

Movimentos relacionados às Habilidades Espaciais em uma construção de Cenário Animado no GeoGebra

Camila Maria Koftun

Universidade Estadual do Paraná

Porto União, SC — Brasil

✉ camila.m.k@hotmail.com

🆔 0000-0002-1883-9571

Maria Ivete Basniak

Universidade Estadual do Paraná

União da Vitória, PR — Brasil

✉ maria.basniak@unespar.edu.br

🆔 0000-0001-5172-981X



2238-0345 

10.37001/ripem.v15i2.4224 

Recebido • 11/07/2024

Aprovado • 17/10/2024

Publicado • 27/05/2025

Editor • Gilberto Januario 

Resumo: As habilidades espaciais compõem o pensamento espacial e associadas ao movimento nos ajudam a pensar. Com isso, objetiva-se investigar como e quais movimentos associados às habilidades espaciais são utilizados durante a construção de um Cenário Animado no GeoGebra. Tratam-se de construções que, envolvendo elementos matemáticos e movimento, possibilitam discutir conceitos e representações matemáticas. Neste caso, estudantes do Ensino Fundamental construíram o Cenário Animado *Casa*, envolvendo objetos geométricos planos e espaciais. Analisou-se gravações das construções e discussões matemáticas e identificou-se que, os estudantes utilizaram movimentos como *rotacionar*, *reposicionar*, *ampliar/reduzir* com ferramentas do GeoGebra. Esses movimentos, relacionados às habilidades espaciais de *rotação mental*, *perspectiva*, *construção mental* e *juízo espacial*, auxiliaram os estudantes a validar estratégias, corrigir erros e identificar a posição de objetos geométricos na casa. O emprego desses movimentos foi necessário para a construção, especialmente por envolver objetos geométricos tridimensionais, nos quais não é possível visualizar todos os lados sem movimentá-los.

Palavras-chave: Pensamento Espacial. Movimento no GeoGebra. Objetos Geométricos. Cenário Animado Casa.

Movements Related to Spatial Abilities in an Animated Scenario Construction in GeoGebra

Abstract: Spatial abilities make up spatial thinking and associated with movement help us think. With this, the objective is to investigate how and which movements associated with spatial abilities are used during the construction of an Animated Scenario in GeoGebra. These are constructions that, involving mathematical elements and movement, make it possible to discuss mathematical concepts and representations. In this case, elementary school students built the *House Animated Scenario*, involving flat and spatial geometric objects. Recordings of constructions and mathematical discussions were analyzed and it was identified that students used movements such as *rotating*, *repositioning*, *enlarging/reducing* with GeoGebra tools. These movements, related to the spatial abilities of *mental rotation*, *perspective*, *mental construction* and *spatial judgment*, helped students to validate strategies, correct errors and identify the position of geometric objects in the house. The use of these movements was necessary for the construction, especially as it involves three-dimensional geometric objects, of which it is not possible to view all sides without moving them.

Keywords: Spatial Thinking. Movements in GeoGebra. Geometric Objects. House Animated Scenario.

Movimientos Relacionados con Habilidades Espaciales en una Construcción de Escena Animada en GeoGebra

Resumen: Las habilidades espaciales conforman el pensamiento espacial y asociadas al movimiento nos ayudan a pensar. Con esto, el objetivo es investigar cómo y qué movimientos asociados a habilidades espaciales se utilizan durante la construcción de un Escenario Animado en GeoGebra. Son construcciones que, involucrando elementos matemáticos y movimiento, permiten discutir conceptos y representaciones matemáticas. En este caso, estudiantes de primaria construyeron el Escenario Animado de la *Casa*, involucrando objetos geométricos planos y espaciales. Se analizaron grabaciones de construcciones y discusiones matemáticas y se identificó que los estudiantes utilizaron movimientos como *rotar*, *reposicionar*, *ampliar/reducir* con herramientas GeoGebra. Estos movimientos, relacionados con las habilidades espaciales de *rotación mental*, *perspectiva*, *construcción mental* y *juicio espacial*, ayudaron a los estudiantes a validar estrategias, corregir errores e identificar la posición de objetos geométricos en la casa. El uso de estos movimientos fue necesario para la construcción, sobre todo porque se trata de objetos geométricos tridimensionales, de los cuales no es posible ver todos los lados sin moverlos.

Palabras clave: Pensamiento Espacial. Movimiento en GeoGebra. Objetos Geométricos. Escenario Animado Casa.

1 Introdução¹

A Geometria, por envolver o estudo de formas, localização e disposições no espaço, é um campo da Matemática que apresenta relações com o pensamento espacial (Brasil, 2018). Por sua vez, o pensamento espacial ajuda a falar, pensar e agir sobre o espaço, o tempo, as pessoas e outros elementos, de modo que alguns movimentos auxiliam nesse processo, pois o pensamento espacial e os movimentos associados a ele são a base para a formação de outros tipos de pensamento (Tversky, 2019). Os gestos e os movimentos mentais são tipos de movimentos importantes ao pensamento espacial (Tversky, 2019).

Os movimentos mentais são aqueles realizados sobre um objeto representado na mente, que permitem *girar*, *refletir*, *ampliar* e *reduzir* esse objeto, por exemplo. Movimentos como esses estão relacionados às habilidades espaciais, que podem ser identificadas em pessoas que apresentam facilidade para resolver problemas envolvendo o espaço. Portanto, as habilidades espaciais compõem o pensamento espacial.

A dinamicidade do software GeoGebra possibilita a execução de movimentos, como esses relacionados às habilidades espaciais, sobre os elementos matemáticos construídos em seu ambiente, especialmente quando se utiliza a janela de visualização 3D: ela permite trabalhar com objetos geométricos espaciais e planos, e os movimentos auxiliam a explorar as características das representações.

Segundo Notare e Basso (2016, p. 2) “uma das principais contribuições das tecnologias digitais para a educação matemática foi tornar possível a ‘concretização’ dos objetos matemáticos na tela do computador”. Essa possibilidade permite o desenvolvimento de novas formas de pensar a matemática, ao manipular e alterar propriedades do objeto representado no software.

¹ Este artigo compõe a dissertação de mestrado defendida no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual do Paraná, organizada em formato *multipaper*, escrita pela primeira autora e orientada pela segunda autora.

Um tipo de construção no GeoGebra que envolve movimento e permite discutir conceitos e representações matemáticas durante seu desenvolvimento são os Cenários Animados (CAs)². Nos CAs, elementos matemáticos são relacionados a ferramentas ou comandos do software que proporcionam movimento para os objetos da construção, constituindo, ao final, um contexto/cena animada (Bueno; Basniak, 2020). O movimento deve fazer parte do CA finalizado, mas também aparece durante o processo de construção, quando os objetos matemáticos são manipulados para se adequarem com a cena que se deseja construir (Koftun; Basniak, 2024). Além disso, a cena final pode envolver personagens, situações do cotidiano ou do imaginário.

Neste trabalho, construímos o CA *Casa* a partir de objetos geométricos planos e espaciais, e investigamos como e quais movimentos associados às habilidades espaciais são utilizados durante a construção desse CA no GeoGebra, que foi desenvolvida por uma turma de estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental³.

2 Pensamento Espacial e os Movimentos

Um pensamento começa por uma ideia ou um problema. Para avançar, você transforma o pensamento inicial em um novo, e realiza esse processo uma série de vezes, até que encontre uma solução para o problema ou amadureça sua ideia (Tversky, 2019).

Quando recebemos a tarefa de montar um móvel a partir de um manual, o pensamento vem com as instruções: nesse caso, uma sequência de ações sobre peças as transforma, passo a passo, no móvel completo. A mesma lógica é apresentada por Tversky (2019, p. 85, tradução nossa) sobre o pensamento, como se fossem “ações sobre ideias que as transformam em outra coisa”.

Entendemos que essas ações estão relacionadas à disposição para agir sobre uma situação, transformando-a com auxílio de movimentos. Os movimentos são grandes aliados do processo de pensar, tanto os movimentos físicos, que são os gestos que expressam ações com base em ideias (Tversky, 2019), como os movimentos mentais, que são aqueles que podem ser realizados sobre objetos construídos na mente, como girar, refletir, mover, adicionar ou remover uma parte do objeto imaginário, entre outras modificações.

Segundo Tversky (2019), o movimento está presente em todo o espaço à nossa volta, apesar de nem sempre estarmos atentos a isso. Em uma conversa qualquer com um colega, as pessoas geralmente gesticulam, apontando para uma direção ou um objeto para complementar a fala. Na natureza, as flores se movem em direção ao sol e abrem e fecham. No meio artístico, os atores e dançarinos realizam movimentos expressivos; e no ambiente educacional, os estudantes e professores também utilizam movimento na sala de aula, seja para representar algum símbolo matemático desenhando-o no ar durante uma explicação, ou utilizando dos movimentos mentais que podem auxiliar a resolver um problema, quando se torna difícil representar o que está pensando.

Desse modo, os movimentos nos auxiliam a tomar decisões relacionadas aos diversos tipos de pensamento. Há uma infinidade de classes que podemos citar, como pensamento social, computacional, criativo, design, abstrato, matemático, e outros, mas “o pensamento espacial é o cerne de nossa existência”, e sua relação com o movimento merece destaque (Tversky, 2019, p. 59, tradução nossa).

² Para o termo Cenários Animados no plural será utilizada a sigla CAs, e para o termo Cenário Animado no singular será utilizada CA.

³ No Brasil, o 7º ano do Ensino Fundamental é destinado à crianças de 12 anos de idade.

O pensamento espacial é desenvolvido em nossa vivência cotidiana por meio da observação do espaço, e é a base de como falamos, pensamos e agimos sobre o espaço em especial, mas também sobre o tempo, as emoções, as relações sociais e muito mais (Tversky, 2019). Desse modo, segundo Tversky (2019), os movimentos associados ao pensamento espacial são considerados a fundação para os demais tipos de pensamento.

Nesse sentido, muitas decisões e comparações realizadas no âmbito social, geográfico, cultural e político, por exemplo, também são influenciadas pelo pensamento espacial. Se precisamos atravessar a rua quando um carro se aproxima, pensamos se há tempo suficiente para percorrer a distância até o outro lado ou se o motorista vai diminuir a velocidade, um julgamento que é parte espacial e parte social, e o erro pode ter um custo alto (Tversky, 2019).

A relação entre o pensamento espacial e outros pensamentos é destacada em experimentos neurocientíficos mencionados por Tversky (2019), que indicam que as regiões do cérebro responsáveis por nos orientar e movimentar sobre o espaço, ou seja, relacionadas ao pensamento espacial, acabaram, ao longo do tempo adquirindo outras funções, como representar *informações temporais, conceituais, de indivíduos e ideias*. Assim, outros tipos de pensamento possuem uma base no pensamento espacial, especialmente o pensamento abstrato. Como indica a autora, destacamos que é apenas uma base, e não toda a sua estrutura.

Não somos perfeitos em pensamento espacial e em nenhum outro tipo de pensamento, considerando sua complexidade e amplitude, e por isso, frequentemente nos equivocamos em decisões espaciais (Tversky, 2019). Por outro lado, algumas pessoas apresentam mais facilidade do que outras na execução de ações relacionadas ao pensamento espacial, que geralmente envolvem movimentos realizados sobre os objetos mentalmente. Um conjunto de tarefas envolvendo esses movimentos é utilizado como teste para medir as habilidades de pensamento espacial, ou habilidades espaciais (HE) de uma pessoa (Tversky, 2019).

Segundo Tversky (2019), uma pessoa possui esse tipo de habilidade quando apresenta predisposição para lidar com situações sobre o espaço, em que regularmente estão presentes os movimentos relacionados à *rotação mental* de um objeto, mudança na *perspectiva* de observação, *julgamento espacial* sobre distância e posição, além da alteração de forma, tamanho e outras propriedades de objetos *construídos na mente*. Na seção seguinte, apresentamos mais detalhes sobre essas HE.

3 Movimentos nas Habilidades de Pensamento Espacial

Assim como existem diferentes tipos de pensamento, as habilidades sobre os pensamentos também são diversas: habilidade musical, atlética, verbal, visual, espacial e outras (Tversky, 2019). As HE compõem o pensamento espacial e estão relacionadas a diferentes formas de agir sobre ideias e representações no espaço. Já vimos que *ações sobre ideias* é como Tversky (2019) considera o processo de pensar.

Mesmo as pessoas que apresentam aptidão com as HE precisam praticar para se sobressair. O esporte é um bom exemplo disso: “para ser um saltador de elite, *shortstop* ou *quarterback*⁴, você precisa de características físicas especiais, talento e *treinamento*” (Tversky, 2019, p. 98, tradução nossa, grifos nossos). Nesse sentido, até mesmo aqueles que apresentam dificuldades com noções espaciais podem desenvolver algum tipo de HE por meio da prática de tarefas que as estimulem, pois não são inatas ao sujeito (Tversky, 2019).

Essas tarefas exigem estratégias/pensamentos distintos, que podem requerer HE

⁴ Shortstop é o nome da posição de um jogador no beisebol, e quarterback é a posição de um jogador no futebol americano.

distintas, de forma que o sujeito pode ser bom em uma, mas não em outra, ou pode ser bom em todas ou em nenhuma (Tversky, 2019). Para experimentar um exemplo dessas tarefas, observe a Figura 1, na página seguinte, e decida se os pares de imagens são iguais ou espelhadas⁵.

Figura 1: F, R, 5



Fonte: Tversky (2019, p. 87)

Para resolver esse problema, é preciso girar as letras e o número quantas vezes for necessário até conseguir compará-los e identificar que os Rs e os 5s estão espelhados, e os Fs não. Essa tarefa exercita a *rotação mental* dos objetos, que é uma ação visual-espacial, comparada a observar algo realmente girando no espaço ou em orientações diferentes (Tversky, 2019). Essa é uma das principais HE, e muitas vezes está relacionada com a efetivação de outras. Assim, tarefas envolvendo a *rotação mental* servem como testes para medir essa HE, assim como outras tarefas envolvendo a *perspectiva*, *construção mental* e *julgamento espacial* são utilizadas para medir as HE nessas respectivas ramificações do pensamento espacial. Existem outros tipos de HE, mas focamos este estudo nessas quatro, que apresentam relações com os movimentos realizados mentalmente.

O número de tentativas e o tempo que o sujeito leva para concluir essas tarefas é utilizado como indicativo de dificuldade ou facilidade com as HE (Tversky, 2019). Por outro lado, ainda segundo Tversky (2019), não é necessário se submeter a testes específicos para experimentar a *rotação mental*, pois a usamos em tarefas do dia a dia, como colocar uma chave na fechadura, montar quebra-cabeças, ou quando reconhecemos objetos que não estão em suas posições usuais. O mesmo vale para outras HE.

Para ditar a posição de objetos e reconhecê-los no espaço, às vezes é necessário tomar uma *perspectiva* espacial diferente. Nossa mente permite assumir *perspectivas* internas, contrárias à que estamos, quando nos colocamos no lugar de outra pessoa ou até mesmo de um objeto (Tversky, 2019). Também é possível assumir uma *perspectiva* externa, quando estamos do lado de fora, observando, analisando ou buscando a posição adequada para um objeto.

Em um teste envolvendo a HE *perspectiva* descrito por Tversky (2019), o sujeito é convidado a ler um texto que descreve um ambiente com objetos e pessoas, e a partir disso precisa responder onde estava o que, em relação a pontos de referência diferentes. Os participantes relataram que, para responder aos questionamentos, imaginavam-se no lugar das

⁵ Após resolver a tarefa, acompanhe a animação dos elementos da figura no seguinte vídeo: <https://youtu.be/s1WGt1V9IKA>

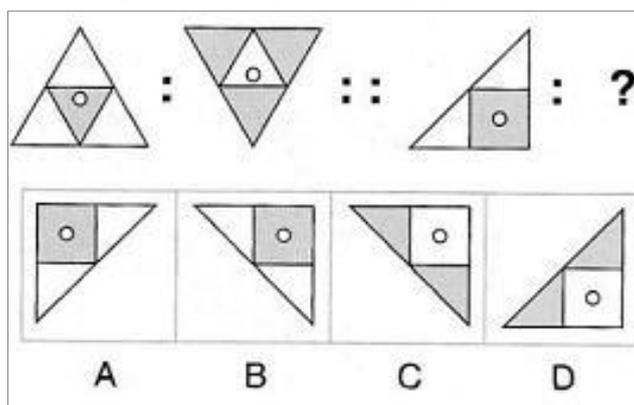
pessoas e dos objetos, e assim realizaram a tarefa sem dificuldades.

Segundo a autora, esse tipo de mudança de perspectiva (interna) considera uma estrutura egocêntrica, que é útil para manter o controle de onde se está e por onde se move. Por outro lado, não é uma maneira eficiente quando a perspectiva assumida é a externa: nesse caso, “para pensar sobre o espaço de forma mais geral, precisamos tirar o ego do espaço e formar uma representação allocêntrica” (Tversky, 2019, p. 68, tradução nossa).

Antes de conseguirmos rotacionar um objeto mentalmente ou alterar sua posição, uma representação deve ser construída na mente. A *construção mental* possibilita a representação de um objeto na mente a partir de algo que vimos, ou que foi descrito por meio da linguagem. A partir disso, a imaginação permite mudar as formas, tamanhos e propriedades do objeto, girar, refletir, adicionar uma parte e determinar onde está e o que faz (Tversky, 2019). Portanto, a *construção mental*, além de criar os objetos, também permite realizar modificações sobre eles.

Como exemplos de tarefas envolvendo a HE de *construção mental*, podemos citar as analogias com figuras geométricas (Figura 2), em que uma série de transformações sobre a representação deve ser empregada para chegar à solução.

Figura 2: Exemplo de analogia geométrica



Fonte: Quizizz (2021)

As pessoas podem fazer essas manipulações com maior ou menor facilidade, dependendo da sequência de ações empregadas. Para alguns, pode ser mais fácil rotacionar primeiro; enquanto outros, é preciso começar alterando a cor dos triângulos.

Para resolver essas e outras tarefas, as pessoas reúnem as informações que parecem ser relevantes e tentam entender a relação entre elas. Isso está ligado também a outra HE, o *juízo espacial*, que permite realizar comparações e tem influência nas decisões sobre distância (perto, longe), tamanho (pequeno, grande) e direção (direita, esquerda, frente e trás) no espaço (Tversky, 2019). Para isso, a mente utiliza alguns mecanismos para guiar o *juízo espacial*, como pontos de referência, diferentes perspectivas de um ambiente, a rotação e o alinhamento, mas esses nem sempre auxiliam a inferir a resposta correta (Tversky, 2019).

Nos testes envolvendo o *juízo espacial*, Tversky (2019) cita a comparação entre mapas do mesmo lugar. Os participantes deveriam indicar a distância entre cidades e sua localização, por exemplo, qual estava a leste ou a oeste. A maioria dos participantes acabou respondendo incorretamente aos testes porque, apoiada em outras HE e na percepção de cada indivíduo, a mente parece girar as representações para que pareçam mais alinhadas, também estima que a distância entre locais pertencentes a um mesmo grupo seja menor do que quando comparada a outros grupos, o que pode levar a equívocos (Tversky, 2019). Esse é um exemplo

da influência do pensamento espacial sobre outros pensamentos.

As HE, quaisquer que sejam, são internas ao sujeito. Situações propostas por terceiros, como jogos de blocos, quebra-cabeças, experiências sensoriais ou tarefas espaciais podem estimular o desenvolvimento ou mobilização de tais HE, mas não existe uma ação específica que garanta esse desenvolvimento.

Tversky (2019) afirma que essas tarefas provocativas devem ser propostas aos sujeitos desde crianças, pois as HE são fundamentais para muitas profissões, atividades cotidianas e para o desenvolvimento pessoal. Além de brincadeiras e jogos com as crianças, pais e professores “podem enriquecer as experiências com conversas espaciais”, utilizando palavras como: frente, atrás, dentro, fora, paralelo, perpendicular, diagonal, área e outras (Tversky, 2019, p. 103, tradução nossa).

Além disso, treinar um tipo de HE pode auxiliar no desempenho de outras habilidades que não foram diretamente estimuladas (Tversky, 2019). Ainda não foi possível compreender e determinar as múltiplas HE existentes, apesar de inúmeras tentativas que ocorreram, segundo a autora. Com isso, concentramo-nos na discussão de apenas quatro HE, nas quais identificamos relações com o campo de estudo da matemática, especialmente quando é trabalhada a partir do software GeoGebra envolvendo a construção de CAs.

4 Movimentos no GeoGebra

O pensamento espacial e as HE não são condicionados à Matemática. Identificamos a amplitude desse tema, que pode ser utilizado para estudar fenômenos de áreas que compartilhem alguma similaridade com o pensamento espacial, e segundo Tversky (2019, p. 88, tradução nossa), “o pensamento matemático tem uma camada de pensamento espacial”.

A Geometria, enquanto campo de estudo da Matemática, está associada ao pensamento espacial, pois trabalha com formas geométricas, distâncias, tamanhos e outras propriedades do espaço bidimensional e tridimensional.

Neste trabalho, abordamos o conteúdo de Geometria utilizando o GeoGebra, porque esse software possui ferramentas e comandos que permitem *mover*, *girar*, *rotacionar*, *ampliar* e *reduzir* os objetos matemáticos ali construídos. Nesse sentido, relacionamos esses movimentos executados do software com os movimentos mentais associados às HE mencionadas na seção anterior.

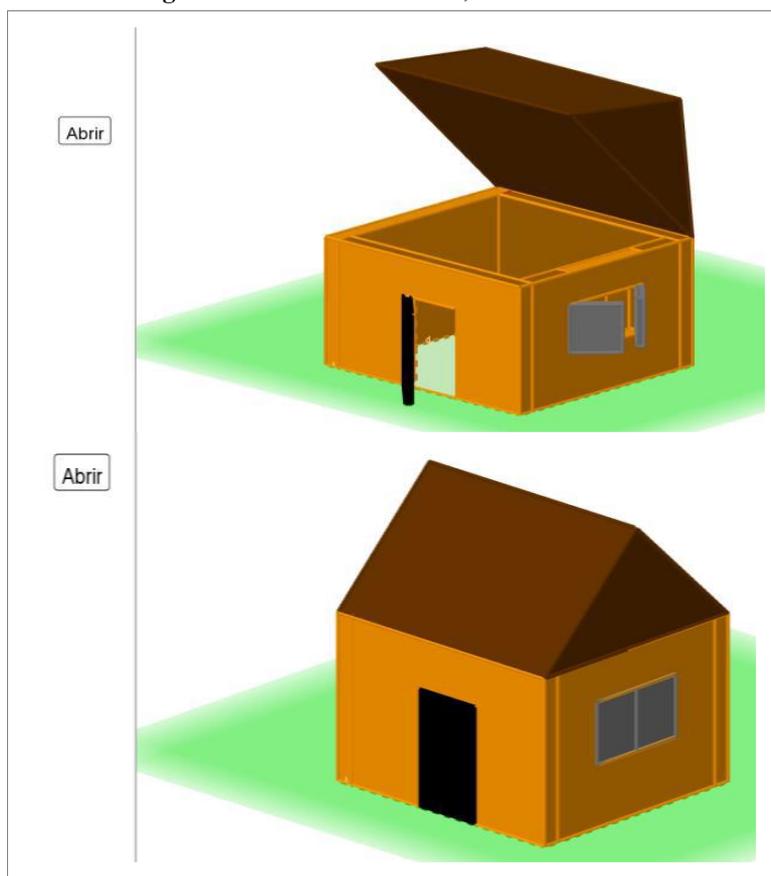
Os sujeitos podem realizar construções, rotações e mudanças de perspectiva na mente, mas com o apoio das ferramentas do GeoGebra, têm a possibilidade de externalizar essas ações, como “uma maneira de colocar a mente no mundo” (Tversky, 2019, p. 89, tradução nossa).

Esses movimentos podem aparecer durante as etapas de desenvolvimento de construções no GeoGebra, como é o caso da construção do Cenário Animado *Casa*, discutido na sequência.

5 Contexto e Encaminhamentos Metodológicos

O planejamento do CA *Casa* (Figura 3, na página seguinte) e de outros, envolveu uma equipe de acadêmicos que já vinha trabalhando com esse tipo de construção em outras pesquisas e em um projeto de extensão. Todos os CAs elaborados nesse contexto envolveram o conteúdo estruturante de Geometria.

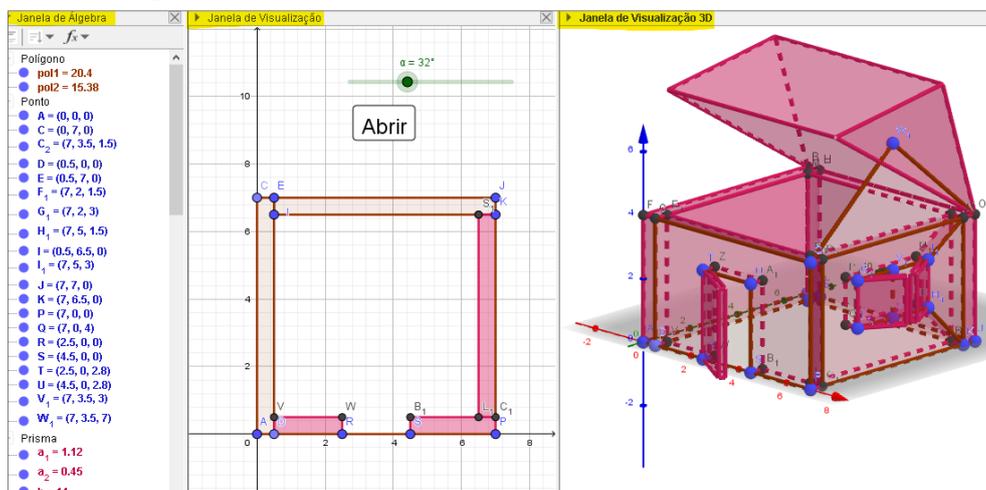
Figura 3: CA *Casa* finalizado, aberto e fechado



Fonte: Dados da Pesquisa

Em especial, o CA *Casa* envolveu elementos matemáticos que proporcionaram discussões sobre conceitos e representações geométricas. Assim, a partir dessa construção, o objetivo foi que os estudantes pudessem reconhecer e diferenciar características de objetos geométricos planos e espaciais, particularmente polígonos e poliedros. A união desses objetos geométricos em tamanhos e formatos diferentes dão origem à representação da casa construída na janela de visualização 3D do GeoGebra, articulando também a janela de visualização 2D e a janela de álgebra (Figura 4).

Figura 4: Construção do CA *Casa* nas diferentes janelas do GeoGebra



Fonte: Dados da Pesquisa

Nesse contexto, para investigar como e quais movimentos associados às habilidades espaciais são utilizados durante a construção desse CA no GeoGebra, definimos como sujeitos da pesquisa empírica uma turma de estudantes da Educação Básica, que realizou essa construção. A seguir, são descritas informações sobre os encontros realizados com os estudantes.

5.1 Estudantes participantes e seleção de dados

A turma que participou da proposta de construção do CA foi o 7º ano de um colégio em tempo integral da rede pública do Estado do Paraná. No período (maio a julho de 2022) em que a proposta foi desenvolvida, as aulas na rede de ensino ocorreram de modo presencial, após o período de ensino remoto emergencial decorrente da pandemia da Covid-19, que iniciou em 2020.

Durante os encontros os 28 estudantes da turma foram divididos em dois laboratórios de informática (L1 e L2), pertencentes a universidade que divide o prédio com o colégio em questão. A divisão foi feita para que todos tivessem acesso a um computador para realizar a construção, favorecendo as discussões em sala realizadas pela Equipe Assistente (EA) que atuou nesses encontros e também para a posterior análise dos dados. Apesar dos ambientes separados, foi seguido o mesmo planejamento para os encontros com os estudantes.

Em cada laboratório de informática atuava uma EA composta por três integrantes cada, em que um deles conduziu as discussões e os encaminhamentos da aula, e os demais atenderam a dúvidas pontuais dos estudantes e auxiliaram em etapas da construção do CA, amparados por um roteiro⁶ que foi elaborado com antecedência.

Antes de criar o CA *Casa*, os estudantes construíram outros dois cenários, todos envolvendo o conteúdo estruturante de Geometria para se ambientar com alguns comandos do GeoGebra e com a dinâmica dos encontros. Primeiramente, o CA finalizado era apresentado aos estudantes para que soubessem o que seria construído naquele encontro, e os primeiros *passos* da construção eram mostrados detalhadamente em uma tela projetada. A partir disso, os estudantes davam continuidade à sua construção com base nas etapas anteriores ou explorando as ferramentas do software e os objetos matemáticos envolvidos.

As discussões, neste trabalho, focalizam no processo de construção realizado pelos estudantes do L1, porque nesse ambiente, a responsável por conduzir as discussões foi a primeira autora deste trabalho (Pesquisadora). Os demais membros da EA são identificados como A1 e A2.

Foram necessários quatro encontros de aproximadamente 100 minutos com a turma para a construção e discussão do CA *Casa*. Os dados foram coletados por meio de gravações das telas de cada computador utilizado pelos estudantes, gravações em áudio e vídeo do L1, e registro escrito dos estudantes e da pesquisadora. Para as gravações de tela, foi utilizado no navegador de internet o *Apowersof*, ferramenta online e gratuita que tem a função de gravar as atividades executadas na tela do computador, além de gravar o áudio.

Ocorreram problemas técnicos durante a coleta de dados: gravações das telas dos computadores foram perdidas porque desligaram inesperadamente, sem que fosse possível salvar a gravação ou o progresso do estudante na construção. Além disso, não conseguimos gravar o áudio de todos os computadores por dispor de poucos microfones externos, e com isso, parte das gravações das telas dos computadores ficou sem áudio, além de outras gravações em

⁶ O roteiro da construção do CA *Casa* e de outros CAs construídos pelos estudantes durante as intervenções da pesquisa, podem ser acessados nos apêndices da dissertação de mestrado de Koftun (no prelo).

vídeo que ficaram corrompidas. Isso reduziu a quantidade de material a ser analisado, e foi o primeiro critério de seleção dos dados coletados.

Embora cada estudante tivesse à disposição um computador para realizar a construção, foi orientado que poderiam trocar ideias com os colegas sobre o desenvolvimento de suas etapas. Nesse sentido, houve estudantes que optaram por produzir uma construção em dupla.

A apresentação das análises segue as etapas estabelecidas para a construção do CA, e os excertos consistem em recortes das telas dos computadores dos estudantes, transcrições das conversas e discussões que ocorreram no momento das aulas, e registro escrito dos estudantes. Esses dados foram selecionados considerando os momentos da construção em que foi possível identificar influências dos movimentos empregados, ou da ausência deles.

É possível acessar os trechos das gravações das telas quando se clica sobre as imagens que as representam no decorrer do texto; nesse caso, será aberta uma nova guia em que um vídeo da situação pode ser reproduzido: é necessário estar conectado à internet para acessá-lo. A utilização de vídeos nos parece mais adequada do que uma sequência de imagens que busque representar as ações dos estudantes sobre o software, considerando que os movimentos realizados nas etapas da construção do CA são elementos importantes para as análises. Os áudios foram suprimidos dos vídeos para preservar a identificação dos estudantes, bem como adotamos nomes fictícios para os estudantes pelo mesmo motivo.

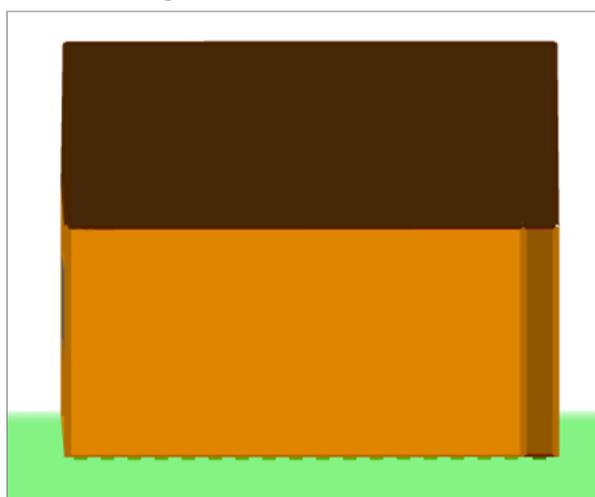
Relatamos e analisamos, na sequência, as construções desenvolvidas pelos estudantes: *Lucas, Maria, Ana, Paulo, Beatriz, Caroline* e as duplas *André e Gustavo* e *Diego e Eduardo*. Buscamos identificar, em suas ações e falas, indicativos dos movimentos e ações relacionadas às HE de *construção mental, rotação mental, perspectiva e julgamento espacial*.

6 Resultados e Discussões

1ª etapa: Apresentação do Cenário Animado Casa

Antes de começar a desenvolver o CA *Casa*, a construção final foi apresentada aos estudantes para identificarem o que estava sendo representado no GeoGebra. Porém, a posição do objeto adotada nesse momento (Figura 5) teve influência sobre as respostas dos estudantes.

Figura 5: Vista traseira da casa



Fonte: Dados da Pesquisa

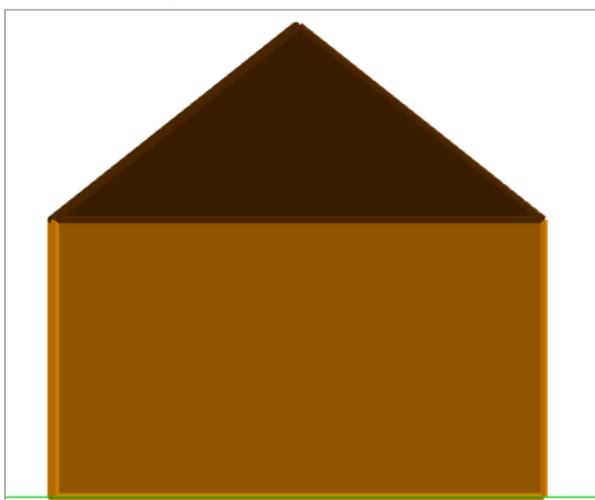
No excerto a seguir, são apresentadas as falas dos estudantes quando observaram a representação da figura 5.

- Pesquisadora: *Essa é a próxima construção que a gente vai fazer, o que vocês acham que é?*
 Gustavo: *Uma porta.*
 Diego: *Uma caixa.*
 Lucas: *Um baú.*
 Eduardo: *Uma caixa que é parecida com um baú.*
 Beatriz: *Um cubo.*
 Eduardo: *Uma barra de chocolate.*

Nessa posição, os estudantes não identificaram que a construção se tratava de uma casa, e citaram outros objetos semelhantes ao formato apresentado. A posição adotada foi proposital, para que os estudantes percebessem que objetos tridimensionais precisam ser observados em diferentes posições para identificar características que fazem parte de sua identidade. Especialmente os objetos geométricos, quando são representados em posições diferentes do usual, acabam não sendo reconhecidos em algumas situações (Machado, Bortolossi & Almeida Junior, 2019).

Depois disso, a posição da casa foi alterada novamente, mostrando a lateral (Figura 6). Nesse momento, não foi apresentado o movimento de *rotação* do CA até chegar nessa posição, para que os estudantes não identificassem todos os elementos que compõem o CA e o caracterizassem enquanto uma casa, visto que isso seria discutido na sequência.

Figura 6: Vista lateral da casa



Fonte: Dados da Pesquisa

Os estudantes novamente foram questionados sobre o objeto representado, como pode ser lido no excerto abaixo.

- Pesquisadora: *E agora, é diferente?*
 Todos: *Uma casa!*
 Pesquisadora: *O que vocês identificam aqui que parece uma casa?*
 Lucas e Eduardo: *O telhado e a parede.*
 Pesquisadora: *Será que falta mais algum elemento na casa?*
 Eduardo: *Porta e janela.*
 Pesquisadora: *E essa construção está em qual janela do GeoGebra?*
 Lucas: *3D*
 Pesquisadora: *E como fazemos pra ver se tem mais algum desses elementos construídos?*
 Beatriz: *Girando a casa*
 Lucas: *Pega o mouse e faz assim ó, gira o plano [realiza o movimento em seu computador].*
 Pesquisadora: *Então o Al vai girar para vocês verem se tem mais alguma coisa escondida.*

Lucas: *Não tem nada.... Ah, uma janela e uma porta!*
 Eduardo: *Nossa!*
 Beatriz: *Nossa! Eu pensei que era só assim, a casa.*

Quando os estudantes observam o triângulo sobre o retângulo, afirmam que se trata da representação de uma casa, e relacionam essas formas geométricas a um telhado e uma parede. Como eles já conhecem uma casa, ou seja, já têm a *construção mental* desse objeto, conseguem notar que os elementos apresentados se assemelham às características de uma casa.

A partir de questionamentos, os estudantes citam outros elementos que fazem parte de uma casa, mas não aparecem nessa representação, como porta e janela. Por se tratar de um objeto tridimensional e que está na janela 3D do GeoGebra, os estudantes afirmaram que era possível *rotacionar* o objeto, o que foi necessário para reconhecer suas particularidades e modificar a *perspectiva* em que é observado.

Nessa etapa, a casa foi rotacionada e os estudantes puderam observá-la sob diferentes *perspectivas* (Figura 3), quando conseguiram identificar elementos que, antes, não estavam visíveis. *Eduardo* e *Beatriz* mostram-se surpresos quando percebem que a casa completa envolve outros objetos geométricos além do triângulo e do retângulo que observaram anteriormente.

A abordagem de objetos geométricos espaciais em softwares possibilita uma visualização diferente a partir dos movimentos. Se a casa fosse observada de frente, de lado, e depois em outras posições, sem considerar o movimento de *rotação* da casa, seria possível reconhecer os elementos que a compõem, mas não teríamos noção de profundidade, altura, declividade e da distância entre seus elementos. Isso costuma acontecer quando olhamos imagens estáticas em um livro (Machado *et al.*, 2019).

O movimento de *rotação*, que alterou as *perspectivas*, foi fundamental para a identificação das características da casa para saber o que deveriam construir nas próximas etapas.

2ª etapa: Construção da Primeira Parede e Discussões Matemáticas

Os estudantes foram incentivados a sugerir como começar a construção do CA apresentado a partir de questionamentos que buscaram relacionar a construção com elementos matemáticos que consideramos necessários para dar forma a casa, como pode ser lido no excerto seguinte.

Pesquisadora: *Vamos pensar primeiro em como construir uma parede da casa. Que formato tem essa parede da casa?* [apontando para uma parede lisa]

André: *Um retângulo.*

Lucas: *Um retângulo mais fino.*

Pesquisadora: *E como ele [o retângulo] tem que ser?*

Lucas: *No 2D primeiro.*

Pesquisadora: *Porque 2D primeiro?*

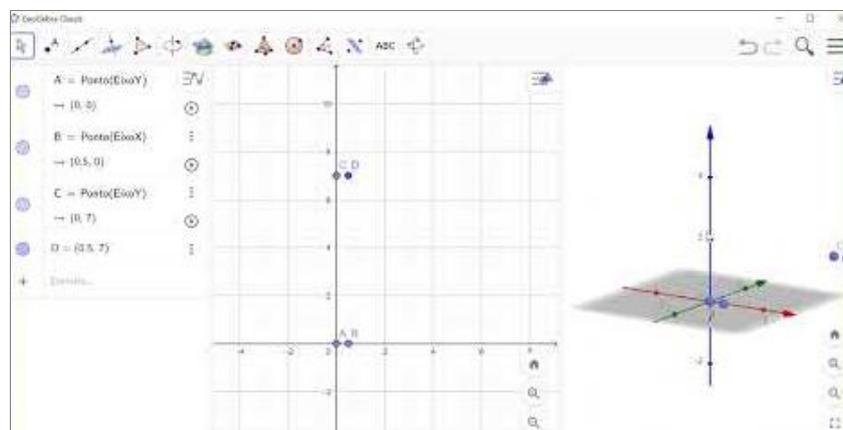
Lucas: *Aí a gente ajeita na janela 3D.*

Os estudantes consideram o prisma que representa uma das paredes da casa como o retângulo, que é uma forma geométrica plana: a forma das faces do prisma. Embora a construção seja iniciada pelo retângulo, ele possui propriedades diferentes do prisma.

A fala de *Lucas* expressa que ele estabeleceu relação entre as janelas de visualização 2D e 3D, ou seja, identificou que o objeto criado em um ambiente é representado no outro, e que as alterações sobre o objeto podem ser feitas em ambas as janelas. Suas ações sobre o software reiteram essa afirmação (Figura 7), porque depois que *Lucas* construiu os pontos e um retângulo na janela 2D, observou a representação na janela 3D *rotacionando* a construção para visualizá-

la em diferentes posições, buscando a *perspectiva* que lhe permitisse avaliar melhor os elementos construídos para dar continuidade a sua construção (Figura 7). Aqui, os movimentos atuam como conferência da ação realizada pelo estudante sobre o que informou ao software.

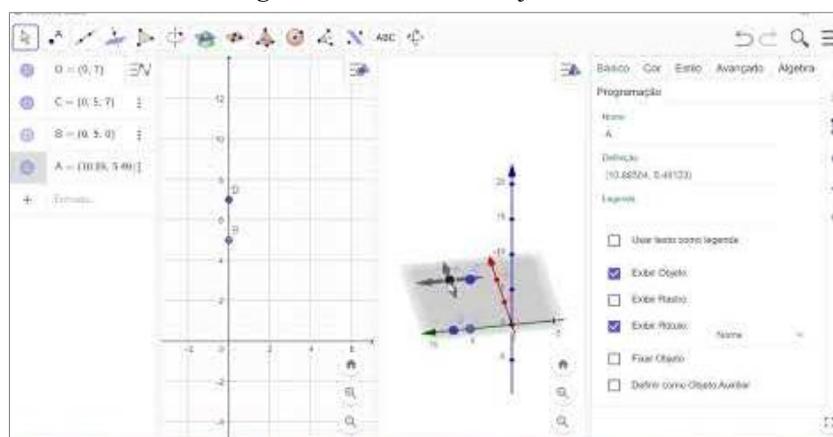
Figura 7: Movimentos na janela 2D e 3D do GeoGebra



Fonte: Dados da Pesquisa

Por outro lado, *Paulo* construiu e manipulou os pontos na janela 3D, e a *perspectiva* escolhida em um primeiro momento levou-lhe a equívocos em seu *juízo espacial*, pois causou a impressão de que os pontos estavam localizados no mesmo plano e alinhados. Quando o estudante *rotacionou* a janela 3D, pôde identificar que um dos pontos não estava no mesmo plano que o outros pontos, e foi necessário fazer alterações (Figura 8). Novamente, identificamos que o movimento auxiliou no processo de construção, possibilitando a identificação correta da localização dos pontos.

Figura 8: Movimentos na janela 3D



Fonte: Dados da Pesquisa

Depois de construir o retângulo, os estudantes foram questionados sobre a representação que obtiveram, comparando com a parede que tinham o objetivo de construir.

Pesquisadora: *E aí, o que apareceu na tela de vocês?*

Lucas: *Pra mim apareceu um retângulo no 2D e no 3D... na verdade, o do 3D tem só um pedaço.*

Pesquisadora: *E os objetos no 3D geralmente tem quantas dimensões?*

Gustavo: *Largura e comprimento?*

Eduardo: *Tem 3 dimensões.*

- Pesquisadora: *E esses dois objetos que estão representados [o retângulo nas duas janelas] têm alguma diferença nessa parte?*
- Gustavo: *A altura?*
- Pesquisadora: *O de lá [retângulo representado na janela 3D] tem altura?*
- Gustavo: *Acho que não.*
- Pesquisadora: *Como fazemos pra ver se esse objeto tem uma terceira dimensão? [...] Lembrem da casa lá do começo.*
- Eduardo: *Girar.*
[o A1 gira a janela 3D e os estudantes concluem que os objetos são iguais, nesse momento].
- Pesquisadora: *Então, aqui, nós já temos o retângulo da base, o que falta para se tornar uma parede?*
- Lucas: *Altura.*

Lucas, Gustavo e André reconheceram que utilizar somente o retângulo sugerido por eles anteriormente não foi suficiente para construir um objeto que representasse as características de uma parede da casa. A *rotação* realizada por A1, na janela de visualização 3D, auxiliou nessa percepção, evidenciando que o retângulo construído não possui altura.

Na sequência, foi indicada a utilização da ferramenta *extrusão para prisma*, necessária para dar continuidade à construção do objeto geométrico. O excerto a seguir inicia com uma estudante que não estava conseguindo realizar essa etapa da construção, e leva a uma discussão com os demais estudantes.

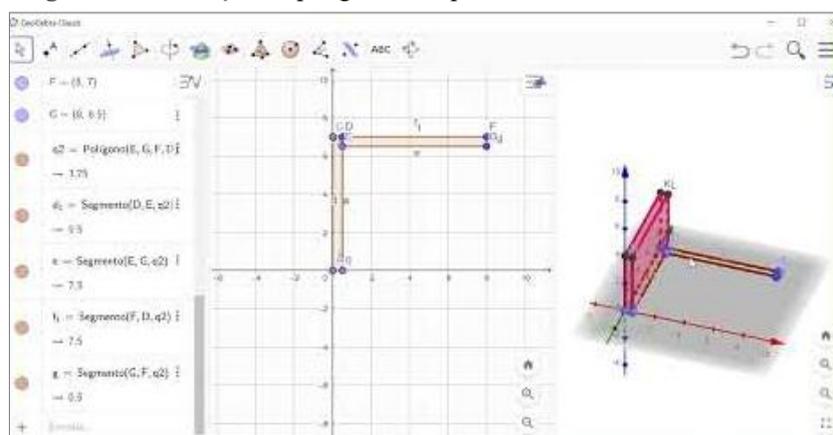
- Beatriz: *Professora, o meu não dá certo.*
- Pesquisadora: *Você precisa criar na janela de visualização 3D para dar certo... Por que será que se eu clicar na janela 2D não dá certo? Alguém sabe?*
- André: *Porque no 2D não vai ter altura.*
- Pesquisadora: *Isso mesmo!*
[...]
- Pesquisadora: *E agora, vocês conseguem ver alguma diferença entre o objeto do 2D e do 3D?*
- Todos: *Sim.*
- Lucas: *Ah, agora sim.*

Beatriz estava tentando utilizar a ferramenta *extrusão para prisma* na janela 2D do GeoGebra, o que não é possível, devido às características desse ambiente, que não possibilita a construção de objetos tridimensionais, como foi pontuado por *André*. A EA auxiliou outros estudantes que estavam com dificuldades nessa etapa. Depois de construído o prisma, a primeira parede estava finalizada, e com isso, os estudantes conseguem identificar diferenças entre as representações da janela 2D e 3D.

A construção da segunda parede foi feita de maneira análoga pelos estudantes. *Lucas* novamente *rotaciona* a janela de visualização 3D para analisar o objeto construído, e quando assume diferentes *perspectivas*, ele utiliza esse ambiente como base para sua orientação espacial (Figura 9, na página seguinte). Depois de rotacionar, costuma deixar as duas janelas na mesma *perspectiva* para, então, seguir para a próxima etapa.

O *juízo espacial* que ocorre a partir da *rotação* aliada à mudança de *perspectiva*, mostra como essas ações são importantes nas etapas da construção, para que o estudante compare a *construção mental* do objeto que pretende construir com a representação que efetivamente foi representada no software, e assim, perceba se é possível passar para a próxima etapa ou se são necessárias alterações.

Figura 9: Construção do polígono e do prisma verificando com movimento



Fonte: Dados da Pesquisa

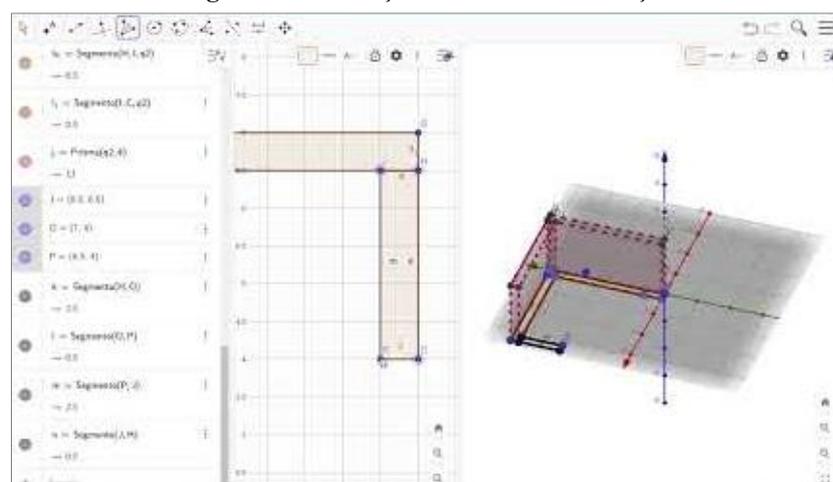
3ª etapa: Estratégias dos Estudantes na Construção da Parede com a Porta

Para construir a parede da casa que possui porta, pensando na concavidade do poliedro, não era possível seguir o mesmo passo a passo, e foi deixado como desafio aos estudantes.

Ana utilizou a ferramenta *zoom*, que permite ampliar ou diminuir a escala do plano cartesiano no momento de inserir pontos na janela 2D (Figura 10). Ela considerou a quantidade de quadrados da malha quadriculada para medir a distância entre os pontos, procurando deixar um espaço pré-estabelecido para a abertura da porta. A ferramenta *zoom* possibilitou que Ana tivesse precisão sobre o local em que inseriu os pontos, pois à medida que a malha quadriculada é ampliada, os quadrados menores ficam aparentes e os eixos assumem números decimais.

Essas ações corroboraram com o *julgamento espacial* da estudante, pois sem a utilização do *zoom*, ela não conseguiria, ou seria muito mais difícil plotar pontos diretamente na janela 2D para identificar a localização necessária e construir polígonos de mesmo tamanho, incluindo uma abertura para a porta entre eles. Depois, utilizou a ferramenta *extrusão para prisma*, atribuindo altura aos objetos.

Figura 10: Utilização do zoom na construção

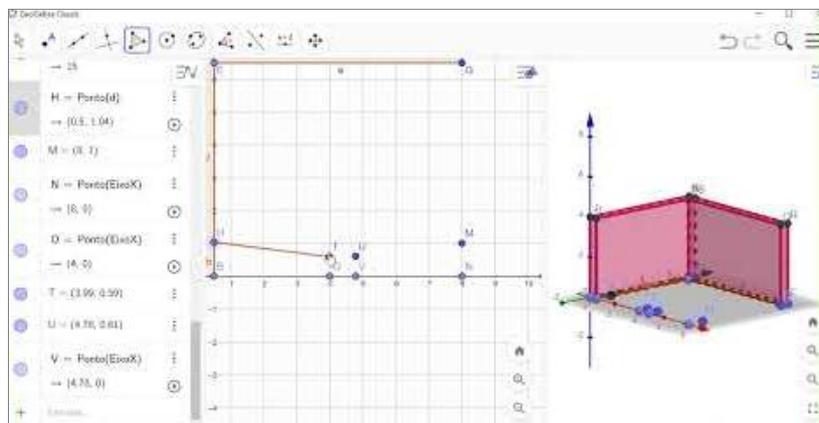


Fonte: Dados da Pesquisa

A dupla *Diego e Eduardo* e o estudante *Lucas* tentaram representar o formato da parede com abertura para a porta na janela 2D a partir da inserção de pontos. Quando *Lucas* realizou a extrusão para prisma e *rotacionou* a construção observando o objeto em diferentes *perspectivas*,

conseguiu identificar que a representação retornada não foi o que esperava. (Figura 11). Identificamos que o estudante se amparou na comparação entre as janelas 2D e 3D em boa parte das etapas da construção do CA, e que essa foi a principal fonte que utilizou para tomada de decisão, que vai além da simples imaginação do objeto geométrico.

Figura 11: Construção inicial da parede com a porta



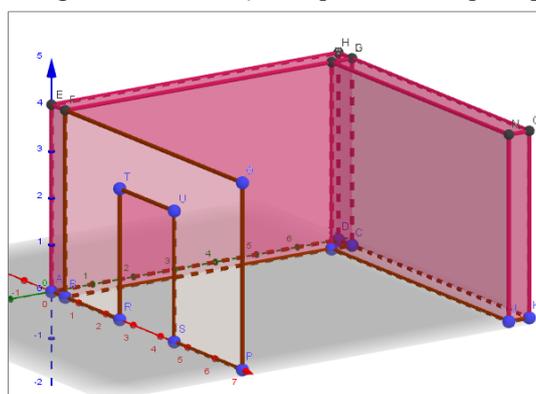
Fonte: Dados da Pesquisa

O estudante, então, procurou fazer alterações, reposicionando os vértices do polígono na janela 2D. Para isso, também se apoiou na utilização da ferramenta *zoom*. Depois de tentativas, ele desistiu de construir a parede a partir dessa estratégia, pois não conseguiu atingir a representação tridimensional desejada, e construiu algo semelhante ao que fez a estudante Ana.

Consideramos, a partir disso, que os movimentos possibilitados pela ferramenta *zoom* também influenciam e se fazem importantes no processo de construção da casa, especialmente para as partes minuciosas, que os estudantes dedicavam muita atenção, para não deixar os vértices desalinhados e conseqüentemente a parede deformada. Assim, pontuamos que o *zoom* também atua como um tipo de *perspectiva* do objeto, pois permite identificar detalhes na construção que não seria possível sem os movimentos de ampliação e redução. Desse modo, também influencia o *julgamento espacial* pelo alinhamento e precisão na localização dos objetos em escala ampliada ou reduzida.

Depois de um período disponibilizado aos estudantes para construírem essa parede, foi mostrada outra possibilidade de construção dessa etapa, conforme o roteiro (Figura 12, na página seguinte).

Figura 12: Construção da parede com a porta pela EA



Fonte: Dados da Pesquisa

Mesmo que os estudantes estivessem desenvolvendo outras estratégias, gostaríamos de chamar a atenção para essa possibilidade, para que os estudantes trabalhassem com a localização de coordenadas no espaço, e não somente no plano. Para isso, uma discussão sobre o formato da parede foi realizada com os estudantes.

Pesquisadora: *Pensando nessa parede com a porta, qual vai ser o formato dela? Nas outras era um retângulo.*

Lucas: *Um retângulo com um buraco no meio.*

Pesquisadora: *Então, se a gente for desenhar esse formato, seria mais ou menos assim, né? [desenha na lousa o formato] [...] E como vamos construir essa forma lá no GeoGebra?*

Diego: *Começa pelos pontos.*

Pesquisadora: *Mas onde vamos colocar esses pontos?*

Lucas: *Cria dois pontos como base e os que vão fazer o buraco coloca no 3D.*

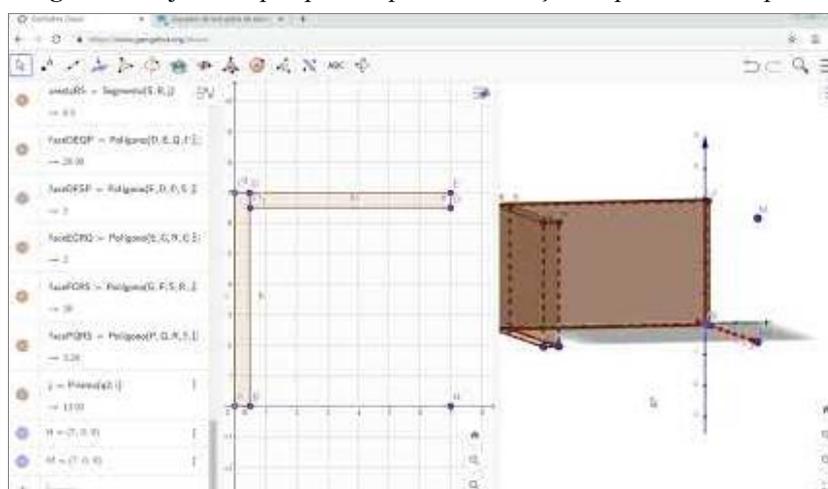
André: *São em alturas diferentes.*

A vista frontal da parede foi apresentada para que os estudantes reconhecessem o formato que queríamos construir. Seguindo a sugestão de *Diego* para começar construindo pontos, *Lucas* percebeu que nem todos os pontos deveriam ser construídos no plano, possivelmente levando em conta os testes que realizou quando tentou construir essa parede utilizando outra estratégia, anteriormente (Figura 11). *André* identificou que, quando o ponto não está construído no plano, a altura é modificada.

Nesse caso, para construir os pontos que representam os vértices do polígono no espaço, fica mais difícil plotá-los diretamente na janela 3D, de modo que fiquem posicionados exatamente no lugar desejado. Assim, foi indicado que as coordenadas dos pontos deveriam ser digitadas na caixa de entrada do GeoGebra. Nesse momento, os estudantes tiveram a oportunidade de explorar outros modos de representar um ponto, trabalhando com pares ordenados pertencentes à Geometria Analítica. Os primeiros pontos foram criados passo a passo com os estudantes para exemplificar o processo, e o restante foi deixado para construírem por si mesmos.

Com base nisso, a primeira ação realizada pela dupla *André e Gustavo* foi *rotacionar* a construção para ajustar a *perspectiva* da construção da casa, posicionando-a na lateral (Figura 13), de modo que conseguissem visualizar melhor a posição em que pretendiam construir os pontos para a porta: essa estratégia facilita o *juízo espacial*.

Figura 13: Ajuste da perspectiva para a construção da parede com a porta

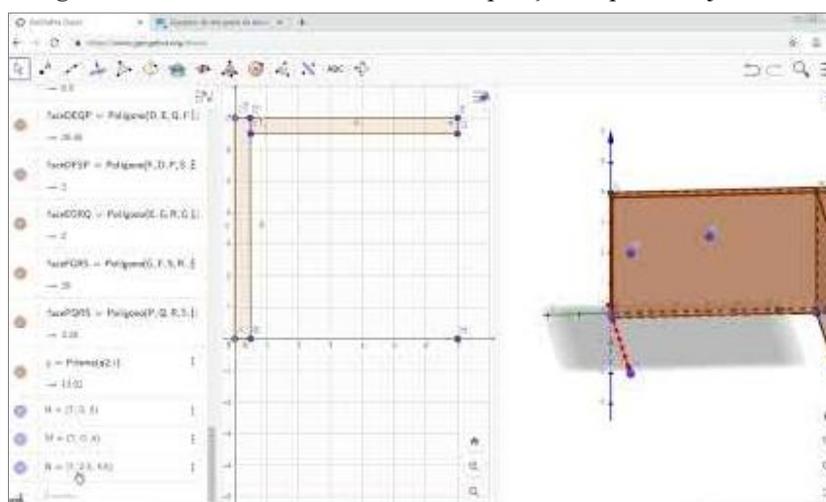


Fonte: Dados da Pesquisa

Quando começaram a digitar as coordenadas dos pontos, os estudantes estabeleceram relação entre a representação da janela de álgebra e da janela 3D, pois antes mesmo de clicar *enter* para criar o ponto, os estudantes identificaram que sua localização não ficou no lugar esperado e modificaram as coordenadas (Figura 14).

Após criar o primeiro ponto, os estudantes logo *rotacionaram* a janela 3D para conferir a posição do ponto em diferentes *perspectivas* (Figura 14), perceberam que seria necessário modificar a posição do ponto, e fizeram isso alterando as coordenadas na janela de álgebra (Figura 14).

Figura 14: Identificando e modificando a posição do ponto na janela 3D



Fonte: Dados da Pesquisa

Nesse momento, os estudantes copiaram as coordenadas do ponto de um colega ao lado, mas possivelmente, ao analisar o local em que foi posicionado o ponto, *Luis Gustavo* chegou a uma conclusão: *ah, x é a vermelha, y é a verde e z é a azul*, referindo-se à cor representativa dos eixos. A relação que estabeleceu entre os eixos e as coordenadas é outro indicativo da associação com a Geometria Analítica nas investigações sobre o ponto pertencente ao espaço tridimensional. Essa observação auxiliou a perceber o padrão entre as coordenadas dos pontos, e ele explica o que entendeu para seu colega *André*, como pode ser lido no excerto a seguir.

Gustavo: *A vermelha é a que está no 7, então a outra é a verde.*

André: *Eu vou tentar colocar o 2.*

Gustavo: *Ah, eu entendi. Se a gente colocar 4.5, vai ficar em cima daquela, e tem que colocar mais um.*

André: *Não entendi.*

Gustavo: *Aqui você copia da qual você quer colocar o ponto em cima, só muda a altura.*

André: *Ah, o último é a altura. Agora entendi.*

Gustavo identificou que, quando queria construir um ponto que ficasse posicionado na mesma *linha* que outro ponto, mudando somente a altura, as duas primeiras coordenadas poderiam ser repetidas, otimizando o processo de criação dos pontos (Figura 15).

A relação estabelecida entre a representação algébrica e gráfica dos pontos foi uma etapa importante para o aprimoramento do *juízo espacial* no ambiente do GeoGebra, de modo que a inserção dos demais pontos ocorreu sem grandes dificuldades. Depois da inserção de cada ponto, *Gustavo* e *André* apoiaram-se na *rotação* da janela 3D para conferir a posição ocupada.

De modo geral, quando construímos ou manipulamos objetos geométricos na janela 3D do GeoGebra, os movimentos de *rotação*, a escolha da *perspectiva* mais adequada e o

juízo espacial tanto são importantes quanto são necessários para efetivar a construção e para compreender como ela está ocorrendo.

Figura 15: Sequência de pontos da porta

	$H = (7, 0, 0)$
	$M = (7, 0, 4)$
	$N = (7, 2.5, 0)$
	$O = (7, 4.5, 0)$
	$T = (7, 4.5, 3)$
	$U = (7, 2.5, 3)$

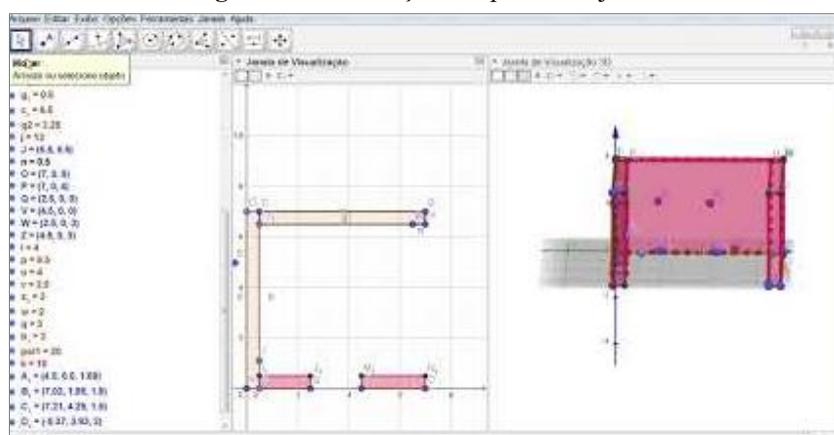
Fonte: Dados da Pesquisa

4ª etapa: Construção da Parede com a Janela

Os movimentos realizados durante a construção por boa parte dos estudantes parecem intuitivos e até mesmo óbvios. Entretanto, nem todos pensaram ou sentiram a necessidade de *rotacionar*, alterar a *perspectiva* de visualização do objeto ou aplicar o *zoom*, por exemplo. *Maria* não fez alterações relevantes na posição da casa e apresentou grande dificuldade no processo de construção.

Ao construir a última parede da casa, *Maria* decidiu plotar os pontos diretamente na janela 3D. Já havia dois pontos que foram criados em momento anterior, então ela criou outros dois e tentou construir um polígono unindo esses pontos para formar uma janela. Entretanto, depois que *Maria* iniciou a plotagem dos pontos, realizando várias tentativas, a estudante não movimentou a construção nenhuma vez, e na *perspectiva* em que ela observava a casa, supôs que a construção estava correta (Figura 16). Então, quando ela decidiu movimentar a construção, percebeu que os pontos foram criados para fora do espaço em que a casa estava representada, e precisou recomeçar (Figura 16).

Figura 16: Construção dos pontos da janela



Fonte: Dados da Pesquisa

Nesse caso, apesar de *Maria* ter a *construção mental* do objeto que pretendia construir,

a falta dos movimentos de *rotação* ou mudança de *perspectiva* após cada etapa da construção prejudicou a estudante, pois as estratégias utilizadas para dispor os pontos poderiam ter sido corrigidas antes, se manipulasse a construção. Além disso, ela não relacionou as representações do ponto nas diferentes janelas do GeoGebra. Quando deslocava os pontos fazendo manipulações na janela 3D, não se atentava que os valores de suas coordenadas eram alterados na janela de álgebra, que seria um outro modo de perceber que o ponto não estava ocupando uma posição adequada.

Caroline e Paulo encontraram um problema semelhante com a plotagem de pontos na janela 3D, como pode ser lido no excerto a seguir.

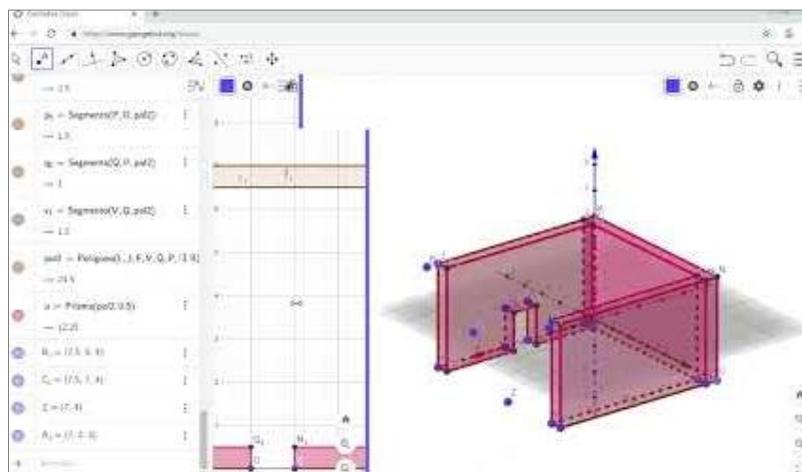
- Caroline: *Professora, não estou conseguindo fazer a janela, ele [o ponto] gruda no chão [no plano].*
- Pesquisadora: *Como assim?*
- Caroline: *Quando a gente vai fazer o ponto aqui [na janela 3D], ele gruda na outra parede, ou quando coloca um ângulo bom, ele gruda no chão.*
- Pesquisadora: *E como a gente faz pra tirar um ponto do chão?*
- Paulo: *Isso que a gente quer saber.*
- Pesquisadora: *O que a gente pode mudar nas coordenadas para tirar ele do chão?*
- Paulo: *O z vai pra cima e pra baixo.*
- Pesquisadora: *Exatamente: quando você muda a coordenada z, você consegue tirar ele do chão e subir um pouco. Por isso que nesse caso é melhor digitar as coordenadas na caixa de entrada, assim já coloca um ponto com altura.*

Ao contrário do que fez *Maria*, a fala de *Caroline* evidencia que ela realizou movimentos de *rotação* e mudou a *perspectiva* da casa na janela 3D, pois afirmou ter deixado em *um ângulo bom*, mas ainda encontrava dificuldades para criar os pontos na posição desejada.

Depois de criar o ponto e verificar que é necessário mudar a posição ocupada, é possível deslocá-lo para a direita, esquerda, para cima ou para baixo, como responde *Paulo* sobre a coordenada *z* do ponto, até que se consiga a posição almejada. Outra opção seria alterar as coordenadas diretamente na janela de álgebra, mas para isso, é preciso identificar os valores a serem digitados, estabelecendo uma relação entre as diferentes janelas de visualização. Nessas duas possibilidades de alteração, o *juízo espacial* entra em ação.

Ao construir a última parede da casa, *Ana* comparou três janelas do GeoGebra: de álgebra, 2D e 3D. A comparação foi associada ao movimento de *rotação* da janela 3D, e foi importante para que ela conseguisse posicionar os pontos no lugar desejado (Figura 17).

Figura 17: Comparação entre as três janelas do GeoGebra



Fonte: Dados da Pesquisa

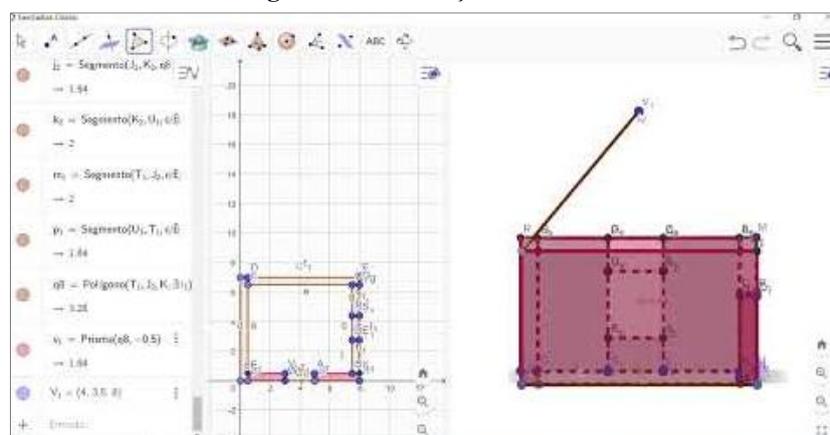
Ana reconheceu que, quando o ponto é criado na janela 2D, possui somente as coordenadas x e y , e para que seja deslocado do plano, é necessário acrescentar um valor para a terceira coordenada, z , que ela realizou utilizando a janela de álgebra. Depois disso, a representação deixa de aparecer na janela 2D e passa a aparecer na janela 3D, na qual *rotacionou* e mudou a *perspectiva* para prosseguir com as alterações.

No diálogo entre as duplas, foi possível identificar que, no decorrer das etapas de construção dessa última parede da casa, a relevância dos movimentos foi notada por eles. *Gustavo*, em conversa com seu colega de dupla, *André*, pediu, depois que criaram pontos para a janela da casa: *olhe de outro jeito pra ver, que às vezes tá certo, mas você olha de outro jeito e não tá*. Nesse trecho, *Gustavo* sugere a mudança de *perspectiva* para identificar se construíram os pontos no lugar correto. Já a dupla *Diego e Eduardo* precisava encontrar uma maneira de ligar os pontos que formavam a janela da casa sem preencher a parte interna. Então *Diego* indicou: *vá ali em mover e deixe o ângulo reto*. Nesse caso, a *perspectiva* adequada auxiliou no processo.

5ª etapa: Construção do telhado e finalizações

Com o decorrer das etapas da construção, os estudantes aprimoraram as estratégias utilizadas e passaram a cometer menos equívocos, ou quando cometiam, conseguiam resolvê-los rapidamente. *Lucas*, ao construir o telhado da casa, colocou um ponto deslocado do lugar que deveria, devido à *perspectiva* assumida no momento, mas quando *rotacionou* a construção e percebeu o que ocorreu, soube como resolver o problema, afirmando: *eita, o número tem que ser zero* (Figura 18, na página seguinte). Assim, realizou a mudança necessária e prosseguiu com a construção do telhado.

Figura 18: Construção do telhado



Fonte: Dados da Pesquisa

Depois que a última parte da casa foi construída, os estudantes foram instruídos a programar os movimentos da porta, da janela e do telhado, conforme mostrado no CA finalizado (Figura 3). Na sequência, tiveram a possibilidade de personalizar o CA, modificando as cores. Nem todos os estudantes conseguiram finalizar.

Após a construção, foi entregue uma folha para que os estudantes dessem um feedback sobre os encontros, indicando *se gostaram de trabalhar com o GeoGebra ou se preferiam utilizar o caderno nas aulas de matemática*. Algumas respostas podem ser lidas a seguir.

Estudante 01: *No GeoGebra é melhor de ver porque dá para ver os lados e as formas.*

Estudante 02: *No GeoGebra dá para ver de 6 ângulos diferentes [...] e olhar forma por forma.*

Estudante 03: *Eu prefiro no papel, porque no GeoGebra são muitas linhas e pontos e eu me confundo (minha opinião).*

A maioria indicou a preferência pelo software, com exceção do *Estudante 03*. Além de apresentar uma afirmativa ou negativa sobre a utilização do software, as respostas fornecidas destacaram ações que remetem aos movimentos.

7 Considerações Finais

A utilização de movimentos relacionados às HE foi identificada nas ações dos estudantes sobre o GeoGebra no momento de construir o CA proposto, e trouxe contribuições para esse processo.

O movimento de rotação foi identificado em quase todas as etapas da construção, e esteve relacionado principalmente às HE de *rotação mental e perspectiva*. Nos momentos em que os estudantes utilizaram esse movimento, conseguiram identificar erros na construção e corrigi-los, conferir e testar suas estratégias sobre o que informaram ao software, comparando com a *construção mental* que fizeram do objeto. A partir da mudança de *perspectiva* proporcionada pelo movimento de rotação, os estudantes puderam escolher a posição mais adequada para construir um objeto ou, depois de construir, também utilizaram a rotação para identificar a posição real em que o objeto foi construído.

A ferramenta *zoom* do GeoGebra possibilitou os movimentos de ampliar e reduzir, também identificados como um tipo de mudança de *perspectiva* e que se associa ao *juízo espacial*, uma vez que, ao ampliar ou diminuir a escala do plano cartesiano, torna possível perceber características dos objetos que antes eram inacessíveis, assim como auxilia na determinação de tamanho, posição e distância entre objetos.

Para ajustar a posição dos vértices dos objetos geométricos, foi utilizado o movimento de reposicionar sobre a representação gráfica dos pontos nas janelas de visualização 2D e 3D. Esse movimento também esteve relacionado ao *juízo espacial* dos estudantes pelo alinhamento e precisão na localização dos objetos.

A janela 3D do GeoGebra foi o ambiente que possibilitou a utilização de mais movimentos, considerando as características desse ambiente; ao contrário da janela 2D, em que o único movimento aplicado foi com a ferramenta *zoom*. Em várias etapas, o mesmo objeto foi comparado pelos estudantes nas diferentes janelas do GeoGebra. Isso também auxiliou na construção, pois as modificações no objeto poderiam ser feitas considerando sua representação plana, espacial ou algébrica, dependendo de qual o estudante considerasse mais viável para resolver a situação.

Portanto, os movimentos executados a partir de ferramentas do GeoGebra e seu ambiente dinâmico auxiliaram na tomada de decisão dos estudantes durante o processo de construção do CA *Casa*, percebendo se era possível passar para a próxima etapa ou se precisavam realizar alterações.

Além de auxiliar no processo de construção, os movimentos realizados foram importantes para a exploração de propriedades conceituais e das representações dos objetos geométricos envolvidos, especialmente os tridimensionais, nos quais não é possível visualizar todos os lados sem movimentar. Desse modo, quando ocorria a comparação de objetos geométricos nas diferentes janelas do GeoGebra, era possível o reconhecimento das características que os definem e que os diferenciam.

Com isso, a utilização de CAs enquanto uma prática de ensino de Matemática, se mostrou eficiente em relação ao objetivo proposto nesta pesquisa, em especial, ao ser

desenvolvida num contexto de sala de aula regular do Ensino Fundamental. Para investigações futuras, as construções de CAs podem ser adaptadas a outros contextos educacionais, diversificando o conteúdo e o nível escolar.

Agradecimentos

Agradecemos ao PRPGEM e à Capes/PROAP pelo auxílio financeiro na realização desta pesquisa.

Referências

- Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. (2018). *Base Nacional Comum Curricular: Educação é a base*.
- Bueno, A. C. & Basniak, M. I. (2020). Construcción de escenarios en GeoGebra en la movilización de conocimientos matemáticos por alumnos con altas habilidades/superdotados. *Revista Paradigma, XLI*(Extra 2), 252–276.
- Koftun, C. M. & Basniak, M. I. (2024). Pensamento Espacial e Movimentos em Geometria: o GeoGebra com enfoque na construção de cenários animados. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo, 13*, 16–31.
- Koftun, C. M. (in press). *Movimentos Associados a Habilidades Espaciais em Construções de Cenários Animados no GeoGebra para a Diferenciação de Objetos da Geometria Plana e Espacial* [Tese de mestrado, Universidade Estadual do Paraná].
- Machado, E., Bortolossi, H. J. & Almeida Junior, R. (2019). *Explorando Geometria 2D e 3D na Escola Básica com o Software Gratuito GeoGebra para Smartphones e Tablets* (1st ed.). Sociedade Brasileira de Matemática.
- Notare, M. & Basso, M. V. A. (2016). Geometria Dinâmica 3D – novas perspectivas para o pensamento espacial. *Revista Novas Tecnologias Na Educação, 14*(2).
- Quizizz. (2021). *Questionário: Analogias com figuras geométricas*.
- Tversky, B. (2019). *Mind in Motion: How Action Shapes Thought* (1. ed.). Basic Books.