Sociedade Brasileira de Educação Matemática

RIPEM

As Demonstrações Matemáticas e a Educação Básica: um estudo em hermenêutica filosófica

Carlos Alberto Tavares Dias Filho
Secretaria Municipal de Educação de São Paulo
São Paulo, SP — Brasil
carlos.atdf@gmail.com
0000-0002-0261-9822

Verilda Speridião Kluth
Universidade Federal de São Paulo
São Paulo, SP — Brasil
verilda@nlk.com.br
0000-0001-9865-5694

2238-0345

10.37001/ripem.v15i1.4232

Recebido • 16/07/2024
Aprovado • 26/02/2025
Publicado • 05/04/2025

Editor • Gilberto Januario

Resumo: No presente artigo, apresentamos a pesquisa acerca da Interrogação Norteadora: como trabalhar didaticamente a demonstração matemática na escola básica? Realizamos uma análise em Hermenêutica Filosófica. No primeiro momento, fizemos a construção de um texto-solo a partir da leitura hermenêutica de textos da tradição matemática. No segundo momento, analisamos o texto-solo apontando indícios das estruturas do fenômeno. A partir destas estruturas, descrevemos orientações para o trabalho didático com demonstrações matemáticas, que podem ser resumidas como: (a) definição de demonstração matemática adotada a partir de suas finalidades; (b) justificativa para o uso da demonstração matemática, principalmente pelo motivo da limitação humana de compreensão e da limitação temporal; (c) modo de construção da demonstração socialmente aceito como válido na atualidade a partir da finalidade adotada; (d) o papel da argumentação e provas ingênuas frente à demonstração formal e as competências matemáticas; e (e) a linguagem matemática, sua escrita e a linguagem sobre matemática.

Palavras-chave: Demonstração Matemática. Fenomenologia. Hermenêutica Filosófica. Argumentações e Provas Matemáticas. Educação Matemática.

Mathematical Demonstrations and Basic Education: a study in philosophical hermeneutics

Abstract: we are presenting the research around the guiding question: *How to do mathematical demonstrations in basic education didactically?* The analysis in Philosophical Hermeneutics first moment was the construction of the ground-text based on a hermeneutics reading of texts from the match tradition; the second moment we analysed the ground-text pointing to clues about the structures of the phenomenom. Then we described aspects of the didactical work of mathematical demonstrantions, summarized as: (a) definition of mathematical demonstration adopted from its purposes; (b) justification for the use of the mathematical demonstration, mainly because of the human limitation of understanding and the temporal limitation; (c) way of constructing the demonstration that is socially accepted as valid today, based on the purpose adopted; (d) the role of argumentation and naive demonstrations compared to formal demonstration and mathematical skills; and (e) the mathematical language, its writing and the language about mathematics.

Keywords: Mathematical Demonstration. Phenomenology. Philosofical Hermeneutics. Argumentation and Math Proofs. Math Education.

Demostraciones Matemáticas y Educación Básica: un estudio en hermenéutica filosófica

Resumen: este artículo presentamos la investigación sobre la pregunta rectora: ¿Cómo enseñar la demostración matemática en las escuelas básicas? Realizamos un análisis en Hermenéutica Filosófica, el primer momento, la construcción de un solo texto a partir de la lectura hermenéutica de textos de la tradición matemática; en el segundo momento analizamos el texto individual, señalando signos de las estructuras del fenómeno. A partir de estas estructuras, describimos pautas para el trabajo didáctico con demostraciones matemáticas, que se pueden resumir en: (a) definición de demostración matemática adoptada en función de sus propósitos; (b) justificación del uso de la demostración matemática, principalmente debido a la limitación humana de comprensión y la limitación temporal; (c) método de construcción de la manifestación socialmente aceptada como válida actualmente en función del propósito adoptado; (d) el papel de la argumentación y las pruebas ingenuas en comparación con la demostración formal y las habilidades matemáticas; y (e) lenguaje matemático, su escritura y el lenguaje sobre las matemáticas.

Palabras clave: Demostración Matemática. Fenomenología. Hermenéutica Filosófica. Argumentos y Pruebas Matemáticas. Educación Matemática.

1 Introdução

A demonstração matemática é um ponto central do fazer matemático, como vemos em diferentes trabalhos, como em Garnica (2002), Fiorentini e Oliveira (2013). Esse destaque da demonstração é descrito por Bicudo (2002, p. 80) quando escreve: “parece um fato notório que o matemático, quando expõe uma teoria, em sua área de interesse, a seus pares, preocupa-se, formalmente, com duas operações fundamentais: definir seus conceitos e demonstrar as propriedades desses conceitos”.

Todos que passaram por uma formação matemática a nível superior se encontraram com demonstrações matemáticas em algum momento. Embora, talvez nos primeiros encontros com demonstrações, a sensação possa ter sido como a descrita por Lourenço (2002, p. 101): “[...] para demonstrar teoremas, em geral, o professor concebia ideias, e artifícios extraordinários, tirados de não sei onde, e, magicamente concluía, escrevendo c.q.d.”. Fica-se o questionamento de como poderia o(a) docente ter trabalhado diferentemente esse conteúdo?

Para tanto, precisamos pensar na prática docente que não está dissociada da formação profissional. Considerando o(a) professor(a) que ensina matemática um(a) profissional dotado(a) de variados conhecimentos específicos:

> a) o conhecimento matemático se configura como uma das dimensões do conhecimento do professor de Matemática. Apesar de os autores se voltarem para o estudo da dimensão matemática do conhecimento do professor de Matemática, em nenhum momento eles negam a existência ou inferiorizam qualquer das demais dimensões do conhecimento do profissional professor; b) a dimensão matemática do conhecimento do professor de Matemática se configura como uma composição entre o conhecimento pedagógico do conteúdo e o conhecimento do conteúdo. Ou seja, o professor de Matemática mobiliza, no decorrer de sua atividade profissional, tanto o conhecimento do conteúdo específico quanto o conhecimento pedagógico do conteúdo, de modo que a qualidade do ensino da Matemática está associada à mobilização, dentre outras, de ambos os conhecimentos, sendo indissociáveis na prática docente; c) a diferenciação entre a Matemática como objeto do trabalho do professor de Matemática na Escola Básica e a Matemática como objeto de trabalho dos matemáticos. (Caldatto, Pavanello & Fiorentini, 2016, p. 913).

E, para além disso,

> Em relação à diversidade, queremos destacar que o conhecimento matemático do professor não se limita aos aspectos conceituais, procedimentais e atitudinais da matemática escolar ou acadêmica. A compreensão da matemática, enquanto objeto de ensino e aprendizagem, implica, também, conhecer sua epistemologia e história, sua arqueologia e genealogia, sua linguagem e semiose e sua dimensão político-pedagógica no desenvolvimento das pessoas e da cultura humana. A matemática também precisa ser compreendida em sua relação com o mundo, enquanto instrumento de leitura e compreensão da realidade e de intervenção social, o que implica uma análise crítica desse conhecimento. (Fiorentini & Oliveira, 2013, p. 925).

Ao mesmo passo, cursos de formação básica, continuada e de mestrado profissional enfatizam e exploram técnicas de resolução de problemas e demonstrações matemáticas, como nos contam Caldatto, Pavanello e Fiorentini (2016) sobre o Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT.

Enquanto discute-se a formação de professores de matemática nos meios acadêmicos, na esfera da política pública educacional, foram produzidos currículos para a educação básica, como a Base Nacional Curricular Comum, BNCC (Brasil, 2018), o Currículo da Cidade de São Paulo (São Paulo, 2019a) e os cadernos de Orientações Didáticas do Currículo da Cidade (São Paulo, 2019b, 2019c) entre outros. Estes documentos listam as Competências, as Habilidades, os Objetos do Conhecimento e os Objetivos de Aprendizagem e Desenvolvimento para o componente curricular de matemática, bem como uma série de sugestões e estratégias para o seu ensino. Dentre as estratégias, encontram-se as demonstrações matemáticas.

Assim, compreendemos a demonstração matemática como estratégia para o ensino de matemática, mesmo a nível de educação básica, tendo noção de que o saber demonstrar não garante a efetivação do processo de ensino-aprendizagem, mas age na formação daquele que, para além do domínio do conhecimento que ministra, deve também dar resposta as exigências ao sistema de ensino emitidas pela política pública. Com base nisso, enunciamos a Interrogação Norteadora da pesquisa que apresentamos neste artigo: *Como trabalhar didaticamente a demonstração matemática na educação básica?*

Cientes de que nossa busca deve perpassar pelos meandros indicados tanto pela pesquisa da educação matemática como também por aqueles originários da educação, agora mesclados com o conhecimento matemático e com a sua construção no mundo ocidental, contextualizados em processos de ensino e aprendizagem, encontramos na Hermenêutica Fenomenológica um método de pesquisa teórica com possibilidades de abranger a mescla de conhecimento anunciados na Interrogação Norteadora da pesquisa e ao mesmo tempo nos propiciar um procedimento prático, explicitado no próximo item. Método este que não assume a dicotomia entre homem e conhecimento, teoria e prática, sujeito e objeto de estudo, cisões próprias de pesquisas positivistas.

Assim esta pesquisa tem como rede de sustentação a Fenomenologia, em busca do nuclear das diversas áreas que envolvem o perguntado pela pergunta orientadora da pesquisa.

2 Trajetória da Pesquisa

Não podemos falar da trajetória da pesquisa aqui apresentada sem falarmos da postura fenomenológica mencionada anteriormente, que não se restringe tão somente a metodologia de tratamento de dados, abrangendo também concepções de mundo, de ciência e de pesquisa. Desta forma, é o esclarecimento dos princípios que regem a análise dos dados que legitimam e sustentam os resultados da pesquisa. A postura por nós adotada transparece ao longo do texto e, em particular, na Interrogação Norteadora.

Bicudo (2012) nos fala da terna interrogação-interrogado-quem interroga em suas bases e implicações filosóficas na pesquisa fenomenológica. O modo como a Interrogação Norteadora é enunciada é intencional e reflete aquilo que quem interroga busca no interrogado. Em outras palavras, a Interrogação Norteadora recebe este nome por ser uma construção intencional enunciando aquilo que o pesquisador busca no mundo-vida[1].

> A interrogação se comporta como se fosse um pano de fundo onde as perguntas do pesquisador encontram seu solo, fazendo sentido. Ela persiste, ainda que a pergunta específica de um determinado projeto seja abordada, dando-se conta do indagado. A interrogação interroga. O que ela interroga? O mundo. Não o mundo em sua generalidade vazia, mas aspectos específicos do mundo que se mostram em suas fisicalidades pragmáticas, teóricas, tecnológicas, ideológicas. Ela se constitui no norte que dá direção aos procedimentos da pesquisa. (Bicudo, 2012, p. 20).

Conforme Bicudo (2012), a interrogação dá o norte e sugere a trajetória da pesquisa. Neste estudo, que reflete sobre o trabalho didático das demonstrações matemáticas, a ser realizado por educadores/professores de matemática, a interrogação, enquanto direção, conduz nosso olhar para aquilo que é perguntado do fenômeno investigado no mundo-vida ou em materializações que o expressam em suas características eidéticas. No caso da nossa pesquisa, a Interrogação Norteadora busca compreensões sobre o interrogado em textos da tradição matemática, do âmbito da educação matemática e de documentos educacionais, visto que realizamos uma hermenêutica filosófica enquanto metodologia de análise de textos. Encontramos em Kluth (2005) as bases para a elaboração e execução da análise.

Kluth (2005) descreve seu estudo em Gadamer (1997) sobre *os fenômenos da compreensão e a maneira de interpretar*. A filosofia hermenêutica de Gadamer (1997) e Kluth (2007) encontra apoio, principalmente, na natureza da presença e na tradição, e mais, constata que compreensões e interpretações estão corretas na medida em que ambas (natureza e tradição) são consideradas.

A tradição nesta abordagem é entendida como experiência veiculada pela linguagem, o que neutraliza de certa forma a perspectiva da distância temporal entre aquele que analisa o texto e o momento da escrita do texto. Em consequência, temos na hermenêutica filosófica gadameriana que a tradição.

> outrora entendida como um entrave para a interpretação de textos e obras, converte-se em experiência veiculada pela linguagem como uma possibilidade de compreensão/interpretação das obras humanas no modo de proceder no âmbito do círculo hermenêutico gadameriano, que se dá na *estrutura da pergunta e da resposta* constituindo o que o autor chama de *autêntica conversação*, que tem como pano de fundo o modo de ser das *presenças e a* tomada de consciência dos efeitos que a própria História promove constituindo a sua historicidade como formas de compreensão/interpretação. Está inclusa, nesta tomada de consciência, a consciência da compreensão da própria História como uma forma de efeito, nomeada por Gadamer (1997) de *consciência da história efeitual;* imprescindível sempre que uma obra ou

[1] Do alemão Lebenswelt é o mundo que aí ¨está e é¨, intencionalmente, com intencionalmente ¨para e pela vida¨. Um mundo ¨temporalizado¨ que se direciona com a finalidade da vida ¨espacializada¨. Ele se apresenta como uma primeira determinação intencional em busca do conceito: é o solo no qual toda experiência (vivência) acontece. (Kluth, 2011, p. 77).

> uma tradição tiver que sair da obscuridade. (Kluth, 2007, p. 99).

A autora descreve que as tradições, em particular aquelas que chegam a nós por meio da linguagem, carregam a intenção e a evidência de uma vivência daquele que escreveu o texto. Assim, a tradição carrega em si uma possibilidade de compreensão/interpretação ao ser trabalhada numa estrutura de perguntas e respostas, a qual Gadamer (1997 *apud* Kluth, 2005) chama de *autêntica conversação* que ocorre pelo modo de ser da presença. Para Heidegger (1993 *apud* Kluth, 2005) e Gadamer (1997 *apud* Kluth, 2005) a presença se traduz em compreensão e interpretação. A presença se traduz, essencialmente temporal e inegável, em compreensão e interpretação à medida que se orienta a vista "às coisas mesmas", na intenção de compreender e interpretar a presença.

A *consciência da história efeitual* pode ser compreendida como a tomada de consciência da história que discerne aquele que interpreta os textos e dos efeitos que uma determinada interpretação de um fenômeno provocou, efeitos que não necessariamente dizem respeito à natureza do perguntado, ou seja, partem da tarefa hermenêutica, consistem desta tomada de consciência, que se relaciona com a terna descrita por Bicudo (2012) do interrogação-interrogado- quem interroga. O pesquisador que toma por base a fenomenologia precisa assegurar uma postura científica de ir "em direção às coisas mesmas" distinguindo seus resultados de posições prévias, conceitos populares ou hipóteses. A postura fenomenológica é de interrogação direcionada ao fenômeno e de abertura para as possibilidades de respostas.

Pelas nossas explicitações sobre tradição, experiência veiculada pela linguagem e postura fenomenológica frente ao mundo, podemos tomar as demonstrações matemáticas "[...] como um texto matemático inserido na tradição da Matemática ocidental" (Kluth, 2007, p. 99). Dado que o foco da reflexão gadameriana é a hermenêutica dos textos das Ciências Humanas, Kluth (2007) questiona sobre o horizonte da expansão de compreensão da tradição e dos textos nas Ciências Humanas para a Ciência Matemática e encontra em Husserl (2006) respostas. Kluth (2007) apresenta a análise husserliana acerca dos temas de *subjetividade*, *intersubjetividade* e *objetividade* em termos da vivência humana, do percebido, do intuído, do falado e do escrito.

Resumidamente, a autora nos explica que a objetividade matemática, enquanto tradição, origina-se de uma atividade criadora e subjetiva embasada por uma *evidência originária*, presente no mundo-vida. Deste modo, a objetividade matemática pode ser compartilhada e mantida seja pela linguagem falada ou pela linguagem escrita. A construção/produção dessa objetividade é realizada por todos que vivenciam a evidência originária, ao mesmo tempo que já foi construída/produzida por aqueles que já viveram a evidência originária e será também por aqueles que ainda irão vivê-la.

> Essa maneira de fazer-se presente a muitos, em tempos distintos e de forma genuína, é a mesma para todos em termos estruturais; o que gera a objetividade no âmbito da subjetividades e dá à realização matemática primeira, e às suas derivações, uma singular atemporalidade e não-independência porque essas realizações necessitam de alguém que as realizem e as re-compreendam. A objetividade matemática caracteriza-se, portanto, como uma objetividade ideal em contraste com a objetividade real, que é temporal e independente por estar à mercê da sua própria natureza. (Kluth, 2007, p. 100).

O processo de interpretação e compreensão se realizam no caminhar "em direção às coisas mesmas"[2], na matemática, como nos conta Kluth (2007) ao citar o trabalho de Husserl (2006). A partir disso, almejamos, então, uma evidência originária que, no caso da Ciência Matemática, representa a busca por uma objetividade ideal, que pode estar presente em todos os viventes humanos independentemente do tempo vivido.

Retomando o foco da investigação apresentada neste artigo, acrescida de toda a base filosófica apresentada, tomamos as demonstrações matemáticas como tradição humana[3], em uma formação ideal. Assim, tecemos um movimento de análise caminhando para o *Apriori universal histórico*[4], desta tradição tomada em sua temporalidade mantida e atualizada em diferentes presentes históricos por meio da linguagem. É, portanto, um movimento que busca pelo sentido presente no encontro do indivíduo com as demonstrações construídas ou em formação. E mais, quando enunciamos nossa Interrogação Norteadora, enunciamos nossa intenção também em pensar as relações desta tradição da Ciência Matemática com o ensino de matemática a nível de Educação Básica.

O passo seguinte da pesquisa foi a elaboração de uma descrição dos sentidos revelados, pelo estudo hermenêutico dos textos, na tradição matemática ocidental na busca pelo *Apriori universal histórico* da demonstração. Essa descrição foi realizada em dois momentos de *epoché*[5].

O *primeiro momento de epoché* é uma análise hermenêutica de textos da tradição das demonstrações matemáticas que a nós se apresentaram e mostraram indícios de respostas quando interrogados por nossa Interrogação Norteadora: *Como trabalhar didaticamente a demonstração matemática na escola básica?* Após compreender a trajetória do desenvolvimento da idealidade demonstração e as razões que a sustentam. Descremos esta análise hermenêutica na forma de um texto-solo, nomeado desta forma por ser a base para o segundo momento de *epoché*. Apresentamos uma lista dos textos analisados no primeiro momento de *epoché*.

> Os textos, a linguagem a nós transmitida, que nos apareceram como sugestões de resposta. são de diferentes fontes. Dentre os textos analisados tivemos: (a) textos da Coleção do Professor de Matemática da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) como Tao (2013) e Morais Filho (2016, 2018); (b) textos e trechos de livros da Coleção PROFMAT também da SBM, como (Neto, 2013), (Morgado & Carvalho, 2015) e (Hefez, 2016); (c) textos do Boletim de Educação Matemática (BOLEMA) do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquista Filho" – Campus Rio Claro, principalmente do ano 15, n.18 (set. 2002) edição com seção especial voltada à demonstração matemática; (d)

[2] "*Zu den Sachen Selbst* como ¨em direção às coisas mesmas¨, uma tradução da autora, vem substituir a expressão ¨ir às coisas mesmas¨ usualmente conhecida, uma vez que no alemão o termo *zu* designa uma direção e não a ação que realizamos ao seguir a direção. Para além disso, no nosso entender o ¨ir as coisas mesmas¨ sugere que as coisas mesmas são o lugar aonde chegaremos, se utilizarmos o método. Um contrassenso, pois o método fenomenológico não se propõe a esgotar o conhecimento da coisa visada. Merleau-Ponty (1973, p. 75) esclarece: ¨Husserl percebeu que, na realidade, toda intuição de essência comporta sempre ¨certo grau de ingenuidade, ou seja, de não consciências." (Kluth, 2020, p.88)

[3] [...] converte-se em experiência veiculada pela linguagem como uma possibilidade de compreensão/interpretação das obras humanas no modo de proceder no âmbito do círculo hermenêutico gadameriano, que se dá na estrutura da pergunta e da resposta constituindo o que o autor chama de autêntica conversação, que tem como pano de fundo o modo de ser das presenças e a tomada de consciência dos efeitos que a própria História promove constituindo a sua historicidade como forma de compreensão/interpretação. (Kluth, 2007, p. 99).

[4] O *a priori* universal histórico é uma compreensão peculiar da fenomenologia husserliana sobre a trajetória histórica do objeto pesquisado que designa a origem dele (Urspung), que se refere a situações de acontecimentos e o modo como essas são apreendidas e significadas pelo humano. Husserl usa a terminologia *a priori*, escrita da forma apresentada para diferenciar a ideia de origem na fenomenologia da noção cultivada em outras correntes histórico-filosóficas.

[5] "*Epoché* trata de uma análise que se efetua conforme aquele que estuda e compreende a tomada de consciência de seus preconceitos e os coloca em suspensão, ou seja, analisa e permanece aberto a possiblidades que surgem da estrutura da pergunta (Kluth, 2005)" (Dias Filho, 2020, p. 24).

> Textos orientadores de Currículo, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e o Currículo da Cidade de São Paulo (Currículo da Cidade), acrescido dos dois volumes de orientações didáticas; (e) um texto de divulgação matemática, explicando os passos da Demonstração de Gödel (Nagel & Newman, 2015); (f) um texto sobre educação matemática voltado para demonstração e aplicação (Hanna & Jahnke, 1993); e (g) um texto de um livro didático de Álgebra destinado a, segundo seu prefácio, licenciaturas e/ou bacharelados em matemática de Domingues e Iezzi (2018). (Dias Filho, 2020, p. 26)

O *segundo momento de epoché* é um movimento de se ter uma *autêntica conversação*, nos termos gadamerianos, com a tradição por meio de uma análise hermenêutica do texto-solo e sua estruturação na forma de perguntas e respostas. Buscamos no texto-solo quais perguntas este responde sobre o modo de ser das demonstrações matemáticas e aquilo que é invariante nos diferentes discursos analisados e compilados no texto-solo. "Portanto, trata-se de uma leitura hermenêutica do texto-solo, com a intenção de formular as perguntas que ele responde sobre a construção/produção de conhecimento [...], com o intuito de revelar os invariantes desta construção/produção" (Kluth, 2007, p. 103).

Apresentamos um trecho do texto-solo, com duas perguntas e seus indícios de respostas destacados:

> Dessa maneira, surgem geometrias que negam o postulado das paralelas, geometrias não euclidianas (a partir de 1829). Em outros campos, houve a axiomatização dos sistemas numéricos, de noções de grupos, corpo e espaço vetorial; bem como surgimento de álgebras não convencionais e a aritmetização da análise.
>
> | |
> |---|
> | Qual é o modo de ser da Demonstração Matemática? |
>
> <u>A intuição, embora ferramenta chave nos trabalhos de Aristóteles e Euclides em suas deduções e argumentações para convencimento, começou a apresentar limitações, próximas ao final do século XIX [9 P1]</u>. A intuição não parecia ser capaz de decidir em aparentes paradoxos demonstrados, assim diversos matemáticos, dentre eles Frege (1848 – 1925), deram forma a um conceito de *demonstração formal* que minimizaria o uso e aceitação de noções intuitivas. Uma demonstração formal pode ser resumida como [...] a construção de uma sequência de proposições tal que: (i) a primeira proposição é um axioma; (ii) cada uma das outras ou é um axioma ou é dedutível diretamente das que a precedem na sequência; (iii) a última proposição é aquilo que se pretendia demonstrar. Isso pressupõe a formulação de algumas poucas regras de inferência. (Domingues, 2002, p. 62).
>
> Como a auto evidência deixa de ser admitida para axiomas, assim os axiomas definem relações entre os conceitos fundamentais, sem nenhuma intuição externa na escolha de axiomas e muito menos de demonstrações. Tornam-se irrelevantes e dispensáveis quaisquer informações que não aceitas pelos axiomas. Significados externos aos dados pelo sistema, se não provado pelo sistema, são falsos.
>
> | |
> |---|
> | Como se dão os enunciados matemáticos intrínsecos à demonstração? |
>
> O sucesso na tarefa de uma axiomatização formal da Geometria colocou Hilbert (1852 – 1943) como grande nome do formalismo. Em seu trabalho, "Fundamentos da Geometria" (1899), tomou os conceitos fundamentais de "reta", "ponto", "plano", "está em", "entre" e axiomas que diziam de suas relações. <u>O fazer primordial da matemática torna-se por excelência a exploração das implicações lógicas puras (ausentes de outros significados) entre proposições e enunciados (Nagel & Newman, 2015) [4 P3]</u>. (Dias Filho, 2020, p. 41-42).

As diferentes perguntas e respostas que o texto-solo oferece apresentam indícios na forma de linguagem escrita daquilo que é invariante na vivência das demonstrações matemáticas. Deste modo, as perguntas compõem Categorias Abertas, que tem "[...] como meta investigar a formação da idealidade desde o histórico presente até a sua apresentação primeira que se dá na relação intencional homem-mundo" (Kluth, 2007, p. 105).

O texto-solo apresentou indícios de respostas para três perguntas que nomeiam as categorias abertas.

> As três Categorias Abertas, numeradas em ordem de aparição, do texto-solo são: P1 – Qual é o modo de ser da demonstração matemática?; P2 – É a demonstração matemática a única ferramenta que comunica a verdade matemática?; P3 – Como se dão os enunciados matemáticos? (Dias Filho, 2020, p. 73)

A seguir apresentaremos a discussão das categorias abertas.

2.1 P1 – Qual é o modo de ser da demonstração matemática?

Esta categoria trata dos modos pelos quais a demonstração matemática se doa e como é percebida pelos indivíduos. Desta categoria emergiram três aspectos da demonstração matemática formal e suas possibilidades e limitações no ensino de matemática. Brevemente, vamos apresentar estes aspectos separadamente, entretanto eles se inter-relacionam e são indissociáveis.

O primeiro aspecto trata das diferentes definições de demonstrações matemáticas adotadas ao longo dos anos e como essa definição está atrelada à finalidade da demonstração. Alguns autores como Domingues e Iezzi (2018) falam da dificuldade de se definir uma demonstração matemática e a resumem, tal qual Hanna e Jahnke (1993), a uma sucessão de raciocínios lógicos, ou fórmulas, dentro de um sistema, onde cada resultado é uma consequência (ou derivável) do enunciado anterior por regras previamente combinadas deste mesmo sistema. Já Silva (2002) apresenta três funções (finalidades) da demonstração matemática, uma *função retórica*, de convencimento da veracidade do fato apresentado; uma *função lógico-epistemológica*, de construção do corpo do conhecimento matemático; e uma *função heurística*, de apresentação de outras ideias matemáticas. O autor acrescenta que nem toda demonstração cumpre todas as funções simultaneamente, ou seja, a definição (e, por conseguinte, suas justificativas e sua estrutura) dependerá da finalidade desejada.

O segundo aspecto surgiu da discussão sobre a origem das demonstrações, que, do ponto de vista da fenomenologia, está entrelaçada as razões que sustentam seu surgimento. Em outras palavras: Por que demonstramos? Uma sugestão de resposta, apontada pela análise hermenêutica dos textos, indica que essa capacidade surgiu da limitação temporal humana. Em outras palavras, em determinadas situações, não temos tempo disponível para verificar todos os casos possíveis, principalmente em problemas envolvendo casos infinitos. Não podemos tomar um caso particular e afirmar que vale para todos os casos, principalmente quando tivermos infinitos casos. Desta maneira, fez-se necessário um método que garantisse a verdade de uma asserção sem a necessidade de se verificar caso a caso, a demonstração matemática. Vale notar, de forma análoga, que uma demonstração não pode ser infinita, pois, se não, não cumpriria nenhuma das funções listadas por Silva (2002) quando considerada a limitação de compreensão humana, além da limitação temporal.

O terceiro aspecto, revelado nesta categoria aberta, relaciona-se com o aspecto anterior, ao partir da limitação da compreensão humana, para discutir a forma da demonstração matemática. Ora, se temos uma capacidade limitada de compreensão da demonstração, aquele que escreve uma demonstração deve considerar isso em sua escrita, ou seja, ao escrever uma demonstração, o autor escolhe se o foco será dado à própria demonstração (cada passagem lógica e articulação de axiomas e teoremas) ou à tese demonstrada. Este aspecto ainda se relaciona com o primeiro, uma vez que essa forma estará condicionada à finalidade adotada para a demonstração.

Podemos enunciar estes três aspectos como: (a) definição de demonstração matemática adotada a partir de suas finalidades; (b) justificativa para o uso da demonstração matemática, principalmente pelo motivo da limitação humana de compreensão e da limitação temporal; (c) modo de construção da demonstração socialmente aceito como válido na atualidade a partir da finalidade adotada;

Ao tecermos uma aproximação das compreensões desta categoria com a Interrogação Norteadora da pesquisa, percebemos que os três aspectos estão amalgamados pela finalidade da demonstração que dizem respeito não somente ao corpo do conhecimento matemático, mas também abarca dimensões humanas e sociais, que devem ser consideradas ao se questionar como trabalhamos didaticamente as demonstrações matemáticas.

2.2 P2 – É a demonstração matemática a única ferramenta que comunica a verdade matemática?

Nesta categoria, observamos apenas um aspecto da demonstração matemática que versa principalmente sobre a argumentação válida, de um ponto de vista matemático, sobre as demonstrações e, principalmente, sobre o papel docente de orientar estudantes para uso de argumentações matemáticas válidas.

Esta categoria é composta por asserções que revelam que propriedades matemáticas foram aceitas como verdadeiras, utilizadas com sucesso por povos antigos sem a necessidade de uma demonstração tal qual entendemos atualmente. A partir dela, podemos também discutir as limitações do método axiomático-dedutivo demonstradas por Gödel em seu Teorema da Incompletude em 1931 (Nagel & Newman, 2015).

Relacionando-se também com o que os documentos técnicos curriculares BNNC (Brasil, 2018) e Currículo da Cidade (São paulo, 2019a, 2019b, 2019c) e o trabalho de Hanna e Jahnke (1993) apresentam sobre argumentação matemática, as demonstrações seriam mais uma opção metodológica para docentes trabalharem argumentações matemáticas válidas. Hannah e Jahnke (1993) discorrem sobre as demonstrações, argumentações e provas ingênuas (argumentos utilizados por estudantes que os professores precisam conhecer e saber como guiá-los para argumentos matemáticos válidos). Assim, enunciamos este aspecto como: *(d) o papel da argumentação e provas ingênuas frente à demonstração formal e as competências matemáticas.*

A reflexão proporcionada por esta categoria nos aproxima dos propósitos da presente pesquisa, que intenta buscar modos pelos quais docentes possam trabalhar com demonstrações matemáticas em sala de aula, uma vez que o trabalho didático docente não ocorre separado de um projeto educacional, social e político, no qual estão inseridas a escola e as diretrizes para seu trabalho.

2.3 P3 – Como se dão os enunciados matemáticos?

Do mesmo modo que a categoria anterior, observamos apenas um aspecto da demonstração matemática que aborda a relação entre a linguagem matemática e a linguagem materna no trabalho docente com demonstrações matemáticas.

> No caso da linguagem matemática suas notações e símbolos surgem para facilitar elementos antes descritos em linguagem natural [1 P3]. Uma notação eficiente não apresenta ambiguidades e garante a interpretação de forma simplificada do resultado de operações entre os símbolos [2 P3]. Os símbolos traduzem conceitos compreendidos por meio da linguagem materna para uma linguagem matemática e, a partir das regras de composição definidas nos axiomas, como podemos realizar operações entre estes. (Dias Filho, 2020, p. 81-82).[6]

Quando discutimos nos aspectos anteriores a finalidade e a forma das demonstrações, um aspecto relevante é como está escrita a demonstração, se na língua materna ou em linguagem matemática. A explicitação desta categoria aberta ocorreu em asserções que respondiam sobre a escrita dos enunciados e suas implicações tanto na operação de símbolos como na compreensão daquilo que se intenciona em comunicar. Por exemplo, têm-se as duas asserções, a seguir:

> a importância de uma notação eficiente é a facilidade de operacionalidade e a ausência de ambiguidades, permitindo a interpretação de resultados de forma simplificada. O autor também destaca que é importante a explicitação dos significados das notações adotadas [2 P3] (Dias Filho, 2020, p. 37).
>
> Este caso pode ser lido como "*se p, então q*", de mesmo modo da operação condicional ou como "*p implica q*". É importante destacar que nos dois parágrafos anteriores foi omitida a palavra proposição, este é um recurso utilizado tanto em livros, quanto em aulas de matemática onde, após se definir um objeto, este é referido apenas por seu símbolo (no caso *p,q* para as proposições adotadas). Tal fato prejudicou o entendimento do leitor? (Dias Filho, 2020, p. 38-39).

Por estas razões, enunciamos este aspecto como: *(e) a linguagem matemática, sua escrita e a linguagem sobre matemática.*

3 Discussão dos Invariantes e Síntese de Transição das Diretrizes Didáticas

A discussão das categorias abertas nos permitiu enunciar alguns aspectos invariantes às demonstrações matemáticas em relação a nossa Interrogação Norteadora: *Como trabalhar didaticamente a demonstração matemática na escola básica?*

> Retomemos para discussão sobre os aspectos da demonstração matemática elencados pela análise das categorias abertas necessários para o trabalho didático, são: (a) definição de demonstração matemática adotada a partir de suas finalidades; (b) justificativa para o uso da demonstração matemática, principalmente pelo motivo da limitação humana de compreensão e da limitação temporal; (c) modo de construção da demonstração socialmente aceito como válido na atualidade a partir da finalidade adotada; (d) o papel da argumentação e provas ingênuas frente à demonstração formal e as competências matemáticas; e (e) a linguagem matemática, sua escrita e a linguagem sobre matemática. Estes aspectos foram enunciados separadamente, embora sejam indissociáveis. (Dias Filho, 2020, p. 87)

Em nosso trabalho, discutimos estes aspectos em termos dos textos estudados que nos conduziram a uma síntese de transição de orientações de estudo e diretrizes didáticas para o planejamento do trabalho do professor em sala de aula com demonstrações matemáticas:

[6] Na citação, os colchetes [1 P3] e [2 P3] dizem respeito ao código dado a trechos do texto-solo que respondem a perguntas no movimento de análise descrito por Kluth (2005, 2007). O número indica a ordem em que os indícios de respostas aparecem no texto e "P3" se refere a pergunta que nomeia a terceira categoria aberta "Como se dão os enunciados matemáticos?"

a) definição de demonstração matemática adotada a partir de suas finalidades;

- Conhecer as finalidades da demonstração matemática: Lógico-epistemológica, retórica ou heurística (caráter restrito ou caráter amplo);
- Conhecer a definição de demonstração a partir da finalidade;
- Conhecer as diferenças entre prova e demonstração;
- Conhecer as técnicas de demonstração e suas justificativas lógicas;
- Conhecer as limitações do método axiomático-dedutivo;
- Ao escolher uma demonstração para uso em aula, saber qual a sua finalidade e que dimensões do objeto do conhecimento serão apresentadas.
- Explicitar para os discentes as concepções, definições, técnicas e limites da demonstração matemática de modo apropriado ao nível.

b) justificativa para o uso da demonstração matemática, principalmente pelo motivo da limitação humana de compreensão e da limitação temporal;

- Entender e abordar em sala as limitações humanas e a necessidade de demonstrações;
- Entender e explicar aos discentes as diferenças de casos particulares e regras gerais;
- Conhecer as possibilidades do trabalho de demonstrações no desenvolvimento das competências esperadas para o componente de matemática nos documentos orientadores de currículo.

c) modo de construção da demonstração socialmente aceito como válido na atualidade a partir da finalidade adotada;

- Reconhecer que a definição e a concepção de demonstração são um processo histórico e social do ser humano;
- Entender que as diferentes finalidades de demonstrações têm seus usos em situações específicas;
- Explicitar aos discentes as técnicas de demonstração e o modo de construção de uma demonstração;

d) o papel da argumentação e provas ingênuas frente à demonstração formal e as competências matemáticas;

- Conhecer os argumentos válidos para a matemática formal;
- Conhecer as provas e argumentações ingênuas que os estudantes podem apresentar;
- Conhecer os erros mais comuns cometidos por estudantes, em particular pelos iniciantes em argumentações e demonstrações;
- Pensar nos problemas apresentados e criar passos nos itens do problema para facilitar o processo de demonstração, sempre que necessário.
- Favorecer trabalhos em grupos e permitir que os alunos exponham suas ideias com o objetivo de que saibam organizá-las;
- Saber reconhecer as noções matemáticas nos argumentos utilizados por alunos e corrigir conforme necessário;

- Explicitar aos discentes quais de seus argumentos são provas ingênuas e quais constituem argumentos válidos na argumentação matemática ou numa demonstração matemática formal.

e) a linguagem matemática, sua escrita e a linguagem sobre matemática.

- Considerar os aspectos da língua materna e as regras gramaticais ao tratar de um assunto matemático;
- Evitar uso de palavras fora do uso comum ao se referir a termos matemáticos;
- Tratar a linguagem matemática sempre em comparação com a língua materna, principalmente nos ciclos iniciais;
- Reconhecer a influência da linguagem utilizada pelo docente na compreensão do conhecimento matemático pelos estudantes. (Dias Filho, 2020, p. 98-100)

4 Considerações Finais

A postura fenomenológica de pesquisa em Hermenêutica Filosófica (Kluth, 2005) nos permitiu realizar um movimento em direção à tradição das demonstrações matemáticas fundamentais para a estruturação da matemática desde o século XVIII. Não podemos negar que as demonstrações matemáticas ficaram adormecidas e esquecidas nos processos de ensino por não fazerem parte das exigências curriculares da escola básica. O que refletiu certamente na formação inicial de professores no que diz respeito às práticas de ensino, os quais agora se veem na posição de incluí-las em suas práticas. O movimento de análise elaborado nos permitiu enunciar aspectos invariantes da presença das demonstrações matemáticas e sintetizar em diretrizes didáticas. Com os resultados, esperamos poder auxiliar professoras(es) que ensinam matemática na Educação Básica, no intuito de considerarem em seus planejamentos as diretrizes didáticas em diferentes ações intencionando a compreensão da estrutura da matemática que embasa o raciocínio lógico-dedutivo e as demonstrações matemáticas.

Podemos, na Educação Básica, traduzir estas diretrizes em diferentes situações, como por exemplo:

- A partir de situações cotidianas e exercícios de matemática, dialogar com estudantes sobre diferença entre prova e demonstração. Elucidar ainda quando argumentos mostram a veracidade de casos particulares e quando argumentam generalizações;
- A partir de regras classicamente tratadas na Educação Básica, como "*a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º*" na geometria plana, destacar a limitação humana da impossibilidade de se desenhar todos os triângulos possíveis, justificando, assim, a necessidade de ferramentas matemáticas para argumentar sobre estes;
- Na resolução de situações problemas, mostrar a importância de tratar do que são argumentos matemáticos válidos relacionados à lógica matemática;
- A importância da linguagem matemática e do uso apropriado dos termos em relação a suas propriedades, permitindo ao estudante relacionar objetos de acordo com a sua estrutura.

A lista anterior não possui a pretensão de esgotar as possibilidades didáticas das diretrizes elencadas e suas implicações para o ensino de matemática na Educação Básica. Deste modo, a pesquisa apresentada neste artigo abre caminhos para pesquisas empíricas em sala de aula da Educação Básica, considerando a necessidade de se listar caminhos para o tratamento de demonstrações matemáticas.

Por fim, vemos também novas possibilidades de estudo no planejamento de cursos de ensino superior de matemática, tanto de licenciatura como de bacharelado, tomando as diretrizes didáticas apresentadas como norteadoras do uso consciente das demonstrações em diferentes finalidades e estruturas.

Referências

Bicudo, M. A. V. (2012). A pesquisa em educação matemática: a prevalência da abordagem qualitativa. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia, 5*(2), 15-26.

Brasil. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. (2018). *Base Nacional Comum Curricular: Educação é a base*. Brasília, DF: MEC.

Caldatto, M. E., Pavanello, R. M. & Fiorentini, D. (2016). O PROFMAT e a formação do professor de matemática: uma análise curricular a partir de uma perspectiva processual e descentralizadora. *Bolema, 30*(56), 906-925. https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n56a01

Dias Filho, C. A. T. (2020). *Demonstrações matemáticas e a educação básica: um estudo em hermenêutica filosófica* [Dissertação de mestrado, Universidade Federal de São Paulo]. Repositório Institucional UNIFESP.

Domingues, H. H. & Iezzi, G. (2018). *Álgebra moderna* (5 ed.). Saraiva.

Fiorentini, D. & Oliveira, A. T. C. C. (2013). O lugar das matemáticas na licenciatura em matemática: que matemática e que práticas formativas? *Bolema, 27*(47), 917-938. https://doi.org/10.1590/S0103-636X2013000400008

Garnica, A. V. M. (2002). As demonstrações em educação matemática: um ensaio. *Bolema, 15*(18), 91-99.

Hanna, G. & Jahnke, H. N. (1993). Aspects of proof. *Educational Studies in Mathematics, 24*(4), 421-438. https://doi.org/10.1007/BF01273373

Husserl, E. (2006). *Ideias para uma fenomenologia pura e para uma filosofia fenomenológica* (M. Suzuki, Trad.; 7 ed.). Ideias & Letras. (Trabalho original publicado em 1913).

Kluth, V. S. (2005). *Estruturas da álgebra: investigação fenomenológica sobre a construção do seu conhecimento* [Tese de doutorado, Universidade Estadual Paulista]. Repositório Institucional UNESP.

Kluth, V. S. (2007). O movimento da construção das estruturas da álgebra: uma visada fenomenológica. *Bolema, 20*(28), 95-113.

Kluth, V. S. (2011). A rede de significação: um pensar metodológico de pesquisa. In M. A. V. Bicudo (Org.), *Pesquisa qualitativa - segundo a visão fenomenológica* (pp. 75-98). Cortez.

Kluth, V. S. (2020). Metodologia de pesquisa fenomenológica em educação matemática: a rede de significação. *Educação Matemática Pesquisa, 22*(3), 84-104.

Lourenço, M. L. (2002). A demonstração com informática aplicada à educação. *Bolema, 15*(18), 100-111.

Nagel, J. & Newman, J. R. (2015). *A prova de Gödel* (G. K. Guinsburg, Trad.; 2 ed.). Perspectiva. (Trabalho original publicado em 1958)

São Paulo. Secretaria Municipal de Educação. Coordenadoria Pedagógica. (2019a). *Currículo da cidade: ensino fundamental – componente curricular: Matemática*.

São Paulo. Secretaria Municipal de Educação. Coordenadoria Pedagógica. (2019b). *Orientações didáticas do currículo da cidade: Matemática* (v. 1).

São Paulo. Secretaria Municipal de Educação. Coordenadoria Pedagógica. (2019c). *Orientações didáticas do currículo da cidade: Matemática* (v. 2).

Silva, J. J. (2002). Demonstração matemática da perspectiva da lógica matemática. *Bolema, 15*(18), 68-86.