo-o para outras áreas da Matemática e passou a chamá-lo de Espaço de Trabalho Matemático (ETM). O ETM é um ambiente organizado para estimular o trabalho matemático num contexto educativo, o qual articula os planos cognitivo e epistemológico para assegurar uma abordagem consistente no trabalho matemático (Kuzniak, 2011).

Figura 1: ETG e suas gêneses



Fonte: Kuzniak, Montoya-Delgadillo e Vivier (2016, p. 246).

Para atender a outras áreas da Matemática, a Gênese Figural passou a ser chamada de Gênese Semiótica e o componente do plano epistemológico "espaço real com figuras" passou a se chamar "representamen". Essa adequação é necessária para permitir uma melhor observação da atividade desenvolvida pelo sujeito em diferentes áreas ou domínios matemáticos perante a resolução de um problema matemático (Kuzniak et al., 2016).

Segundo esses autores, as gêneses facilitam a articulação entre os planos e são definidas da seguinte forma:

> Uma gênese instrumental que permite que artefatos sejam operados no processo construtivo. Uma gênese semiótica baseada em registros representacionais semióticos que garante aos objetos tangíveis do ETM seu status como objetos matemáticos operativos. Uma gênese discursiva da prova que dará sentido às propriedades de colocá-los a serviço do raciocínio matemático. (Kuzniak et al., p. 249).

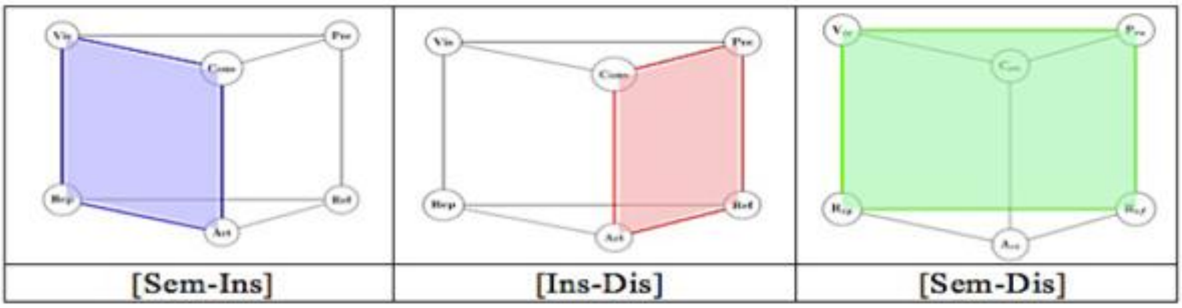
Com relação aos planos cognitivo e epistemológico, Kuzniak e Vivier (2019, p. 3072, tradução) comentam que

> O ponto de vista epistemológico é muito focado em conteúdo matemático com uma reflexão sobre a sua organização. Enquanto o ponto de vista cognitivo segue Abordagem de Duval em Geometria e enfoca os aspectos visíveis e tangíveis do assunto atividade. A interação das duas perspectivas foi alcançada colocando o trabalho matemático no centro da reflexão.

Sendo assim, o ETM deve favorecer o desenvolvimento das atividades matemáticas, tanto pelo aspecto do aprendizado do aluno quanto pela organização do ensino pelo professor.

Conforme Kuzniak e Nechache (2019), um trabalho matemático ou geométrico pode ser analisado, usando apenas uma das gêneses ou conjugando duas a duas em planos verticais para a execução de tarefas matemáticas cujas interações são específicas, conforme Figura 2.

Figura 2: Planos verticais do ETM



Fonte: Kuzniak e Nechache (2019, p. 884).

A Figura 2 pode ser melhor compreendida a partir do dito por Rivas e Kuzniak (2021, p. 1553, tradução) que, durante a realização de uma atividade:

- Os planos Semiótico e Instrumental [Sem-Ins] podem ser ativados quando “artefatos são usados para construir, sob certas condições, explorar representações ou descobrir novas propriedades, sem o propósito de validação”.
- Os planos Instrumental e Discursivo [Ins-Dis] são ativados simultaneamente “quando o teste é baseado em experimentação ou exploração e usa um artefato, ou na justificativa de uma construção” (Rivas & Kuzniak, 2021, p. 1553, tradução);
- Os planos Semiótico e Discursivo [Sem-Dis] podem ser ativados “quando a prova é coordenada com o processo de visualização de objetos representados, onde o status do raciocínio envolvido pode variar” (Rivas & Kuzniak, 2021, p. 1554, tradução).

O processo cognitivo no ensino e na aprendizagem de Geometria, conforme Duval (1995), envolve funções epistemológicas específicas, como a visualização, a construção e o raciocínio. Desta forma, para desenvolvê-lo, é necessário trabalhar com diferentes registros de representação para que o aluno tenha acesso aos objetos matemáticos, o que só ocorre por meio das representações e que, caso confundidas, ocasiona perda de compreensão segundo o autor.

O desenvolvimento do pensamento geométrico, de acordo com Duval (1995, 2005), é mobilizado quando trabalhado em pelo menos uma apreensão e esse pensamento envolve a capacidade de reconhecer, construir, descrever, analisar e operar sobre as figuras.

A presente pesquisa envolve mais os aspectos geométricos das representações algébricas e geométricas, buscando a mobilização de diferentes registros de representação semiótica de tópicos de superfícies parametrizadas e, por isso, o espaço de trabalho matemático abordado é o ETG.

3 Encaminhamentos metodológicos

A metodologia da pesquisa é do tipo qualitativo, em que o raciocínio “se baseia principalmente na percepção e na compreensão humana” (Stake, 2011, p. 21) e não apenas na representatividade numérica, pois, segundo Goldenberg, (2005, p. 14) “[...] na pesquisa qualitativa a preocupação do pesquisador não é com a representatividade numérica, mas com o aprofundamento da compreensão de um grupo social [...]”.

A pesquisa teve sua fase experimental com 3 estudantes do doutorado de um curso de pós-graduação de uma universidade confessional e comunitária de Santa Maria/RS, a partir do seu consentimento no Termo de Consentimento Livre e Esclarecido.

As atividades desenvolvidas foram estruturadas em quatro módulos, buscando a mobilização dos registros de representação semiótica e a articulação dos planos cognitivo e epistemológico. Cada módulo começava com um fragmento de uma pequena história introdutória, que envolvia alguns objetos, como mola maluca, cano de PVC, bola inflável e bolinha de gude, que lembravam representações de objetos matemáticos a serem estudados e, posteriormente, levados para a sala de aula. A partir da exploração desses objetos concretos, buscou-se a construção do conhecimento e o estudo dos tópicos de superfícies parametrizadas. Para tal, foi utilizado o software GeoGebra no estabelecimento de mobilização de diferentes registros de representação: algébrico/numérico e figura. Isso possibilitou a diversificação de representações.

Cada módulo é subdividido em três fases: fase I - introdução, a qual explora os conhecimentos prévios e a visualização, envolvendo materiais concretos; a fase II - investigação, realizada com a exploração de curvas e superfícies por meio do GeoGebra e/ou instrumentos de desenho; e, por último, a fase 3 – discussões, com a elaboração de uma síntese dos principais conceitos abordados com intuito de revisar o que fora trabalhado nas fases precedentes.

A ideia era que cada fase mobilizasse pelo menos uma das gêneses: a fase 1 visava a análise e a construção, por meio da visualização, dos conceitos envolvidos (para ativar a Gênese Figural); a fase 2 visava a mobilização da Gênese Instrumental (por meio de atividades investigativas no GeoGebra); e a fase 3 consistia na elaboração da síntese, justificada por propriedades e definições a fim de efetuar a validação, a prova ou evidências pragmáticas e intelectuais (para ativar a Gênese Discursiva).

Com relação aos conteúdos abordados, o módulo I estudou os aspectos gerais, diferenças e tipos de representações dos sólidos e das superfícies e foi dividido em dois encontros de 2h e 30 min. Os demais módulos são compostos de um encontro apenas: o módulo II estudou a parametrização do plano; o módulo III, a parametrização da superfície do cilindro circular reto; e o último módulo, a parametrização da superfície esférica.

Para a coleta de dados, foram usadas: as observações das produções; gravações de áudio e tela do GeoGebra; *print* de tela; anotações do pesquisador em seu diário de campo; sequência de atividades; registros escritos pelos acadêmicos; e registros figurais realizados no GeoGebra.

A análise dos dados teve, por base a tríplice análise de Duval (2011) adaptada ao ETG, na qual se buscou analisar: a) a compreensão (autonomia e progressão), os tratamentos e conversões, bem como a influência da visualização na construção dos conceitos; b) a razão (fatores que colaboraram para o sucesso) e quais gêneses foram mobilizadas e o PG evidenciado; c) análise matemática (validação e resolução), buscando verificar, também, os conceitos evidenciados ou adquiridos e se o objetivo do módulo foi alcançado.

Esse procedimento buscou auxiliar na discussão das contribuições encontradas no ETG elaborado. Na seção a seguir, apresentam-se resultados parciais de algumas atividades aplicadas na pesquisa.

4 Análise e discussão dos resultados

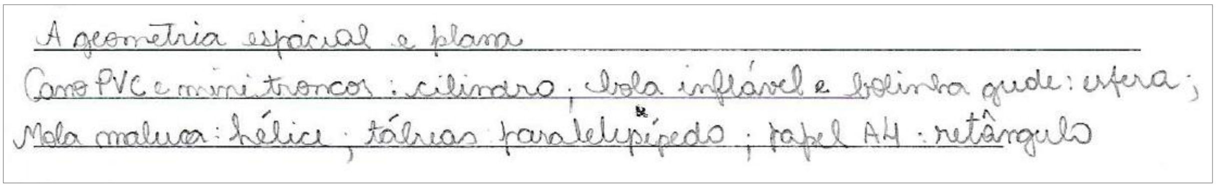
Para o presente artigo, escolheu-se analisar resultados parciais das atividades, isto é, algumas das atividades de cada módulo, a fim de dar uma visão geral do todo. No primeiro encontro, foi trabalhado o módulo I, que trabalha sólidos e superfícies e suas representações, no qual os alunos começaram lendo um fragmento da história. Por sentirem dificuldade de imaginar a situação, foi montado, na sala de aula, um cenário para representá-la, conforme Figura 3.

Figura 3: Cenário da história

Fonte: dados da pesquisa.

Ao tentarem imaginar a situação e descreverem quais as geometrias e formas geométricas poderiam ser representadas, notou-se que não distinguiam sólidos de superfícies, conforme Figura 4, que haviam sido empregados até o momento, apenas os recursos materiais.

Figura 4: Resposta do aluno B à letra a) da fase 1 no 1º encontro



A geometria espacial e plana
Cano PVC e mini troncos: cilindro; bola inflável e bolinha gude: esfera;
Mola maluca: hélice; tábuas: paralelepípedo; papel A4: retângulo

Fonte: dados da pesquisa.

Na resposta do aluno B, o registro em língua natural evidencia que a bola inflável (superfície esférica) e a bolinha de gude (esfera) são representações da mesma forma geométrica "esfera". O cano de PVC (superfície cilíndrica) é indicado como uma representação do cilindro. O pedaço de papel é considerado um retângulo, quando o correto seria uma região retangular (desprezando-se sua espessura).

Na questão seguinte, ao estabelecer conexões entre elementos geométricos e suas representações no cotidiano, os alunos usaram registros figurais (desenhos), registros algébricos/simbólicos (fórmulas do volume e área) e registros em língua natural (propriedades e definições das formas geométricas).

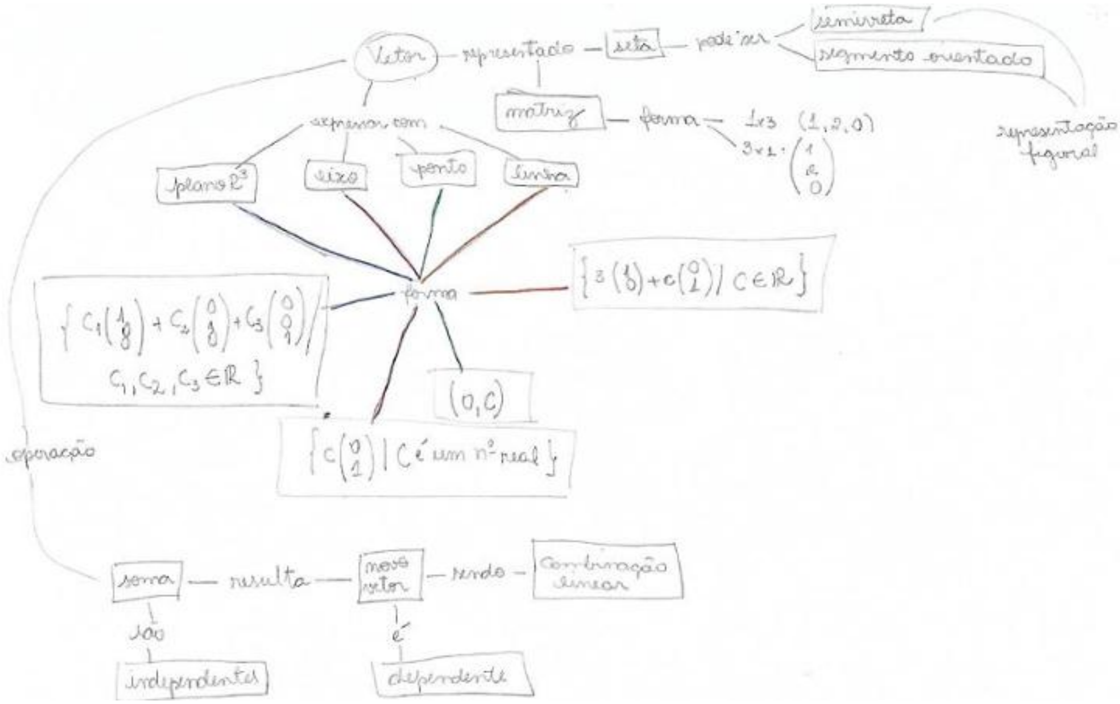
Os alunos mobilizaram conhecimentos sobre Geometria e Matemática associados a objetos do cotidiano que lembram formas geométricas, resgatando conhecimentos prévios e pressupondo, durante a realização das atividades, a percepção de representações geométricas em objetos do cotidiano mobilizada pela Gênese Figural.

Na fase 2, os alunos realizaram investigações no GeoGebra com a construção de um plano por meio de vetores linearmente independentes e verificaram que o produto vetorial de dois vetores dados é diferente de zero e mede a área do paralelogramo que eles determinam. Essa atividade foi apresentada no artigo “GeoGebra: artefato ou instrumento no estudo da adição de dois vetores pela regra do paralelogramo”.

Com essas investigações, os alunos ativaram dois planos simultaneamente, pois a construção da figura baseou-se em duas dimensões: instrumental, com o uso dos recursos materiais, e dimensão figural, devido à coordenação visual e interpretação (Kuzniak & Nechache, 2018).

Na fase 3, os alunos construíram mapas mentais, conforme Figura 5, que permitiram verificar o estabelecimento de conexões entre os elementos que não estavam mais acessíveis nesta fase, conectando unidades significativas.

Figura 5: Esquema 2 postado no Padlet pelo aluno C.



Fonte: dados da pesquisa.

As discussões, que eram esperadas apenas nessa atividade para ativar a Gênese Discursiva, ocorreram em todas as fases e observou-se que o compartilhamento de ideias durante a realização das atividades favoreceu a construção do conhecimento.

De forma geral, no primeiro módulo, observou-se, com relação à análise da compreensão, que os participantes conseguiram progredir nas construções ao transitar entre diferentes registros de representação, os quais auxiliaram no acesso e compreensão dos conceitos.

Quanto à análise das razões na Gênese Figural, percebeu-se o uso da visualização icônica (aspecto global) e, também, que os materiais manipulativos auxiliaram nas representações mentais, com predomínio de apreensões perceptivas e discursivas com estabelecimento de relações entre os conceitos e formas. Na Gênese Instrumental, mobilizaram-se as duas dimensões: instrumentação (ao desenvolver esquemas de ação instrumentada) e a instrumentalização (ao explorar as funções do artefato, no caso o GeoGebra). Já na Gênese Discursiva, as justificativas partem da construção e da identificação visual com apoio do referencial teórico da dimensão discursiva.

Na análise matemática, quanto à validação e resolução, ela se apresentou de forma gradual, com a maioria das respostas tidas como corretas e o estabelecimento de relações entre os conteúdos. Com relação aos conceitos evidenciados, destacou-se a diferenciação entre sólido e superfície, polígono e região poligonal, o estudo e a interpretação geométrica de vetores e produto vetorial e combinação linear.

O objetivo do módulo I foi alcançado quando ocorreu a articulação dos planos com o predomínio da Gênese Instrumental e a ativação dos planos verticais [Sem-Ins], pois privilegiou a identificação e a exploração dos objetos e [In-Dis], pois utilizam o instrumento para verificar propriedades (Kuzniak & Nechache, 2018).

O módulo I parte 2 e o módulo II ocorreram no segundo encontro, uma semana depois. Na primeira fase, ao explorar os conhecimentos prévios dos alunos, eles investigaram a diferença entre uma bolinha de gude e uma bola inflável, trazendo noções intuitivas de superfícies e como podem ser representadas. Para uma melhor compreensão, os alunos investigaram algumas curvas no GeoGebra como a circunferência e a reta na fase 2, na qual exploraram e analisaram equações cartesianas, paramétricas e vetoriais.

A figura 6 mostra uma das atividades aplicadas do módulo I parte 2.

Figura 6: Resposta do aluno B, questão 1 da atividade 2 do segundo encontro

a) A curva representada por essas equações é circunferência

b) O parâmetro t pode ser interpretado como ângulo de inclinação

c) Quando t aumenta de 0 até 2π, o ponto (x,y)=(cos(t), sem(t)) se move uma vez(es) ao redor do (a) circunferência no sentido anti-horário partindo do ponto (2,0).

d) Complete o quadro:

Equação cartesiana	Equação paramétrica	Equação vetorial
$x^2+y^2=4$	$F(t)=(0+2\cos t, 0+2\,\text{sen}\,t)$ $F(t)=(2\cos t, 2\,\text{sen}\,t)$ $0 \leq t \leq 2\pi$	$\vec{F}(t)=((0+2\cos t)\vec{i}, (0+2\,\text{sen}\,t)\vec{j})$ $\vec{F}(t)=((2\cos t)\vec{i}, (2\,\text{sen}\,t)\vec{j})$ $0 \leq t \leq 2\pi$

Fonte: dados da pesquisa.

Ao fazerem as construções no GeoGebra e responderem as alternativas a), b) e c), os alunos realizaram conversões do registro figural para o registro em língua natural e, na letra d), conversões do registro em língua natural para o registro algébrico/simbólico, mobilizando a Gênese Figural ao associarem o objeto matemático à sua representação por meio da visualização (Kuzniak, 2011).

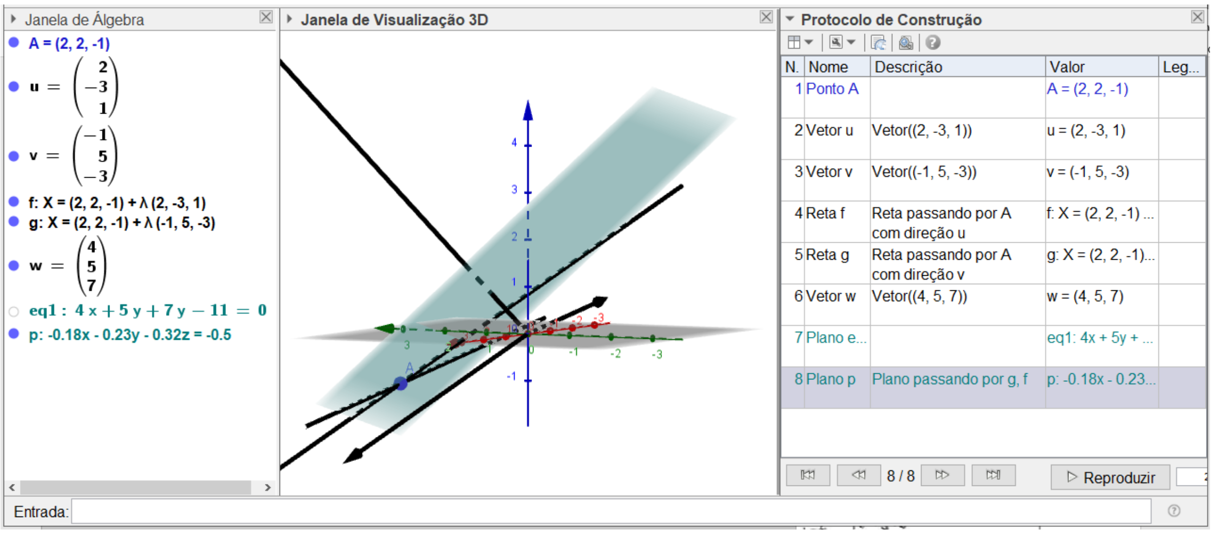
Ao se apropriarem do artefato para fazer as construções e verificar ou construir conhecimentos, os alunos transformam o artefato num instrumento para desenvolver o pensamento por meio da Gênese Instrumental, interligando o plano epistemológico ao plano cognitivo (Kuzniak, 2011).

A Gênese Discursiva é evidenciada na parte estratégica e teórica na dimensão discursiva quando se utiliza propriedades do referencial teórico a serviço do raciocínio matemático para justificar as comprovações das construções e visualizações (Kuzniak & Vivier (2019); Kuzniak, Montoya-Delgadilho & Vivier, 2016).

Pode-se intuir que a articulação dos planos cognitivo e epistemológico ocorre por meio do plano vertical [Sem-Dis], com vistas à comunicação e representação dos resultados (Kuzniak & Richard, 2014), dada a importância dos signos como suporte intuitivo para a compreensão do objeto matemático em estudo, buscando transpor o paradigma da GI para a GII, cujas conjecturas são validadas pelas regras algébricas vinculadas ao objeto de estudo e à figura e o suporte (Holdment & Kuzniak, 1999).

Após o estudo das curvas circunferência e reta, foi abordado o conceito de superfície parametrizada e explorada uma construção pronta da geração de uma superfície por meio de função vetorial. Com relação ao módulo II, que traz o estudo da parametrização do plano, na fase 1, os alunos relacionaram objetos que lembram essa forma geométrica e suas formas de representação, na qual tiveram mais facilidade. Na fase 2, a construção de um plano que passa por um ponto e é paralelo a dois vetores dados, possibilitou a ativação das gêneses e transitar entre diferentes registros de representação, conforme Figura 7.

Figura 7: Construção do aluno B para a questão 4, atividade 2 do módulo II



Fonte: dados da pesquisa.

Nessa fase, o aluno A apresentou dificuldades na articulação da Gênese Figural em alguns momentos da realização da atividade, devido a não ativação da Gênese Instrumental. Essas dificuldades foram superadas depois, o que auxiliou na ativação da Gênese Discursiva.

Na fase 3, os alunos apresentaram um resumo dos principais tópicos abordados: equações cartesianas, paramétricas e vetoriais da circunferência, da reta e do plano. Em alguns casos, esqueceram de definir o intervalo para as variáveis h e t das equações.

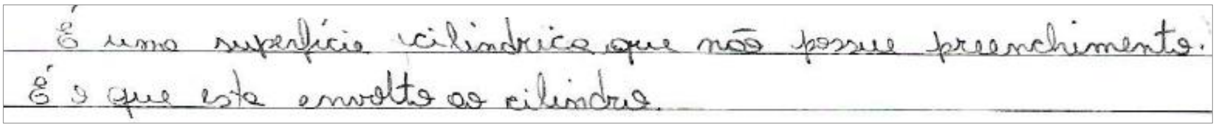
No fechamento da análise da sequência de atividades do segundo dia, referente ao módulo I (Parte 2) e ao módulo II, realizou-se uma análise global ancorada na tríplice análise de Duval (2011), adaptada para o ETG, e verificou-se, na análise da compreensão, que: os alunos estavam mais curiosos, investigativos e capazes de realizar diversos tratamentos e conversões. Notou-se que o Aluno A teve mais dificuldades nas construções no GeoGebra. Já na análise das razões, houve a ativação das três gêneses.

Na análise matemática, quanto à validação e resolução, a maioria das respostas estavam corretas e conseguiram fazer o estabelecimento de relações entre os conteúdos. Apenas um dos alunos não entregou todas as atividades. Evidenciou-se alguns conceitos como a diferença entre sólido e superfície, curvas (circunferência e reta) e suas equações (cartesiana, paramétricas e vetorial), superfície do plano e suas equações. O objetivo do módulo II foi alcançado e ocorreu a articulação dos planos com predomínio da Gênese Instrumental e ativação dos planos verticais

[Sem-Ins], pois privilegiou a identificação e a exploração dos objetos e [In-Dis], pois a exploração produziu o raciocínio (Kuzniak e Richard, 2014).

No módulo III, os alunos usavam uma linguagem mais matemática para expressar seus registros em língua natural, mas estavam com dificuldades de fazer a conversão do registro figural para o registro em língua natural para definir uma superfície cilíndrica circular reta na fase 1, conforme resposta do aluno A na Figura 8.

Figura 8: Resposta do aluno A à letra a) da fase 1 no 3º encontro

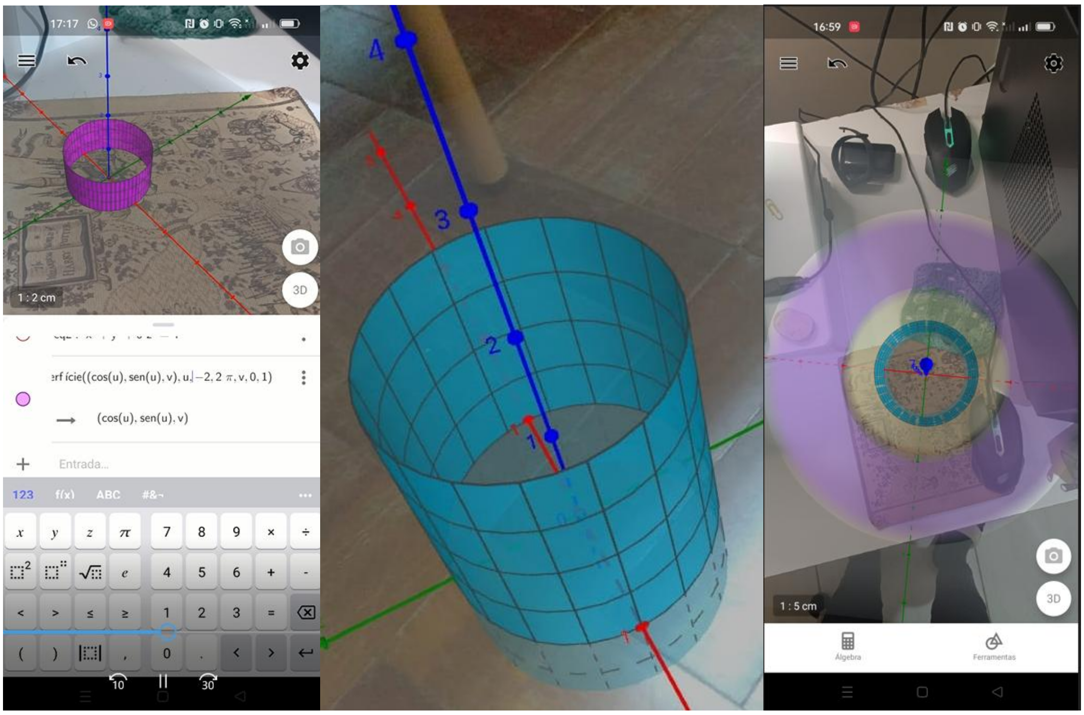

É uma superfície cilíndrica que não possue preenchimento.
É o que está envolto ao cilindro.

Fonte: dados da pesquisa

Ao comentar sua resposta, o aluno A disse que "uma superfície que não possui preenchimento, é o que está envolto ao cilindro, mas fica uma forma meio estranha também de se falar". Isso evidencia dificuldades em definir a superfície. Mas, ao serem indagados sobre formas de representação matemática para essa superfície, os alunos responderam que algumas maneiras seriam por meio de registros geométricos, equações cartesianas, paramétricas e vetoriais.

Na fase 2, os alunos fizeram uso da realidade aumentada com o *app* Calculadora Gráfica do GeoGebra e interagiram com objetos virtuais sobrepostos a um espaço real, inserindo primeiro a equação cartesiana e depois a paramétrica a fim de verificar se alguma coisa mudaria na visualização gerada pelo aplicativo. Além disso, também modificaram o valor das variáveis explorando a superfície, conforme a Figura 9.

Figura 9: Registros figurais de superfícies cilíndricas com a realidade aumentada



Fonte: dados da pesquisa.

Nessa atividade, foi possível observar com clareza a ocorrência da Gênese Figural, a partir da decodificação (reconhecimento perceptivo) e da codificação (ideia de figura como objeto simbólico) dos signos mediada pela visualização (a visualização aqui diz respeito à interpretação desses signos), conforme descritas por Kuzniak e Nechache (2018).

A construção abrange a mobilização da Gênese Instrumental (Rabardel, 1995), inicialmente com a instrumentalização, marcada pela exploração das funções e elementos disponíveis na RA. Depois, ocorre a instrumentação, pois a mediação entre o aluno e o *app* vai além das funções, tornando-se um instrumento para construção do conhecimento conforme os diferentes intervalos para u e v da equação da superfície cilíndrica serem testados, mobilizando a apreensão operatória.

A apreensão perceptiva dos participantes possibilitou a identificação do formato da figura, da apreensão discursiva e das propriedades geométricas envolvidas.

Os participantes ficaram entusiasmados e cheios de ideias para aplicar em suas aulas e, ao compararem a equação cartesiana com as equações paramétricas, notaram que as equações paramétricas eram melhores de serem visualizadas através do GeoGebra.

Outra atividade desse módulo que merece destaque é o cálculo do comprimento do arco de uma curva da hélice circular, dada sua equação e dois de seus pontos. Nessa atividade, a mola maluca serviu como uma representação da curva da hélice circular. Foram escolhidos dois pontos dessa curva, simbolizados por A e B, e verificado, intuitivamente, o que seria o comprimento de arco. Os conceitos de derivada foram retomados: integral, módulo, norma, radiciação e equação vetorial. Em seguida, foram feitas a representação geométrica no GeoGebra e os cálculos (registros algébricos/simbólicos) na folha da atividade.

A exploração visual evidencia a articulação da Gênese Figural com a Instrumental. Na dimensão semiótica, o reconhecimento perceptivo das formas evidencia uma visualização icônica, enquanto a interpretação da figura ou dos RAl/S são representados como um objeto simbólico que representa a hélice, isto é, uma visualização não icônica.

Observa-se que os alunos, ao dominarem a ferramenta, passam a utilizá-la como auxílio para mediar o conhecimento entre o artefato e o sujeito para fazer a figura. As discussões e trocas de ideias favoreceram a Gênese Discursiva, que serviu como fundamentação teórica ao objeto de estudo (superfície cilíndrica e hélice circular) e sentido às propriedades usadas no raciocínio matemático (Kuzniak, 2011).

Esse módulo durou mais de um encontro devido ao número de cálculos maior que os anteriores, os quais aconteciam sempre nas quintas-feiras, com duração aproximada de duas horas e meia. Assim, a continuação ocorreu na quinta-feira seguinte, quando foi realizado o estudo da reparametrização e a elaboração de um esquema com os principais tópicos abordados no módulo.

De modo geral, observou-se, com relação à análise da compreensão, que os participantes discutiram mais que nos encontros anteriores e tratamentos e conversões foram evidenciados.

Na análise das razões, com relação à Gênese Figural, percebeu-se que as atividades exigiram dos alunos uma maior apreensão figural para formulação e compreensão dos conceitos envolvidos.

Já na Gênese Instrumental, os participantes conseguiram transformar o artefato em instrumento para a aprendizagem. Na Gênese Discursiva, ocorreu o predomínio de evidências pragmáticas e intelectuais.

Na análise matemática, quanto a validação e resolução, observou-se dificuldade na resolução das atividades 3 e 4, pois envolviam vários conceitos matemáticos. Ficaram evidenciados conceitos como a diferença entre cilindro e superfície cilíndrica, equações paramétricas, cartesiana e vetorial da superfície cilíndrica, comprimento de arco, derivada, integral, norma, módulo e reparametrização. Os objetivos do módulo foram alcançados e a articulação dos planos envolveu as 3 gêneses e a ativação dos 3 planos verticais.

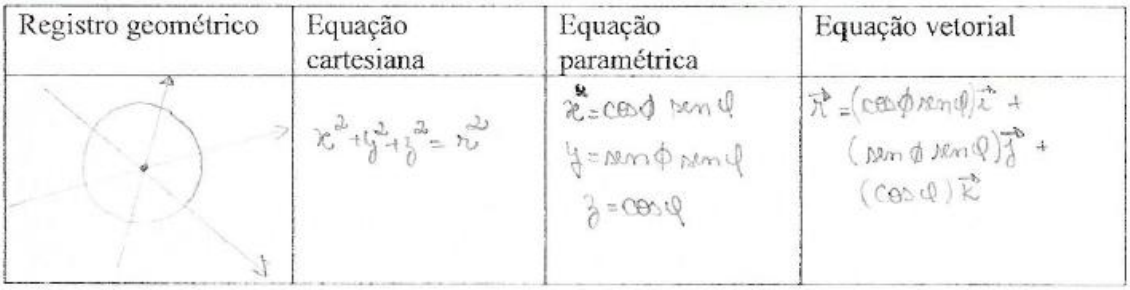
O último módulo, sobre a parametrização da superfície esférica, iniciou-se no quarto encontro e foi finalizado no quinto encontro. Na primeira fase os alunos, ao lerem o fragmento da história, refizeram os passos com a bolinha de isopor (que representava a bola inflável) e com os atilhos de borracha, o que resultou num comparativo, de forma intuitiva, entre os elementos da Geometria Euclidiana e da Geometria esférica. Essa atividade pode ser conferida na íntegra através do artigo “Mobilização da Gênese Figural no estudo introdutório da Geometria Esférica”.

Percebe-se que a experimentação, a argumentação e a visualização de maneira intuitiva auxiliaram na construção do pensamento geométrico envolvendo a comparação de duas Geometrias: a Euclidiana e a Esférica. Além disso, a ativação do plano vertical [Sem-Dis] na organização do raciocínio ocorre por meio da apreensão perceptiva, em que as transformações visuais estruturam a descrição dos experimentos e organizam um raciocínio perceptivo (Gómez-Chacón & Kuzniak, 2015).

Em seguida, os alunos investigaram, sem serem solicitados, no GeoGebra e também por meio da realidade aumentada, como seria a equação da superfície esférica. Foi observado que o aluno C começou com a equação da circunferência, depois testou valores para o centro e colocou uma terceira coordenada z, chegando à conclusão de que $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ era a equação da superfície plotada.

Em uma das questões dessa fase, os alunos representaram geometricamente e algebricamente superfícies esféricas e depois completaram um quadro, conforme figura 10.

Figura 10: Imagem do quadro do aluno B, questão 6 da fase 1 no 5º encontro



Registro geométrico	Equação cartesiana	Equação paramétrica	Equação vetorial
	$x^2+y^2+z^2=r^2$	$x=\cos\phi \operatorname{sen}\varphi$ $y=\operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\varphi$ $z=\cos\varphi$	$\vec{r}=(\cos\phi \operatorname{sen}\varphi)\vec{i}+(\operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\varphi)\vec{j}+(\cos\varphi)\vec{k}$

Fonte: dados da pesquisa.

O aluno B, neste dia, estava *online*. Não colocou o intervalo nas equações e seu registro geométrico não ficou correto (Figura 10). Dessa forma, não conseguiu fazer a conversão do RAl/S para o RF, o que evidenciou pontos de bloqueio.

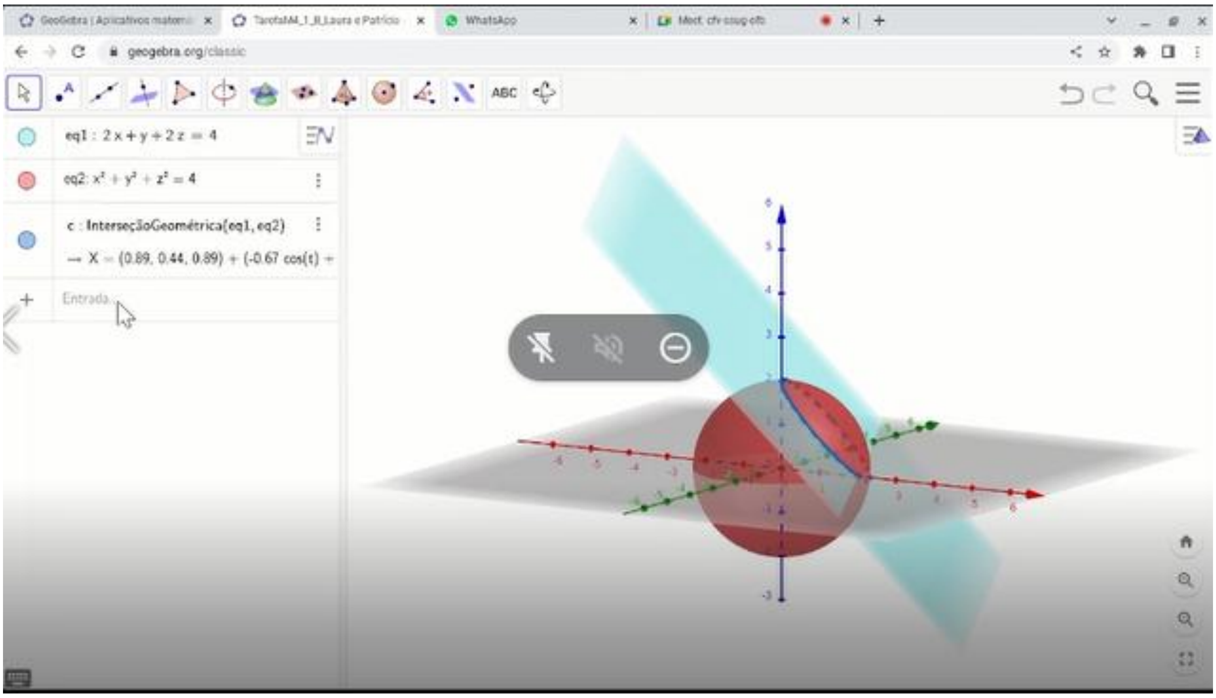
Percebe-se que o GeoGebra permitiu a construção e a visualização do registro figural, ao identificar a superfície pelo uso do referencial e a interpretação, ativando uma Gênese Figural por meio do plano vertical [Sem-Ins].

Na fase 2, ressalta-se a construção e investigação de um plano tangente a uma superfície esférica e a determinação de uma área da região limitada pela interseção das duas superfícies, $2x+y+2z=4$ e $x^2+y^2+z^2=4$, que proporcionaram várias discussões em torno dos conhecimentos envolvidos. Por exemplo, nessa última questão, os alunos a leram e olharam as equações e foram indagados sobre quais superfícies as equações representavam. Prontamente, responderam que a segunda se tratava de uma superfície esférica de centro na origem e de raio 2.

Na primeira equação, os alunos descartaram a hipótese de ser um cilindro, por conta das variáveis x, y e z não estarem elevadas ao quadrado. Também tinham certeza de não ser uma reta, logo chegaram à conclusão de que tal operação era a equação do plano.

Em seguida, por meio da construção no GeoGebra e da conversão do registro algébrico/simbólico para o registro figural, os alunos verificaram se a imagem mental construída dessa interseção correspondia ao registro figural, como pode ser conferido na Figura 11.

Figura 11: Construção do aluno C da atividade 3, fase 2 no 5º encontro



Fonte: dados da pesquisa

Para a construção do registro figural, os alunos ativaram a Gênese Instrumental e, por meio da visualização icônica associada ao reconhecimento perceptivo das formas e não icônica com a interpretação dos signos (Gómez-Chacón & Kuzniak, 2015), conseguiram relacionar esse registro ao objeto matemático em estudo, ativando a Gênese Figural. Depois, efetuaram tratamentos dentro do registro algébrico/simbólico para calcular a área da região limitada.

Na fase 3, ocorreu a organização do esquema resumo do que fora visto no módulo com os diferentes registros de representação dos registros algébricos/simbólicos e dos geométricos das equações cartesianas, paramétricas e vetoriais das curvas e superfícies estudadas.

Esse esquema resumo permitiu que os alunos verificassem quais conexões entre os elementos envolvidos conseguiram estabelecer, revisando o que fora estudado nos módulos. Nota-se pelas discussões entre eles que o compartilhamento de ideias favoreceu a construção do conhecimento.

Ao fim da análise da sequência de atividades do módulo IV, percebeu-se, com relação a análise da compreensão, maior desenvoltura no uso de artefatos e processos de visualização para o entendimento e construção de conceitos.

Na análise das razões, a Gênese Figural evidenciou a passagem da visualização icônica para a não icônica e diferentes olhares do botânico ao construtor e inventor. A Gênese Instrumental ocorreu por meio da manipulação dos materiais concretos e dinâmicos, que possibilitaram a construção de falas explicativas a partir da percepção dos alunos. Na Gênese Discursiva, foi constatado o predomínio de provas pragmáticas e intelectuais, como o seguimento de regras de resolução dentro do mesmo registro e tratamento algébrico/simbólico para obtenção do resultado baseado no referencial teórico.

Já na análise matemática, quanto à validação e a resolução, notou-se que os alunos tiveram o cuidado de indicar a variação dos parâmetros nos diferentes registros das equações de uma superfície ou curva. As respostas nos RAl/S foram mais complexas se comparadas aos módulos anteriores, mas os alunos as resolveram com mais facilidade.

Verificou-se que o objetivo do último módulo também foi alcançado e que os conceitos evidenciados foram os seguintes: noções intuitivas de elementos da Geometria Euclidiana e Esférica; equações cartesiana, paramétrica e vetorial da superfície esférica; vetor normal e vetor tangente; plano tangente à superfície esférica; cálculo da área da região delimitada pela interseção de duas superfícies; e derivada e integral dupla.

5 Considerações finais

Embora não esteja no escopo deste artigo, discussões partindo do material concreto por meio das percepções e visualizações, por exemplo a distinção entre sólido e superfície, que perpassa construções no GeoGebra para analisar a parte algébrica e a figural, além do uso de realidade aumentada, contribuíram para a construção do conceito de superfícies parametrizadas, transitando entre equações cartesianas, paramétricas e vetoriais. Isso possibilitou que os participantes da pesquisa adquirissem uma noção geral do estudo das superfícies, mobilizando as gêneses figurais, instrumentais e discursivas. Assim, a articulação dos planos cognitivo e epistemológico foi ativada, de forma a contribuir para o ensino e a aprendizagem, visto que os participantes são professores que atuam na rede de Educação Básica e suas aprendizagens podem ser implementadas no ensino escolar.

As atividades realizadas na pesquisa colaboraram para evidenciar o ETG proposto, o que favoreceu o desenvolvimento de conhecimentos geométricos, como os conceitos de geodésica e curvas de comprimento mínimo entre dois pontos através da exploração da visualização com o uso de recursos materiais manipuláveis, bem como o GeoGebra, no qual era possível comparar e analisar as figuras e as equações, mobilizando as Gêneses semiótica, instrumental e discursiva.

Nas respostas dos participantes, foi possível perceber aspectos algébricos, visuais e geométricos nas atividades desenvolvidas, seja ao manipular os objetos concretos ou usar as TIC’s, o que favoreceu a construção de conceitos e propriedades matemáticas expressas em forma de registros de representação em língua natural, figural e algébrico/simbólico. Segundo Duval (2011), transitar entre os diferentes registros contribui para a compreensão matemática.

A pesquisa auxiliou na estruturação do pensamento geométrico e na mobilização de diferentes registros de representação para a compreensão dos conteúdos de uma geometria em nível superior, favorecendo a articulação dos planos cognitivo e epistemológico pelas gêneses, seja no processo semiótico, instrumental ou discursivo.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Referências

Duval, R. (1988). Écarts sémantiques et cohérence mathématique: introduction aux problèmes de congruence. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 1*, 7-25.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 10*, 5–54.

Duval, R. (2011). *Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representação semióticas*. Proem.

Goldenberg, M. (2005). *A arte de pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais*. Record.

Gómez-Chacón, I. M. & Kuzniak, A. (2015). Spaces for geometric work: Figural, instrumental, and discursive geneses of reasoning in a technological environment. *International Journal of Science and Mathematics Education, 13*, 201–226.

Gómez-Chacón, I. M., Kuzniak, A. & Vivier, L. (2016). El rol del profesor desde la perspectiva de los espacios de trabajo matemático. *Bolema, 30*(54), 1-22.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (1999). Un exemple de cadre conceptuel pour l'étude de l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. *Educational Studies in Mathematics, 40*, 283-312.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 11*, 175–193.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de travail mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 16*, 9-24.

Kuzniak, A. (2018a). Thinking about the teaching of geometry through the lens of the theory of geometric working spaces. In T. P. Herbst et al. (Eds.), *International perspectives on the teaching and learning of geometry in secondary schools* (pp. 5-21). Springer.

Kuzniak, A. (2018b, dezembro). La théorie des espaces de travail mathématique: développement et perspectives. *El Sexto Simposio de Trabajo Matemático (ETM6)*, 21-40.

Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E. & Vivier, L. (2016, maio). El espacio de trabajo matemático y sus génesis. *Revista Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 11*(15), 237-251.

Kuzniak, A. & Nechache, A. (2018, dezembro). Une méthodologie pour analyser le travail personnel d'étudiants dans la théorie des espaces de travail mathématique. *El Sexto Simposio de Trabajo Matemático (ETM6)*, 61-70.

Kuzniak, A. & Richard, P. R. (2014). Espacios de trabajo matemático: Puntos de vista y perspectivas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (Relime), 17*(4-1), 5-39.

Kuzniak, A. & Vivier, L. (2019). An epistemological and philosophical perspective on the question of mathematical work in the mathematical working space theory. In U. T. Jankvist, M. Van Den Heuvel-Panhuizen & M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the eleventh congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 3070-3077). Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies: une approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin.

Rivas, C. H. & Kuzniak, A. (2021, dezembro). Profundización en el trabajo geométrico de futuros profesores en entornos tecnológicos y de lápiz y papel. *Bolema, 35*(71), 1550-1572.

Salazar, J. V. F. & García-Cuéllar, D. J. (2020). Paradigmas geométricos en el trabajo matemático de docentes en formación continua. *Plurais - Revista Multidisciplinar*, *5*(2), 58–77.

Simonetti, D. & Moretti, M. T. (2021, janeiro). Base Nacional Comum Curricular do Ensino Médio e Registros de Representação Semiótica: uma articulação possível? *Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática - RIPEM*, *11*(1), 99-117.

Souza, M. B., Fontes, B. C. & Borba, M. C. A. (2019). Coparticipação da Tecnologia Digital na Produção de Conhecimento Matemático. *Sisyphus - Journal of Education*, *7*(1), 62-82.

Stake, R. E. (2011). *Pesquisa qualitativa: estudando como as coisas funcionam*. Penso.