

O uso do GeoGebra como ferramenta para o ensino do tabuleiro e dos ladrilhamentos de Padovan

Renata Passos Machado Vieira

Secretaria de Estado de Educação do Ceará

Fortaleza, CE — Brasil

✉ re.passosm@gmail.com

id [0000-0002-1966-7097](https://orcid.org/0000-0002-1966-7097)

Francisco Regis Vieira Alves

Instituto Federal do Ceará

Fortaleza, CE — Brasil

✉ fregis@gmx.fr

id [0000-0003-3710-1561](https://orcid.org/0000-0003-3710-1561)

Paula Maria Machado Cruz Catarino

Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro

Vila Real — Portugal

✉ pcatarino@gmail.com

id [0000-0001-6917-5093](https://orcid.org/0000-0001-6917-5093)



2238-0345 

10.37001/ripen.v15i1.3995 

Recebido • 15/06/2024

Aprovado • 09/11/2024

Publicado • 27/01/2025

Editor • Gilberto Januario 

Resumo: O presente estudo é parte de uma pesquisa de doutorado em andamento, que investiga o ensino da abordagem combinatória de Padovan e a escassez de trabalhos sobre esse tema. O objetivo é propor uma abordagem para explorar as identidades combinatórias com o auxílio do GeoGebra. Essa abordagem visa fornecer suporte teórico ao professor para compreender e ensinar a abordagem combinatória de forma visual, por meio de uma situação didática apoiada na construção de atividades no software. A metodologia adotada é a Engenharia Didática em suas duas primeiras fases, dada a natureza da pesquisa em andamento, e a sessão de ensino foi estruturada seguindo as fases da Teoria das Situações Didáticas. Espera-se que essa proposta contribua para a possível integração do GeoGebra ao ensino de História da Matemática, considerando o potencial impacto de uma abordagem visual do tema na prática docente.

Palavras-chave: Engenharia Didática. GeoGebra. História da Matemática. Sequência de Padovan.

Using GeoGebra as a tool for teaching the Padovan board and tiling

Abstract: This study is part of ongoing doctoral research investigating the teaching of Padovan's combinatorial approach and the scarcity of works on this topic. The objective is to propose an approach to explore combinatorial identities with the help of GeoGebra. This approach aims to provide theoretical support to the teacher to understand and teach the combinatorial approach visually through a didactic situation supported by the construction of activities in the software. The methodology adopted is didactic engineering in its first two phases, given the nature of the ongoing research, and the teaching session was structured following the phases of the theory of didactic situations. This proposal is expected to contribute to the possible integration of GeoGebra into the teaching of the history of mathematics, considering the potential impact of a visual approach to the topic in teaching practice.

Keywords: Didactic Engineering. GeoGebra. History of Mathematics. Padovan Sequence.

El uso de GeoGebra como herramienta para la enseñanza del tablero y del mosaico de Padovan

Resumen: El presente estudio es parte de una investigación doctoral en curso, que investiga la

enseñanza del enfoque combinatorio de Padovan y la escasez de trabajos sobre este tema. El objetivo es proponer un enfoque para explorar identidades combinatorias con la ayuda de GeoGebra. Este enfoque tiene como objetivo brindar apoyo teórico al docente para comprender y enseñar el enfoque combinatorio de manera visual, a través de una situación didáctica apoyada en la construcción de actividades en el software. La metodología adoptada es la Ingeniería Didáctica en sus dos primeras fases, dada la naturaleza de la investigación en curso, y la sesión docente se estructuró siguiendo las fases de la Teoría de Situaciones Didácticas. Se espera que esta propuesta contribuya a la posible integración de GeoGebra en la enseñanza de la Historia de las Matemáticas, considerando el impacto potencial de un abordaje visual del tema en la práctica docente.

Palabras clave: Ingeniería Didáctica. GeoGebra. Historia de las Matemáticas. Sucesión de Padovan.

1 Introdução

O estudo de sequências recorrentes é amplamente explorado em diversas áreas, proporcionando oportunidades para aplicações práticas que enriquecem a compreensão e visualização de conceitos e identidades matemáticas. Um exemplo bastante conhecido por pesquisadores é a sequência de Fibonacci, que possui diversas aplicações em campos tão diversos quanto Biologia, Física e muitos outros (Bergum, Philippou & Horadam, 1996). Essa ampla gama de aplicações destaca a relevância e a versatilidade das sequências recorrentes como ferramentas fundamentais em diferentes disciplinas e contextos.

Observa-se que a maioria dos autores de livros de História da Matemática tende a focar em curiosidades e ilustrações relacionadas à sequência de Fibonacci (Burton, 2007). No entanto, muitos desses autores deixam de considerar aspectos importantes, como as contribuições matemáticas e o pioneirismo do criador da sequência de Fibonacci, bem como o processo evolutivo das sequências.

Assim, a presente pesquisa delimita-se ao estudo da abordagem combinatória de Padovan, sendo essa sequência de terceira ordem e possuindo algumas semelhanças com a sequência de Fibonacci. Para tanto, vale destacar a evolução das sequências, de um modo geral, integrando com outros conteúdos matemáticos; a exemplo disso, tem-se a interpretação combinatória e as sequências (Koshy, 2001). Logo, são realizados modelos combinatórios para as sequências recorrentes, permitindo uma generalização em relação à ordem, segundo o estudo de Benjamin e Quinn (2003).

Por outro lado, observa-se uma inexistência desses conteúdos direcionados para a educação, com a maioria dos estudos concentrando-se na área da Matemática Pura. Diante disso, surge a proposta de realizar uma investigação sobre a abordagem combinatória de Padovan, voltada especificamente para a formação inicial de professores de matemática. Este estudo visa não apenas explorar a história matemática por trás desses números, mas também utilizar o GeoGebra como ferramenta para possibilitar aos professores visualizarem as identidades matemáticas de forma mais dinâmica e interativa.

O objetivo deste trabalho é apresentar uma proposta de ensino que adota uma abordagem visual para a interpretação combinatória de Padovan, direcionada para a Licenciatura em Matemática (Formação Inicial de Professores), utilizando o software GeoGebra como recurso. Para isso, a pesquisa é fundamentada na teoria das situações didáticas (Brousseau, 2002), que orienta o planejamento de uma sessão de ensino, e na Engenharia Didática (Artigue, 2020), escolhida como metodologia de pesquisa devido à sua estreita relação com a teoria das situações didáticas. Essas abordagens proporcionam um arcabouço teórico robusto para o

desenvolvimento da proposta didática e para a investigação dos processos de ensino e aprendizagem envolvidos.

Nesse sentido, a presente pesquisa possui o viés de explorar a tradição francesa da Didática da Matemática, implementando a Engenharia Didática como metodologia de pesquisa. Desse modo, a Engenharia Didática, segundo Calderón e León (2012), apresenta uma correlação entre uma análise epistêmica e a implementação de uma estrutura didática. Os autores afirmam que a particularidade essencial desta metodologia de pesquisa é a análise fornecida durante o desenho das atividades (*a priori*) e a análise após a respetiva implementação (*a posteriori*).

Diante da viabilidade de visualização e das restrições das pesquisas existentes sobre o tema, sugere-se a utilização do GeoGebra para explorar as identidades combinatórias de Padovan. Essa abordagem pode enriquecer o processo de ensino na prática docente do professor de Matemática, oferecendo uma ferramenta poderosa para ilustrar e compreender conceitos complexos de forma mais acessível e dinâmica.

Para tanto, trata-se de um trabalho teórico, sem dados empíricos seguindo o itinerário da Engenharia Didática e da Teoria das Situações Didáticas. Desse modo, são utilizadas as duas primeiras fases: análises preliminares e concepção e análise *a priori*, não havendo prejuízo para a pesquisa, uma vez que as demais fases poderão ser utilizadas em trabalhos futuros.

Com base no exposto, nas seções seguintes, é apresentado o delineamento das duas primeiras fases da Engenharia Didática: análises preliminares e *a priori*. Essas fases são abordadas com um enfoque teórico, dado o caráter desta proposta didática.

2 Análises preliminares

Durante as análises preliminares e nas demais fases do projeto, é possível perceber a influência da Teoria das Situações Didáticas na metodologia de pesquisa da Engenharia Didática. A fase das análises preliminares revela a inclusão sistemática do componente epistemológico. O desenho das tarefas e situações é realizado de forma particular, fornecendo importância perante a procura de situações que captem a essência epistemológica da matemática a aprender, para a otimização do potencial do meio para estudar aprendizagem autônoma dos alunos, e para a gestão dos processos de desconcentração e institucionalização (Artigue & Perrin Glorian, 1991). A Engenharia Didática tem sua base na Teoria das Situações Didáticas, cumprindo um duplo papel: servir como uma abordagem de produção para o ensino embasada em resultados de pesquisa e ao mesmo tempo, desempenhar o papel de uma metodologia de pesquisa (Ferreira, 2016).

À vista disso, a pesquisa apresenta os resultados de cada uma das fases da Engenharia Didática. Inicialmente, realizou-se uma análise epistêmica do desenvolvimento evolutivo da sequência de Padovan diante de sua abordagem combinatória. Também procuramos verificar se existem investigações que envolvem a articulação entre a abordagem combinatória de Padovan e o GeoGebra. A seguir, estabelecemos uma concepção e análise *a priori* baseadas em um rastreamento do tipo documental derivado do estado da arte, com foco na interpretação da abordagem combinatória desses números. As análises preliminares são a base para a fase de concepção do processo, envolvendo diferentes dimensões, e especialmente as três seguintes:

Análise epistemológica do conteúdo em questão, abordando a parte histórica. Essa análise auxilia os pesquisadores a fixarem os objetivos previstos, como também a identificação dos possíveis obstáculos epistemológicos a serem enfrentados. Essa análise ainda fornece suporte perante as buscas de situações matemáticas representativas do conhecimento almejado,

denominada pela Teoria das Situações Didáticas de situação fundamental. Uma situação fundamental é tida como situações problemáticas cuja resolução precisa deste conhecimento. A análise epistemológica auxilia os pesquisadores a conquistarem a posição necessária em relação ao ambiente educacional em que estão inseridos.

Análise institucional, identificando as características do contexto em que se insere a Engenharia Didática, as condições e constrangimentos enfrentados. Essas condições e constrangimentos podem situar-se em diferentes níveis, chamados de hierarquia dos níveis de co-determinação (Chevallard, 2002). Estes podem ainda estar associados a: escolhas curriculares, aos conteúdos referentes às práticas pedagógicas associadas, às características curriculares mais gerais, ao ensino da disciplina, aos recursos (tecnológicos) acessíveis, às práticas avaliativas, à organização escolar, às características dos estudantes e professores envolvidos, à forma como a escola se relaciona com o seu ambiente e entre outros. Dependendo dos objetivos precisos e do contexto da investigação, a importância atribuída a estes diferentes níveis pode sofrer variações.

Análise didática, construindo o que a pesquisa tem a oferecer referente ao processo de ensino-aprendizagem do conteúdo em questão e, se essa é susceptível de orientar o design.

3 A sequência de Padovan e sua abordagem combinatória

A análise de sequências numéricas recorrentes geralmente se destaca ao examinar a sequência de Fibonacci, dada sua relevância histórica, embora negligencie outros aspectos essenciais de sua contribuição matemática (Burton, 2007). Como resultado, outras sequências numéricas recorrentes permanecem desconhecidas, não recebendo a devida atenção nos cursos de formação inicial de professores, como é o caso da sequência de Padovan, que possui pouca exploração no âmbito da graduação em matemática (Vieira, Alves & Catarino, 2022).

A sequência de Padovan é uma sequência recorrente de terceira ordem, possuindo uma relação de recorrência específica. Seu nome é atribuído ao arquiteto italiano Richard Padovan (Stewart, 1996; Vieira, 2020). Essa relação é representada por: $P(n)=P(n-2)+P(n-3)$, com $n \geq 3$ e $P(0)=P(1)=P(2)=1$, onde $P(n)$ é o n -ésimo termo da sequência.

Marohnic, Kovacic e Radisic (2013) afirmam que o estudo de Padovan teve como base o trabalho do arquiteto Hans Van Der Laan (1904-1991), que descobriu um novo número irracional chamado de número plástico. Entretanto, segundo pesquisas, esse número foi investigado anteriormente por Gérard Cordonnier (1907-1977), o que tornou essa sequência conhecida como sequência de Hans Van Der Laan ou Cordonnier (Alves & Catarino, 2022).

A partir de estudos relacionados às propriedades do número de ouro, também conhecido como proporção divina, surgiu a definição dos números mórficos. Esses números apresentam apenas duas soluções: o número plástico e o número de ouro. Desse modo, observa-se a relação existente entre as sequências de Fibonacci e Padovan (Aarts, Follink & Kruijtzter, 2001).

Nesse contexto, a investigação da interpretação combinatória da sequência de Padovan destaca-se como uma contribuição para o ensino de Matemática, oferecendo uma abordagem relevante a partir de um desenvolvimento via Engenharia Didática. O campo acadêmico tem sido enriquecido por uma série de trabalhos dedicados a explorar as propriedades combinatórias de sequências recorrentes. Entre esses estudos, destacam-se algumas contribuições significativas como as de Benjamin e Quinn (2003), Koshy (2001), Spreafico (2014), Vieira, Alves e Catarino (2022) e Tedford (2019).

Esses pesquisadores têm apresentado abordagens inovadoras e análises aprofundadas, aprimorando a compreensão, não apenas da sequência de Padovan, mas também do potencial

pedagógico subjacente à interpretação combinatória em sequências matemáticas recorrentes. A intersecção entre estas investigações não apenas enriquece o corpo de conhecimento teórico-matemático, mas também proporciona oportunidades enriquecedoras para o desenvolvimento curricular e práticas pedagógicas mais eficazes no ensino de Matemática.

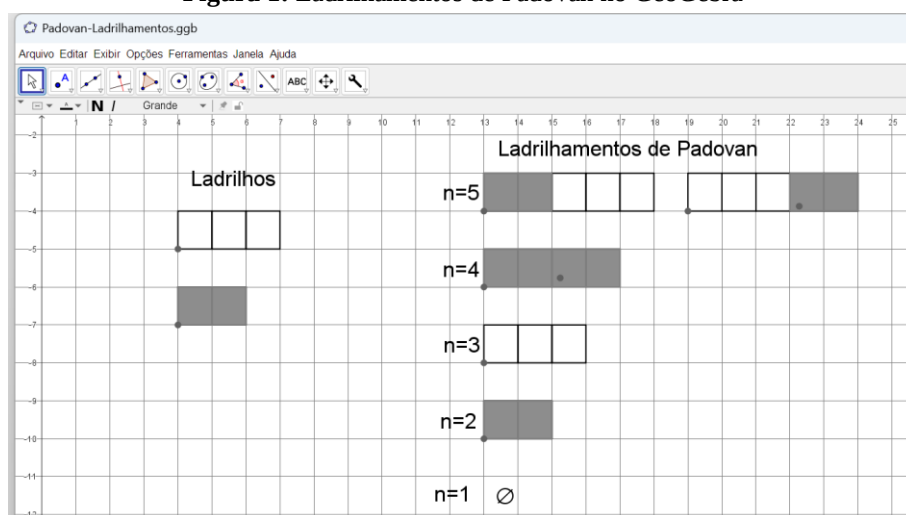
Diante da conexão entre estes números, surgiu a motivação para explorar outras sequências, potencializando seus respectivos desenvolvimentos epistemológicos e matemáticos. De fato, percebemos o caráter inovador em relação à evolução matemática de Padovan proporcionando aos participantes da pesquisa uma oportunidade de estudo única. Esse fato justifica o interesse em desenvolver uma proposta de ensino para o estudo desta sequência, com destaque para o modelo combinatório desses números.

No âmbito dos tabuleiros, tem-se que a sua formação é dada pela composição de quadrados chamados *células*, enumerados para descrever posições específicas, definidas como um *n*-tabuleiro. Os ladrilhos são as peças utilizadas para o preenchimento de um tabuleiro, enquanto os ladrilhamentos são a forma de cobri-lo (Spreafico, 2014).

Destaca-se que o modelo combinatório trata do estudo da interpretação combinatória de uma sequência, sendo este realizado nesta pesquisa por meio de ladrilhamentos.

Tedford (2019) introduziu os ladrilhamentos de Padovan utilizando os ladrilhos dominó cinza de tamanho 1×2 e triminó branco de tamanho 1×3 para cobrir um *n*-tabuleiro. Com isso, a pesquisa apresenta o teorema em que denomina como $p(n)$ a quantidade de formas de cobrir um *n*-tabuleiro de Padovan e $P(n)$ como o *n*-ésimo termo da sequência. Tão logo, tem-se que $p(n)=P(n-2)$, para $n \geq 2$. Na Figura 1 há um exemplo que retrata os casos para $n=1,2,3,4,5$.

Figura 1: Ladrilhamentos de Padovan no GeoGebra



Fonte: Adaptado de Tedford (2019)

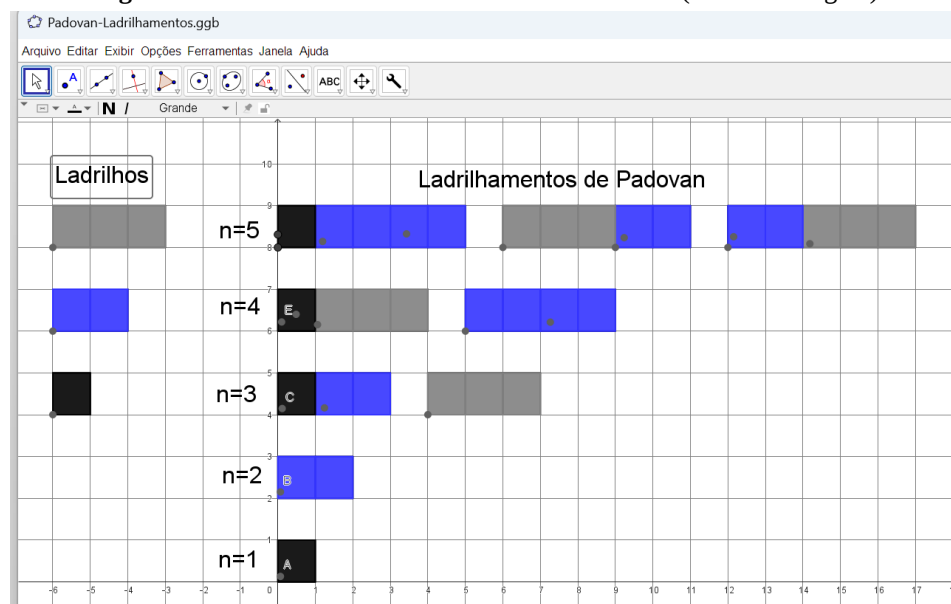
Note que para $n=1$, não existem ladrilhamentos possíveis com os respectivos ladrilhos disponíveis. Para $n=2$ existe somente 1 ladrilhamento, sendo este formado pelo dominó. Para $n=3$ também só existe 1 ladrilhamento, apresentando somente o triminó. Para o caso $n=4$ existe 1 ladrilhamento, sendo este composto pela concatenação de 2 dominós.

Vieira, Alves e Catarino (2022) estudaram a generalização dos ladrilhamentos de Padovan, apresentando o modelo combinatório para a extensão dos números de Padovan. Assim, tem-se o teorema que trata da quantidade de formas de ladrilhar ($p(n)$), com a existência dos ladrilhos: quadrado preto, dominó azul de tamanho 1×2 e triminó cinza de tamanho 1×3 . Porém, para esse modelo, existe uma regra de construção em que a inserção do quadrado preto

poderá ocorrer apenas ao complementar os ladrilhamentos. Logo, este só poderá ser inserido uma única vez e no início do tabuleiro. Desse modo, temos que para $n \geq 1$, os possíveis ladrilhamentos de um tabuleiro $1 \times n$ são dados por $p(n)=P(n)$, onde $P(n)$ representa o n -ésimo termo da sequência de Padovan.

A Figura 2 apresenta diversos casos abordados pelo teorema, propostos por Vieira, Alves e Catarino (2022), proporcionando uma visualização esclarecedora dos ladrilhamentos e suas configurações correspondentes em relação às peças disponíveis. Esta representação gráfica permite uma análise mais detalhada e uma compreensão visual dos resultados obtidos no contexto do referido teorema.

Figura 2: Ladrilhamentos de Padovan com GeoGebra (outra abordagem)



Fonte: Elaboração própria (2024)

A demonstração desses teoremas ocorre por meio de mapeamento de conjuntos e subconjuntos. Assim, considera-se $p(n)$ a soma dos ladrilhamentos, em que $p(1)=1=P(1)$ e considerando os ladrilhamentos de tamanho $n-2$, em que $n \geq 3$, temos dois casos:

1º — Considere dois subconjuntos de ladrilhamentos: um subconjunto composto por ladrilhamentos que começam com um quadrado preto e outro subconjunto formado pelos demais ladrilhamentos. Introduza agora um novo conjunto de ladrilhamentos, iniciando com um dominó azul de tamanho 1×2 . Esse conjunto é obtido pela justaposição dos ladrilhamentos de tamanho $n-2$ que não começam com um quadrado preto com o conjunto de ladrilhamentos que iniciam com o quadrado preto de tamanho 1×1 . Além disso, inclui-se a adição de um dominó azul de tamanho 1×2 , imediatamente após esse quadrado.

2º — Considere dois conjuntos distintos de ladrilhamentos: um conjunto que se inicia com um triminó (ladrilhos que não começam com quadrados pretos) e outro conjunto composto por ladrilhamentos que começam com um quadrado preto, seguido por um triminó. Agora, introduziu um novo conjunto de ladrilhamentos, começando com um triminó cinza de tamanho 1×3 . Este novo conjunto é formado pela justaposição dos ladrilhamentos de tamanho $n-3$ que não iniciam com um quadrado preto, com o conjunto de ladrilhamentos que começam com o quadrado preto de tamanho 1×1 e inclui a adição de um triminó cinza de tamanho 1×3 imediatamente após esse quadrado.

Portanto, partindo do princípio da soma de casos independentes analisados (sem

considerar a interseção), tem-se que $p(n)=p(n-2)+p(n-3)$.

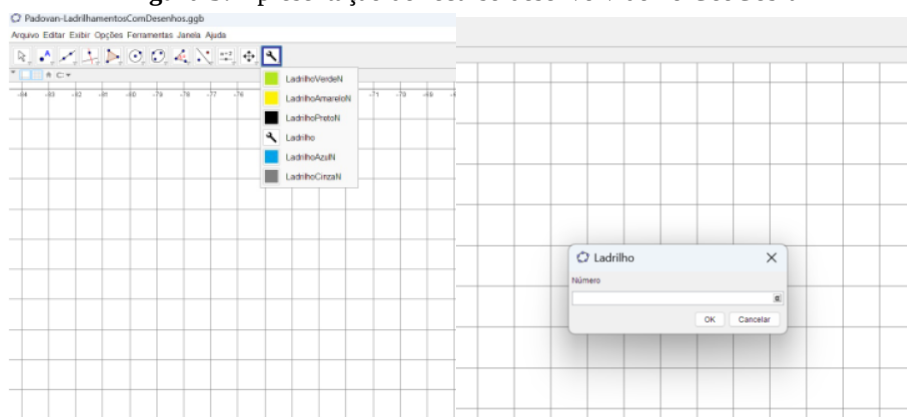
4 Concepção e análise *a priori*

Aqui trazemos a situação didática proposta, seguida de uma previsão atitudinal dos estudantes, com base nas fases delineadas pela Teoria das Situações Didáticas:

Considerando os ladrilhamentos de Padovan propostos por Vieira, Alves e Catarino (2022), com as suas respectivas peças disponíveis, demonstre a identidade $p(n)=p(n-1)+p(n-5)$, para $n \geq 5$ por meio do software GeoGebra.

Antes de iniciar as fases da Teoria das Situações Didáticas, o professor deverá explicar um pouco do recurso desenvolvido no GeoGebra, permitindo que haja uma visualização dos ladrilhamentos de Padovan, para facilitar a compreensão e desenvolvimento da atividade. A Figura 3 mostra a tela inicial da ferramenta, com os botões disponíveis no meu desenvolvimento. Inicialmente o usuário deverá clicar na opção Ladrilho e em seguida clicar no vértice do quadrado da malha do software. Logo após, uma janela abrirá, solicitando que se digite o tamanho do ladrilho; após, deve-se clicar novamente no vértice para que o ladrilho seja desenhado. Para os ladrilhos com as cores disponibilizadas, como é o caso do LadrilhoVerdeN, o usuário pode inserir um ladrilho na cor verde, de acordo com o tamanho digitado. A sua inserção se dá com um clique no vértice ou dentro da malha onde se deseja que o ladrilho seja desenhado; em seguida abre-se uma janela para que seja digitado o tamanho do ladrilho. Em seguida, a peça é desenhada no local sugerido pelo usuário. Para as demais cores, LadrilhoAmareloN, LadrilhoPretoN, LadrilhoAzulN e LadrilhoCinzaN, o *script* acontece da mesma forma.

Figura 3: Apresentação do recurso desenvolvido no GeoGebra



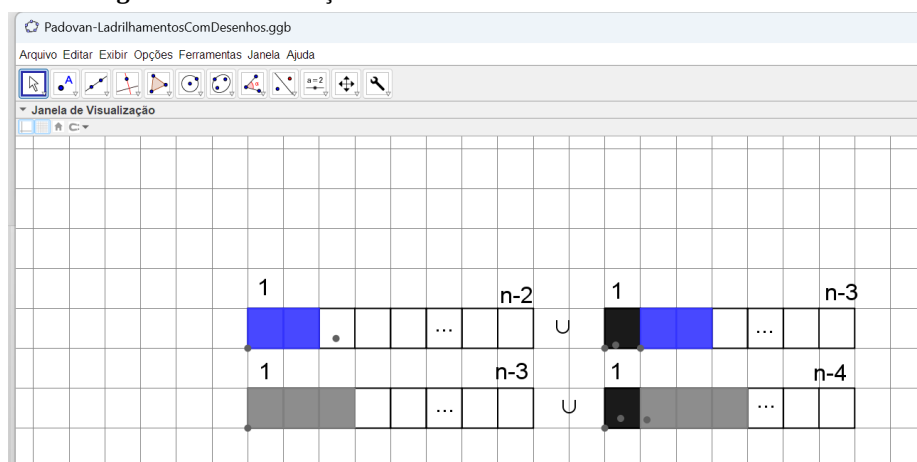
Fonte: Elaboração própria (2024)

Ao lado esquerdo estão os ladrilhos (peças) disponíveis para a atividade proposta, permitindo que o usuário possa compreender que poderá utilizar somente essas peças. Abaixo, encontra-se a malha semi-preenchida com alguns ladrilhamentos de Padovan, para que o participante se familiarize com o recurso. Ressalta-se que para a presente atividade, serão utilizadas somente as opções Ladrilho, LadrilhoPretoN, LadrilhoAzulN e LadrilhoCinzaN, visto que será abordado somente a sequência de Padovan e sua identidade.

Fase da Ação: O intuito é que os estudantes, ao retomarem seus conhecimentos prévios sobre tabuleiros, ladrilhos e ladrilhamentos, aprofundem a compreensão do modelo combinatório de Padovan. Nesse processo, é possível revisitar a prova apresentada por Vieira, Alves e Catarino (2022), destacando a importância da validação por meio do mapeamento cuidadoso dos conjuntos envolvidos. Essa abordagem não apenas fortalece a fundamentação

teórica, mas também incentiva uma compreensão mais profunda da interação entre os elementos do problema. A Figura 4 apresenta essa demonstração realizada no software GeoGebra.

Figura 4: Demonstração dos ladrilhamentos de Padovan no GeoGebra

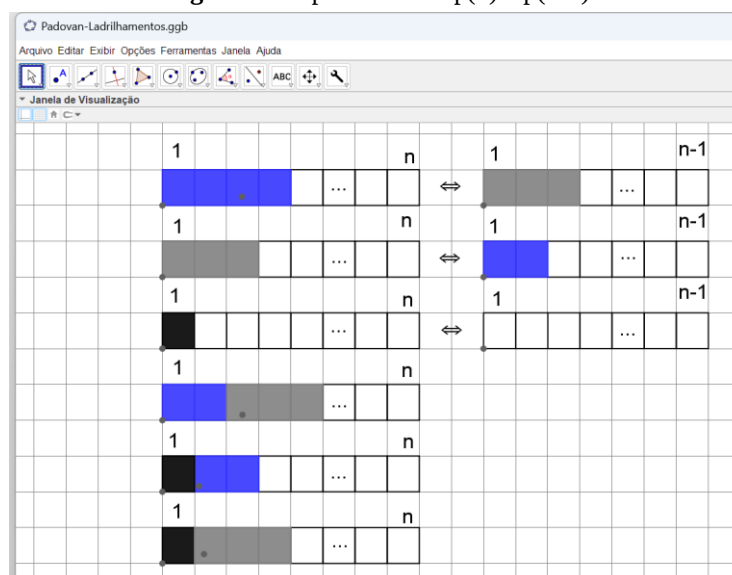


Fonte: Elaboração própria (2024)

Fase da Formulação: Almeja-se que os estudantes iniciem o mapeamento para cada um dos casos apresentados na identidade. Tão logo, é necessário que verifiquem a possibilidade de início de cada peça do tabuleiro. Com efeito, tem-se alguns exemplos para o caso do tabuleiro de tamanho n mapeando para o tabuleiro de tamanho $n-1$: iniciar com um par de dominós, ele é mapeado para um tabuleiro de tamanho $n-1$ substituindo as peças por um triminó. Iniciar com um triminó, substitui-se a peça por um dominó. Iniciar com um quadrado preto, retira-se o quadrado. Iniciar com um dominó seguido de um triminó, retira-se o dominó. Iniciar com um quadrado preto seguido de um triminó, substitui-se as duas peças por um dominó. Iniciar com um quadrado preto seguido de um dominó, retira-se o dominó.

Fase da Validação: Para a demonstração da identidade por meio da noção de tabuleiro, é necessário construir uma bijeção entre os conjuntos que contém os ladrilhamentos de $p(n)$ U $p(n-4)$ e $p(n-1)$ U $p(n-2)$. A Figura 5 retrata o mapeamento de $p(n)$ para $p(n-1)$.

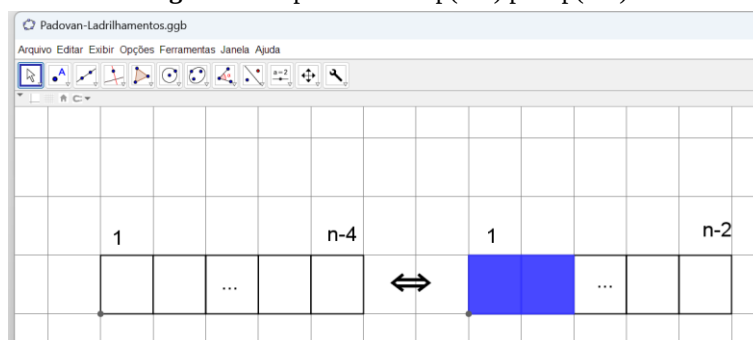
Figura 5: mapeamento de $p(n)$ e $p(n-1)$



Fonte: Elaboração própria (2024)

A Figura 6 retrata o mapeamento de $p(n-4)$ para $p(n-2)$.

Figura 6: Mapeamento de $p(n-4)$ para $p(n-2)$



Fonte: Elaboração própria (2024)

Os modelos apresentados nas Figuras 3 e 4 são possibilidades de validação que podem ser apresentadas pelos estudantes.

Dialética de Institucionalização: Espera-se que o professor mediador, ao revelar a intenção da atividade, crie um ambiente propício à exploração aprofundada da identidade do modelo combinatório de Padovan, através da abordagem com tabuleiros. Tal abertura permite, além da compreensão teórica, uma análise prática por meio da resolução de problemas. Adicionalmente, ao discutir as resoluções dos participantes, almeja-se a oportunidade de explorar os diferentes caminhos seguidos, elucidar dúvidas, corrigir equívocos e reforçar acertos, promovendo uma aprendizagem mais robusta e participativa.

5 Experimentação, Análise *a posteriori* e validação

Durante a fase de experimentação, coletam-se os dados para análise *a posteriori*. A natureza desses dados extraídos possui dependência com os objetivos estabelecidos da Engenharia Didática, das hipóteses nela postas à prova e das conjecturas realizadas na concepção e análise *a priori*. No entanto, particular atenção é dada à coleta dos dados, permitindo ao investigador compreender a interação dos estudantes com o meio e até que ponto essa interação suporta a sua passagem autônoma das estratégias iniciais para as estratégias visadas. Além disso, realiza-se uma análise dos processos de desconcentração e institucionalização (Artigue, 2014a).

Esses dados coletados englobam as produções dos estudantes, incluindo arquivos de computador, quando a tecnologia é utilizada, observações do pesquisador, e gravações de áudios e vídeos. Os dados recolhidos durante a experimentação podem ser complementados por dados adicionais (questionários, entrevistas a alunos e docentes, testes) permitindo uma melhor avaliação e análise dos resultados da Engenharia Didática (Artigue, 2020).

Na fase da análise *a posteriori* ocorre a organização dos dados coletados, sendo esses confrontados com os dados da fase da concepção e análise *a priori*. Assim, alguns questionamentos são levantados: Até que ponto os dados coletados durante a fase de experimentação suportam a concepção e análise *a priori*? Quais as convergências e divergências significativas e como podem ser interpretadas? O que ocorreu que não foi previsto e como pode isso ser interpretado?

Por meio dessa conexão entre a concepção e análise *a priori* e a análise *a posteriori*, tem-se a validação das hipóteses subjacentes a estrutura da pesquisa (Artigue, 2014b). É importante ter ciência que sempre existem diferenças entre a referência fornecida pela concepção e análise *a priori* e a contingência analisada na análise *a posteriori*. Conforme observado, a concepção e análise *a priori* aborda os estudantes de forma genérica e epistêmica.

Destaca-se que para a presente pesquisa essas duas últimas fases da Engenharia Didática não foram realizadas, não havendo prejuízo para a investigação.

6 Planejamento para pesquisas futuras mediante dados empíricos

Esta seção dedica-se a fornecer um planejamento para a coleta de dados empíricos, podendo ser conduzida em instituições de ensino superior, em cursos de Licenciatura em Matemática. Planeja-se que a aplicação se estenda por quatro encontros com duração de 2 horas/aula cada. O Quadro 1 apresenta uma síntese das atividades a serem desenvolvidas em cada encontro:

Quadro 1: Síntese das atividades da experimentação

1º encontro	Revisão sobre a sequência de Fibonacci, previamente abordada com o professor da disciplina, resgatando aspectos históricos e evolutivos desses números. Nesse contexto, progressos matemáticos relacionados à sequência de Fibonacci são explorados, bem como a noção de tabuleiro, ladrilhos e ladrilhamentos.
2º encontro	Introdução sobre o conceito de tabuleiro, apresentando a interpretação combinatória de Fibonacci, suas peças correspondentes e a demonstração do teorema associada à abordagem combinatória.
3º encontro	Estudo do modelo combinatório de Padovan, incluindo a demonstração do teorema.
4º encontro	Implementação da proposta uma situação-problema, permitindo que os estudantes explorem a identidade combinatória de Padovan em relação ao seu modelo combinatório.

Fonte: Elaboração própria (2024)

Os encontros deverão ser conduzidos com base na Teoria das Situações Didáticas, utilizando uma abordagem didática elaborada através de uma situação de ensino e acompanhados por uma lista de exercícios. Durante esses encontros, os participantes deverão engajar-se em discussões para desenvolver estratégias de resolução para as propostas apresentadas no Quadro 1. Nesse contexto, ocorrerá formalização do contrato didático, estabelecendo as expectativas do docente em relação aos alunos e vice-versa, incluindo as relações com o conhecimento e a maneira como o saber será abordado e tratado por ambas as partes.

Essa etapa se caracteriza pela aplicação da estrutura previamente organizada, observando as situações de aprendizagem e incorporando os conceitos delineados na pesquisa didática. Este processo não segue a dinâmica de uma aula tradicional ou convencional. A organização da aula nesse momento é fundamentada na Teoria das Situações Didáticas e direcionada para a coleta de dados dos alunos, permitindo uma análise mais aprofundada do processo de ensino-aprendizagem.

A abordagem teórica pode ser implementada na prática com a utilização do recurso disponibilizado, permitindo superar desafios em torno do uso de recursos tecnológicos em sala de aula, como é o caso do GeoGebra. Para tanto, uma solução é que seja realizada uma breve explicação sobre as ferramentas disponíveis no software, com o objetivo de familiarizar os estudantes com a ferramenta. Além disso, um outro desafio a ser superado é em torno da demonstração da identidade, podendo ser superado com um bom embasamento referente à sequência de Padovan, por meio de apresentação de outras identidades semelhantes e suas respectivas demonstrações.

Durante a aplicação, sugerimos aos leitores um estudo dos trabalhos de Vieira et al. (2023), Vieira (2020), Vieira, Alves e Catarino (2024, 2023b), que tratam da aplicação de determinadas situações-problema na área de sequências, envolvendo a Engenharia Didática e a Teoria das Situações Didáticas. Nas pesquisas, os autores exploram as metodologias com base da situação-problema elaborada, sendo aplicadas em cursos de formação inicial de professores de Matemática, fortalecendo a experiência com sequências numéricas recorrentes em aula.

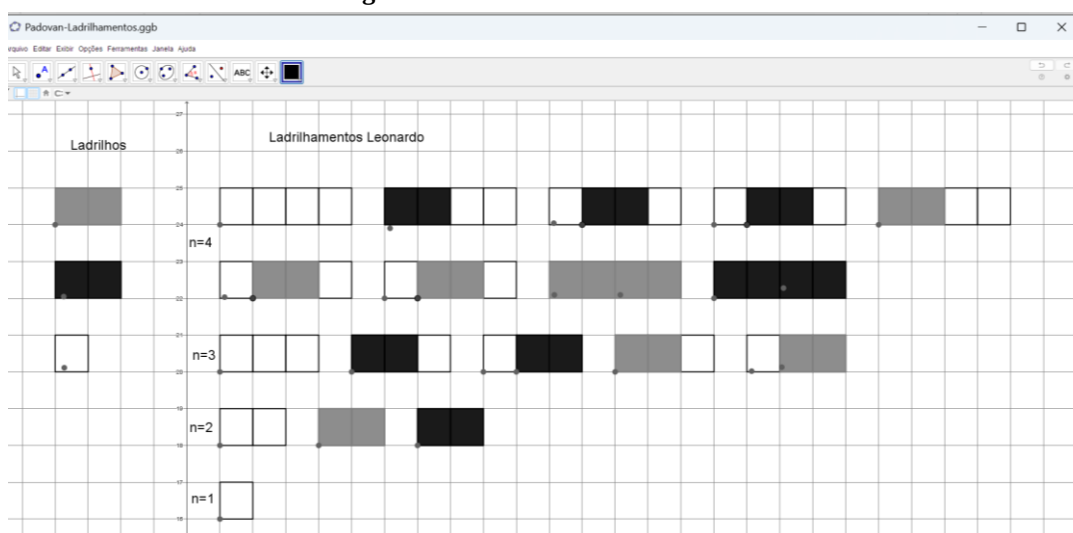
Diante do exposto, os autores abordam as dificuldades e desafios vivenciados, tornando uma experiência válida para que ocorra a aplicação dessas metodologias com o conteúdo abordado. Assim, são ressaltadas as duas últimas fases da Engenharia Didática e as dialéticas da situação didática discutida, tornando uma excelente ferramenta ao leitor que deseje validações práticas, fortalecendo assim a justificativa para a necessidade de futuras pesquisas experimentais.

7 Aplicações para outras sequências e o tabuleiro com material concreto

A abordagem desenvolvida no GeoGebra permite uma aplicação para outras sequências numéricas envolvendo a noção de tabuleiro e ladrilhos. Assim, com as ferramentas disponibilizadas no recurso discutido nesta pesquisa, pode-se utilizar os ladrilhos para algumas sequências, tais como as de Fibonacci, Pell, Jacobsthal, Mersenne e Leonardo.

Como exemplo, Figura 7 mostra a abordagem para a sequência de Leonardo estudada por Vieira, Alves e Catarino (2023a), que utiliza os ladrilhos com quadrados brancos e dominós cinzas e pretos, sabendo-se que os dominós cinzas e dominós pretos não podem ocupar o mesmo tabuleiro, podendo aparecer somente sozinhos ou com quadrados. Tão logo, a quantidade de formas de ladrilhar de Leonardo é igual ao número da sequência de Leonardo, sendo representado por $l_n = L_n$, onde l_n é a quantidade de formas de ladrilhar e L_n o n -ésimo termo da sequência.

Figura 7: Ladrilhamentos de Leonardo



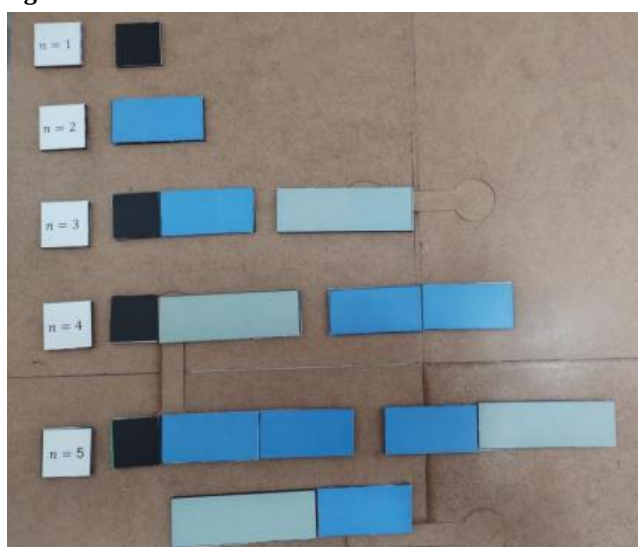
Fonte: Elaboração própria (2024)

A capacidade de representar sequências numéricas por meio de ladrilhos no GeoGebra permite novas possibilidades para pesquisa e desenvolvimento em matemática e suas aplicações. Com isso, essa ferramenta pode ser utilizada para testar hipóteses, visualizar resultados e comunicar descobertas de maneira mais eficiente. A abordagem visual também pode revelar novos padrões e conexões que não são imediatamente aparentes através de métodos analíticos tradicionais.

A aplicação de ferramentas tecnológicas como o GeoGebra para explorar sequências numéricas e padrões de ladrilhamentos não apenas enriquece a Educação Matemática, mas também avança a pesquisa em Matemática Aplicada, permitindo ainda abordar possibilidades de estratégias para o ensino de determinados conteúdos em sala de aula. Esta abordagem combina visualização, interatividade e rigor matemático, proporcionando uma plataforma com grande potencial para a compreensão e a investigação de sequências numéricas recorrentes integrada à conteúdos matemáticos e tecnológicos.

Não obstante, tem-se o desenvolvimento do material concreto para o estudo dos ladrilhamentos, abordando as sequências de Fibonacci e Padovan, conforme abordado por Vieira, Alves e Catarino (2023b). A Figura 8 trata dos ladrilhamentos com a utilização das peças elaboradas em MDF, permitindo uma visualização das cores conforme estabelecido pela regra de Vieira, Alves e Catarino (2022). Porém, o material também pode ser aplicado com a técnica desenvolvida por Tedford (2019).

Figura 8: Ladrilhamentos de Padovan com material concreto



Fonte: Vieira, Alves e Catarino (2023b)

Por fim, a Figura 9 apresenta uma experimentação do material concreto em sala de aula, na disciplina de História da Matemática com a abordagem da sequência de Padovan para estudantes da Licenciatura em Matemática (Formação Inicial de Professores). No trabalho de Vieira, Alves e Catarino (2023b), os participantes realizam a atividade proposta com a utilização da Teoria das Situações Didáticas, construindo o conhecimento e a definição da recorrência da sequência de Padovan por meio da abordagem combinatória.

Figura 9: Aplicação dos ladrilhamentos de Padovan com material concreto



Fonte: Vieira, Alves e Catarino (2023b).

8 Considerações Finais

Diante da proposta de ensino apresentada para trabalhar com a sequência de Padovan, é notável a relevante contribuição proporcionada pela abordagem combinatória adotada. Esta abordagem concentra-se na exploração de identidades voltadas para a interpretação combinatória da sequência de Padovan. A contextualização teórica inicial, que parte da construção de uma evolução histórica e epistemológica desses números, proporcionou uma base sólida para a elaboração de uma sessão de ensino com o intuito de construir o conhecimento.

Nossa abordagem sobre a temática foi desenvolvida a partir de uma situação didática organizada com base na Teoria das Situações Didáticas, emergindo sob uma perspectiva que valoriza a visualização em História da Matemática. Para tal, utilizou-se a Engenharia Didática, estruturando suas duas primeiras fases, com o propósito de implementá-la em sala de aula e, posteriormente, coletar dados.

Ao considerarmos as implicações para o ensino, refletimos sobre como essa proposta didática pode impactar positivamente a abordagem do tema, especialmente no contexto da formação inicial de professores. Ao oferecer uma alternativa para a compreensão da abordagem combinatória da sequência de Padovan sob uma perspectiva visual, busca-se contribuir para a compreensão de identidades combinatórias de outras sequências. Sugere-se essa construção como material didático e apresentamos sugestões concretas para sua integração no currículo, visando aprimorar a compreensão e a aplicação prática por parte dos estudantes.

Como destacado na análise preliminar deste trabalho, os estudantes de licenciatura frequentemente encontram dificuldades e não estudam determinados conteúdos em História da Matemática. Nossa expectativa é que a abordagem do tema com o GeoGebra possa auxiliá-los a superar essas dificuldades, através da visualização interativa, oferecendo uma representação mais concreta e facilitando a compreensão dos conceitos. Acreditamos que o uso do GeoGebra proporciona uma experiência que promove a aprendizagem ativa e auxilia os estudantes a internalizarem conceitos matemáticos.

Por fim, esperamos que esta proposta didática contribua para o ensino da Teoria dos Grupos e para a compreensão das identidades combinatórias da sequência de Padovan, fornecendo subsídios para práticas pedagógicas mais eficazes. Alinhadas à Engenharia Didática e à Teoria das Situações Didáticas, tais práticas podem enriquecer o percurso de formação inicial do professor de matemática.

Agradecimentos

A primeira autora agradece à Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico (Funcap). O segundo autor agradece ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq). A terceira autora agradece aos Fundos Nacionais através da Fundação para a Ciência e Tecnologia. I. P. (FCT), no âmbito do projeto UID/CED/00194/2020.

Referências

- Aarts, J.; Follink, R. & Kruijtzter, G. (2001). Morphic numbers. *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 5(2), 56-58.
- Alves, F. R. V. & Catarino, P. M. M. C. (2022). A sequência de Padovan ou Cordonnier. *Revista Brasileira de História da Matemática*, 22(45), 21-43.
- Artigue, M. & Perrin Glorian, M. J. (1991). Didactic engineering, research and development

- tool: some theoretical problems linked to this duality. *For the Learning of Mathematics*, 11(1), p. 13-18.
- Artigue, M. (2014a). Didactic engineering in mathematics education. In: S. Lerman (Ed.). *Encyclopedia of Mathematics Education*. (pp. 159-162). New York: Springer.
- Artigue, M. (2014b). *Perspectives on design research: The case of didactical engineering*. In: A. Bikner-Ahsbahs; C. Knipping & N. Presmeg. (Ed.). *Approaches to qualitative research in mathematics education*. (pp. 467-496). New York: Springer.
- Artigue, M. (2020). Metodologias de pesquisa em didática das matemáticas: Onde estamos? *Educação Matemática Pesquisa*, 22(3), 25-64.
- Benjamin, A. T. & Quinn, J. J. (2003). *Proofs the Really Count: The art of Combinatorial Proof*. Providence: American Mathematical Society.
- Bergum, G. E.; Philippou, A. N. & Horadam, A. F. (1996). *Applications of Fibonacci Numbers*. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.
- Brousseau, G. (2002). *Theory of didactical situations in mathematics: didactique des Mathématiques, 1970–1990*. New York: Kluwer Academic.
- Burton, D. M. (2007). *The History of Mathematics: an introduction*. New York: McGraw-Hill Companies.
- Chevallard, Y. (2002). *Organiser l'étude*. In: *Actes de la Xème Ecole d'été de didactique des mathématiques* (pp. 3-22, 41-56). Grenoble.
- Ferreira, M. B. C. (2016). *Uma organização didática em quadrilátero que aproxime o aluno de Licenciatura das demonstrações geométricas*. 342f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, SP.
- Koshy, T. (2001). *Fibonacci and Lucas numbers with applications*. New York: Wiley-Interscience.
- Marohnic, L.; Kovacic, B. & Radisic, B. (2013). O multočkama polinoma oblika $x^n - x - 1$. *Osječki matematički list*, 13, 1-13.
- Spreafico, E. V. P. (2014). *Novas identidades envolvendo os números de Fibonacci, Lucas e Jacobsthal via ladrilhamentos*. 112f. Tese (Doutorado em Matemática). Universidade Estadual de Campinas. Campinas, SP.
- Stewart, I. (1996). Tales of a neglected number. *Mathematical Recreations - Scientific American*, 274, 102-103.
- Tedford, S. J. (2019). Combinatorial identities for the padovan numbers. *The Fibonacci Quarterly*, 4(57), 291-298.
- Vieira, R. P. M. (2020). *Engenharia Didática (ED): o caso da Generalização e Complexificação da Sequência de Padovan ou Cordonnier*. 266f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). Instituto Federal do Ceará. Fortaleza, CE.
- Vieira, R. P. M.; Alves, F. R. V. & Catarino, P. M. M. C. (2022). Combinatorial interpretation of numbers in the generalized padovan sequence and some of its extensions. *Axioms*, 11(11), 1-9.
- Vieira, R. P. M.; Alves, F. R. V. & Catarino, P. M. M. C. (2023a). A note on Leonardo's Combinatorial Approach. *Journal of Instructional Mathematics*, 4(2), 119-126.

Vieira, R. P. M.; Alves, F. R. V. & Catarino, P. M. M. C. (2023b). A construção de definições por meio do modelo combinatório de Padovan: uma investigação com a Engenharia Didática num curso de formação inicial de professores de Matemática. *Acta Scientiae*, 25(6), 366-395.