Sociedade Brasileira de Educação Matemática

RIPEM

Reflexão sobre a prática na formação de professores: análises de simulações de aula do Teorema de Pitágoras com Critérios de Adequação Didática

Viviane Beatriz Hummes
Universitat de Barcelona
Barcelona, Espanha
vivihummes@gmail.com
0000-0003-2031-8238

Erich Leighton
Universidad San Sebastián
Concepción, Chile
erichleighton@gmail.com
0000-0001-7319-9469

2238-0345

10.37001/ripem.v15i1.4247

Recebido • 27/06/2024
Aprovado • 09/11/2024
Publicado • 01/01/2025

Editor • Gilberto Januario

Resumo: Este estudo explora a integração de simulações de aula e os Critérios de Adequação Didática na formação de futuros professores de matemática no Chile, visando fomentar a competência reflexiva desde as etapas iniciais de sua formação profissional. Utilizando uma abordagem qualitativa, investigou-se como os futuros educadores utilizam os componentes do Critério de Adequação Didática Epistêmico para refletir e melhorar as simulações de aula do Teorema de Pitágoras. Apesar de algumas confusões na aplicação do critério, todos os grupos demonstraram um compromisso ativo com a melhoria didática. Esta abordagem combinada revela-se uma estratégia valiosa na formação inicial, proporcionando experiências práticas significativas e promovendo a reflexão estruturada sobre a prática pedagógica.

Palavras-chave: Simulação de Aula. Teorema de Pitágoras. Reflexão Sobre a Prática. Critérios de Adequação Didática. Formação de Professores.

Reflection on practice in teacher training: analysis of Pythagorean Theorem class simulations with Didactic Suitability Criteria

Abstract: This study explores the integration of class simulations and Didactic Suitability Criteria in the training of future mathematics teachers in Chile, aiming to foster reflective competence from the initial stages of their professional training. Using a qualitative approach, it investigated how future educators use the components of the Epistemic Didactic Suitability Criterion to reflect on and improve class simulations of the Pythagorean Theorem. Despite some confusion in the application of the criterion, all groups demonstrated an active commitment to didactic improvement. This combined approach of class simulations and Didactic Suitability Criteria is revealed as a valuable strategy in initial training, providing meaningful practical experiences and promoting structured reflection on pedagogical practice.

Keywords: Class Simulation. Pythagorean Theorem. Reflection on Practice. Didactic Suitability Criteria. Teacher Training.

Reflexión sobre la práctica en la formación de profesores: análisis de simulaciones de clase del Teorema de Pitágoras con Criterios de Idoneidad Didáctica

Resumen: Este estudio explora la integración de simulaciones de clase y los Criterios de Idoneidad Didáctica en la formación de futuros docentes de matemáticas en Chile, con el objetivo de fomentar la competencia reflexiva desde las etapas iniciales de su formación profesional. Utilizando un enfoque cualitativo, se investigó cómo los futuros educadores utilizan los componentes del Criterio de Idoneidad Didáctica Epistémico para reflexionar y mejorar las simulaciones de clase del Teorema de Pitágoras. A pesar de algunas confusiones en la aplicación del criterio, todos los grupos demostraron un compromiso activo con la mejora didáctica. Este enfoque combinado se revela como una estrategia valiosa en la formación inicial, proporcionando experiencias prácticas significativas y promoviendo la reflexión estructurada sobre la práctica pedagógica.

Palabras clave: Simulación de Clase. Teorema de Pitágoras. Reflexión sobre la Práctica. Criterios de Idoneidad Didáctica. Formación de Profesores.

1 Introdução

A capacidade dos professores de analisar e compreender os fatores essenciais que influenciam os processos de ensino e aprendizagem da matemática é crucial para o seu desenvolvimento profissional e para a melhoria da qualidade educacional (Aghakhani, Lewitzky & Majeed, 2023; Dyer e Sherin, 2016; Giacomone, Godino & Beltrán-Pellicer, 2018; Godino, Giacomone, Batanero & Font, 2017). No entanto, promover a competência reflexiva entre os educadores exige a adoção de abordagens e quadros metodológicos específicos desde o início de sua formação.

Nesse contexto, a simulação de aulas surge como uma estratégia valiosa na formação inicial de educadores. Essa metodologia oferece aos futuros professores a oportunidade de participar ativamente em situações que replicam a realidade educacional, permitindo-lhes ampliar seu conhecimento sobre a natureza dos processos simulados e proporcionando-lhes experiências práticas e oportunidades de aprendizagem significativas (Bradley e Kendall, 2014; Gibson, Knezek, Redmond & Bradley, 2014; Speed, Bradley & Garland, 2015).

No entanto, para cultivar eficazmente a competência reflexiva, é essencial integrar conceitos e quadros metodológicos adicionais, como o *Lesson Study* (Huang, Takahashi & da Ponte, 2019), *Concept Study* (Davis, 2008), *Professional Noticing* (Mason, 2002) e os Critérios de Adequação Didática (CAD) propostos pela Abordagem Onto-Semiótica (AOS) (Godino, Batanero & Font, 2007, 2019).

Nessa perspectiva, o objetivo específico deste estudo é avaliar como os futuros professores utilizam os componentes do CAD Epistêmico ao refletir sobre aulas simuladas e examinar a relação entre essas reflexões e suas propostas para melhorar as aulas. Para tanto, foi desenvolvido um módulo de formação que combina a simulação de aulas com o CAD, destinado a alunos de Educação Primária com especialização em Matemática de uma universidade no Chile.

Esta pesquisa visa responder a duas questões fundamentais: Como os futuros professores aplicam os componentes do CAD Epistêmico ao refletir sobre aulas simuladas? e Quais conexões podem ser identificadas entre as reflexões dos futuros professores e suas propostas para melhorar essas aulas?

No próximo capítulo, o CAD é apresentado como o referencial teórico desta pesquisa. A terceira seção detalha a metodologia empregada, enquanto a quarta explora os resultados obtidos. Por fim, a quinta seção traz uma breve discussão, seguida das conclusões.

2 Critérios de Adequação Didática

Dentro do quadro teórico do Modelo de Competências e Conhecimento Didático-Matemático do Professor de Matemática, baseado nos princípios da Abordagem Onto-Semiótica (AOS) da cognição e instrução matemática (Godino *et al*., 2019), argumenta-se que as habilidades cruciais do professor de matemática são a competência matemática e a competência em análise e intervenção didática. O núcleo essencial desta última competência reside na capacidade de planejar, implementar e avaliar sequências de aprendizagem, sejam próprias ou de outros, utilizando técnicas de análise didática e critérios de adequação (Breda, Font & Pino-Fan, 2018; Breda, Pino-Fan & Font, 2017). O objetivo é estabelecer ciclos de planejamento, implementação, avaliação e sugestão de melhorias.

Os Critérios de Adequação Didática (Breda *et al*., 2018) propõem que as normas ou princípios que orientam a prática docente devem ser objeto de consenso, oferecendo diretrizes para direcionar essa prática. Esses princípios atuam como critérios a priori, acordados com o objetivo de alcançar aulas de maior qualidade. Apesar de sua importância, reconhece-se a necessidade de considerar a realidade e o contexto individual de cada professor, relativizando a importância de cada princípio (Godino, Font, Wilhelmi & De Castro, 2009).

Essa abordagem sugere a consideração de vários aspectos parciais específicos ou critérios, entre os quais se destacam os seguintes: adequação epistêmica, ecológica, cognitiva, afetiva, mediacional e interacional (Font, Planas & Godino, 2010; Godino, Batanero & Burgos, 2023).

De acordo com Breda *et al.* (2017, 2018), ao abordar a noção de uma *boa aula* ou *boa sequência de aulas de matemática*, destaca-se a importância de proporcionar um ensino de qualidade que permita aos alunos dominar atividades matemáticas significativas, o que é classificado como a dimensão epistêmica. Nesse sentido, o objetivo é garantir não apenas a transmissão de um conhecimento matemático sólido, mas também uma compreensão profunda e significativa por parte dos alunos. No entanto, assegurar apenas a qualidade matemática não é suficiente; é preciso considerar um bom processo de ensino e aprendizagem para garantir que os alunos realmente internalizem os conceitos e desenvolvam habilidades matemáticas eficazes, o que está relacionado à dimensão cognitiva.

Nesse contexto, emergem os princípios epistêmicos e cognitivos, que buscam ensinar e aprender matemática de forma eficaz. Além disso, reconhece-se a importância de a matemática ser relevante e útil nos contextos sociais e de trabalho dos alunos, o que é classificado como a dimensão ecológica. Este aspecto enfatiza a necessidade de vincular o conteúdo matemático a situações e aplicações práticas, contribuindo para a utilidade e relevância da disciplina.

Embora ensinar e aprender *boa matemática* seja crucial, também se enfatiza a incorporação de um princípio emocional (dimensão afetiva). Isso garante que os alunos não apenas adquiram conhecimentos matemáticos úteis, mas também desenvolvam uma atitude positiva em relação à disciplina e aproveitem o processo de aprendizagem, evitando possíveis aversões.

Outros critérios, como o uso adequado de recursos institucionais, materiais manipulativos ou tecnologias educacionais (dimensão mediacional), e a gestão eficiente do processo de ensino-aprendizagem (dimensão interacional), devem ser considerados para alcançar resultados positivos e holísticos na educação matemática dos alunos. Esses elementos adicionais destacam a importância da adaptabilidade e eficácia na prática docente, além da mera transmissão de conteúdos.

2.1 Critério de Adequação Didática Epistêmica

Os componentes e indicadores dos CAD foram desenvolvidos levando em consideração tendências, princípios e resultados de pesquisas no campo da didática da matemática (Godino, 2013; Breda *et al.*, 2018). Planejar uma aula significativa envolve considerar vários aspectos para guiar o professor em sua execução. Em particular, a adequação epistêmica foca no grau de representatividade e interconexão dos significados institucionais implementados (ou pretendidos) em relação a um significado de referência.

Na perspectiva de consenso, estabelece-se que a matemática ensinada deve atender a critérios específicos para ser considerada adequada ou apropriada (Breda *et al.*, 2018). Em primeiro lugar, espera-se que esteja livre de erros, garantindo assim a precisão e confiabilidade das informações transmitidas. Além disso, espera-se que a apresentação do conteúdo matemático evite explicações ambíguas que possam gerar confusão na compreensão dos alunos. Também é valorizado que o ensino da matemática enriqueça os processos matemáticos, promovendo o desenvolvimento de habilidades e uma compreensão profunda dos conceitos (Breda *et al.*, 2017).

Por fim, defende-se que a matemática apresentada em sala de aula ofereça uma amostra representativa do conceito ou noção que se pretende ensinar, proporcionando uma visão abrangente e contextualizada para facilitar uma compreensão holística por parte dos alunos (Breda *et al.*, 2017). Esses princípios fundamentais visam garantir a qualidade e a eficácia do processo de ensino da matemática.

Breda *et al.* (2017) propõem um sistema de componentes e indicadores como guia para a análise e avaliação da adequação didática, adaptável a processos instrucionais em qualquer etapa educacional. Os componentes e indicadores do CAD Epistêmico estão resumidos no Quadro 1 abaixo.

Quadro 1: Componentes e Indicadores do CAD Epistêmico

Componentes do CAD Epistêmico	**Indicadores**
Erros	Não foram observadas práticas consideradas incorretas do ponto de vista matemático.
Ambiguidades	Não foram observadas ambiguidades que possam levar à confusão entre os alunos: definições e procedimentos são claramente e corretamente apresentados, adaptados ao nível educacional que estão abordando; explicações, verificações e demonstrações são ajustadas ao nível educacional correspondente, com uso controlado de metáforas, etc.
Riqueza de processos	A sequência de tarefas inclui a realização de processos relevantes na atividade matemática (modelagem, argumentação, resolução de problemas, conexões, etc.).
Representatividade da complexidade do objeto matemático	Os significados parciais (definições, propriedades, procedimentos, etc.) são uma amostra representativa da complexidade da noção matemática que se pretende ensinar (conforme delineado no currículo). Para um ou vários significados parciais, há uma amostra representativa de problemas. Para um ou vários significados parciais, há o uso de diferentes modos de expressão (verbal, gráfico, simbólico, etc.), além de tratamentos e conversões entre eles.

Fonte: Breda *et al.* (2017, p. 190)

3 Metodologia

Esta pesquisa utiliza uma abordagem metodológica qualitativa, com o objetivo de compreender e observar uma situação, enfatizando a análise sistemática de dados para interpretar fenômenos sociais, especialmente aqueles relacionados a experiências educacionais (Corbin & Strauss, 2014; Ortíz, 2023). Especificamente, este estudo investiga a integração de simulações de aulas e dos Critérios de Adequação Didática na formação inicial de professores para promover a reflexão sobre a prática.

A pesquisa foi realizada com um grupo de 20 estudantes do curso de Licenciatura em Educação Básica com especialização em Matemática de uma universidade chilena. O módulo de formação foi implementado no âmbito de uma disciplina chamada *Raciocínio em Matemática*, cursada durante o sétimo semestre acadêmico de um programa de dez semestres. A disciplina tem como objetivo ajudar os alunos a entender o que significa aprender matemática a partir de diversos quadros teóricos da Didática da Matemática e como gerenciar uma aula, fornecendo um contexto educacional específico para o desenvolvimento da pesquisa. O segundo autor deste artigo atuou como o professor responsável pela disciplina. Todos os participantes forneceram consentimento informado, assinando o documento pertinente.

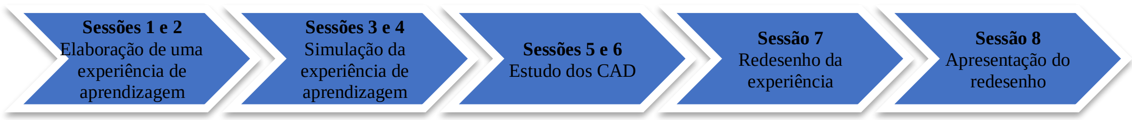
3.1 Desenho do Módulo de Formação

O módulo de formação consistiu em um total de 8 sessões, realizadas entre maio e julho de 2023. Nas duas primeiras sessões, os alunos, divididos em 6 grupos (G1, G2, G3, G4, G5 e G6), foram responsáveis por planejar uma experiência de aprendizagem sobre o Teorema de Pitágoras (sessões 1 e 2). Durante as sessões 3 e 4, os futuros professores implementaram as experiências planejadas, com aqueles que lideravam a experiência assumindo o papel de professores, enquanto os demais participantes atuavam como alunos. O professor responsável pela disciplina desempenhou o papel de avaliador nessa etapa.

Nas duas sessões seguintes, foram ministradas aulas focadas no tema dos Critérios de Adequação Didática (CAD). Essas sessões foram conduzidas pelo primeiro autor deste trabalho, um especialista na área. Durante essas aulas, foram abordados e exemplificados aspectos teóricos, componentes e indicadores, com foco particular no contexto do Teorema de Pitágoras. Após essas sessões teóricas, os participantes foram encarregados de reformular suas experiências simuladas com base nos CAD. O objetivo era identificar erros ou obstáculos evidenciados durante o trabalho inicial, contrastando-os com esses critérios, e estabelecer melhorias substanciais. Para facilitar esse processo, foi fornecido um modelo que incluía componentes e indicadores, juntamente com perguntas orientadoras, para direcionar suas reflexões a aspectos específicos que necessitavam de atenção.

Para concluir, foi organizada uma sessão para apresentar as experiências reformuladas, destacando as diferenças entre as propostas iniciais e as modificadas após o processo de redesign com os CAD. Este exercício foi complementado com uma mesa redonda, na qual os participantes compartilharam suas ideias finais e reflexões sobre a experiência, apoiados pelo professor responsável pela disciplina e pelo especialista na teoria dos CAD. A Figura 1 abaixo resume os conteúdos abordados durante as sessões do curso.

Figura 1: Sessões do Módulo de Formação



Fonte: Elaboração própria

3.2 Desenhos das Experiências de Aulas Simuladas

Os desenhos desenvolvidos pelos futuros professores de matemática para a educação primária consideraram os indicadores de avaliação descritos no objetivo de aprendizagem correspondente ao Teorema de Pitágoras no currículo do 8º ano do sistema escolar chileno:

“Explicar, de forma concreta, pictórica e simbólica, a validade do Teorema de Pitágoras e aplicá-lo na resolução de problemas geométricos e do cotidiano, manualmente e/ou utilizando softwares educacionais”. Além disso, o currículo escolar chileno estabelece os Indicadores de Avaliação (IA) como uma forma de evidenciar o desempenho dos alunos no processo de aprendizagem. Cada grupo de trabalho foi designado a um desses indicadores; dado o número de grupos participantes, foram apresentadas propostas apenas para os seguintes:

- IA1: Eles descobrem o Teorema de Pitágoras de forma concreta ou pictórica, decompondo ou compondo quadrados e triângulos retângulos.
- IA2: Eles reconhecem que, com dois lados do triângulo retângulo dados, o terceiro lado pode ser calculado.
- IA3: Eles verificam com as medidas fornecidas de um triângulo se ele é retângulo ou não.
- IA4: Eles calculam o comprimento do lado faltante para que um triângulo seja retângulo e o verificam por meio da construção, aplicando o Teorema de Tales (triângulos inscritos em um semicírculo).
- IA5: Eles resolvem problemas do cotidiano para calcular o comprimento de lados desconhecidos e inacessíveis no plano e no espaço, primeiro determinando os respectivos triângulos retângulos.

A organização dos IA foi a seguinte, conforme mostrado no Quadro 2.

Quadro 2: Organização dos grupos de acordo com os IA e o número de membros

Indicador de Avaliação (IA)	Número do grupo	Número de membros do grupo
1	1	4
2	2	2
3	3 e 5	3
4	6	4
5	4	4

Fonte: Elaboração própria

Cada grupo realizou a tarefa de desenvolver uma proposta de aula com três etapas (início, desenvolvimento e fechamento), de acordo com um formato definido e focando principalmente em atender ao indicador de avaliação designado; para isso, foram consideradas duas sessões de trabalho nas quais o professor responsável pela disciplina conduziu um processo de monitoramento e revisão da tarefa proposta. Na etapa subsequente, eles realizaram o processo de simulação da atividade planejada para o grupo de colegas; devido ao número de grupos participantes, foram consideradas duas sessões de aula.

A seguir, a Figura 2 apresenta o formato do desenho das aulas simuladas.

Figura 2: Formato do desenho da aula simulada

Curriculum learning objective:	
Learning outcomes:	Concepts and/or skills to develop:
Describe the connections between the learning outcomes and the concepts and/or skills:	
Beginning: Time: Short description:	
Development: Time: Short description:	
Closure: Time: Short description:	
Student´s role: Mention at least 3 actions from a mathematical point of view	
Teacher´s role: Mention at least 3 actions from a mathematical point of view	
Assessments criteria: Develop indicators for the class goal	

Fonte: Elaboração própria

3.3 Coleta e Análise de Dados

Os dados foram coletados por meio dos relatórios finais (redesenho das aulas) apresentados por cada grupo, nos quais refletiram sobre a aula simulada, avaliando os componentes dos Critérios de Adequação Didática (CAD) e propondo sugestões de melhoria para o redesenho da aula. Devido às limitações de espaço neste artigo, foram consideradas apenas as reflexões relacionadas ao CAD Epistêmico.

Para a análise dos dados, foi aplicada a técnica de análise de conteúdo como forma de revisão documental, de tipo externo, permitindo explicar um documento escrito em seu contexto (Cáceres, 2003; López, 2002). Para isso, de acordo com Porta e Silva (2003), o procedimento seguido foi a determinação dos objetivos, que foram declarados no início deste documento; o universo e os documentos, que correspondem às reflexões sobre os CAD e suas propostas de melhoria; seguido pela unidade de análise e como os CAD serão contabilizados; e, subsequentemente, a categorização, classificação, codificação e inventário. Isso é apresentado na próxima seção.

O processo de análise focou na avaliação das reflexões sobre os componentes do CAD Epistêmico propostos por cada equipe, o que foi essencial para compreender as reflexões de cada grupo sobre a aula simulada e as propostas de redesenho. Nesse contexto, foram seguidos os critérios de análise propostos por Author (2022):

1. O CAD representa a postura teórica com a qual o conteúdo foi analisado.
2. Segmentos de conteúdo (unidades de análise), sejam frases ou parágrafos, foram individualizados para categorização subsequente.

Na interpretação dos dados, foi considerado o critério regulador de dependência (Guba & Lincoln, 2002), que implica um processo de controle da interpretação dos dados por meio da triangulação da análise realizada pelos autores deste estudo.

3.4 Ensino do CAD Epistêmico para o caso do Teorema de Pitágoras

Durante as sessões de ensino dos CAD, foram abordadas as dimensões dos CAD especificamente relacionadas ao conteúdo do Teorema de Pitágoras. Abaixo estão os componentes do CAD epistêmico para o Teorema de Pitágoras, conforme ensinados aos alunos no módulo de formação.

Componente erros para o Teorema de Pitágoras

Dentro do CAD Epistêmico, o componente *erros* foca nos equívocos que podem surgir no ensino da matemática, particularmente aqueles cometidos pelo professor (Breda *et al.*, 2017). Eles podem ser classificados da seguinte forma:

Classificação por quem comete o erro:

1) Erro cometido pelo professor: Ocorre quando o professor comete erros ao explicar conceitos matemáticos ou ao realizar operações.

2) Erro validado pelo professor: Acontece quando há erros no material didático ou nas respostas dos alunos, e o professor não os corrige, seja indicando que estão corretos ou ignorando os equívocos.

Classificação do erro cometido pelo professor de acordo com a causa:

1) Falta de conhecimento matemático do professor.

2) Distração do professor devido à inquietação dos alunos ou algum outro aspecto.

Classificação de acordo com o conteúdo (Teorema de Pitágoras):

1) Erro na proposição de problemas: Envolve a apresentação de problemas inconsistentes, como pedir aos alunos que encontrem outras tríades pitagóricas congruentes a uma dada, como (4, 4, 5).

2) Erro de representação: Refere-se a erros na representação gráfica, por exemplo, ilustrar incorretamente o Teorema de Pitágoras.

3) Erros de definição: Isso inclui dar definições incorretas de conceitos como triângulo, hipotenusa e cateto.

4) Erros de proposição: Ocorrem quando o Teorema de Pitágoras é enunciado de forma incorreta.

5) Erro procedimental: Embora o Teorema de Pitágoras não seja um procedimento em si, o professor pode cometer erros ao realizar cálculos relacionados a ele.

6) Erro na demonstração: Envolve considerar a generalização de casos específicos como uma prova, embora, na Educação Básica, não seja estritamente considerado um erro realizar demonstrações menos rigorosas.

Essas classificações fornecem um quadro para identificar, entender e corrigir os erros cometidos pelo professor ao ensinar o Teorema de Pitágoras, contribuindo assim para melhorar a qualidade do ensino matemático.

Componente ambiguidades para o Teorema de Pitágoras

O componente *ambiguidades* foca na importância de ter definições e procedimentos claramente expressos e adaptados ao nível educacional correspondente. Também enfatiza a necessidade de ajustar explicações, verificações e demonstrações a esse nível, além de usar metáforas de maneira controlada. Essas ambiguidades podem surgir por várias razões:

1) Por meio do uso de materiais manipulativos: O uso de materiais manipulativos no ensino do Teorema de Pitágoras pode criar ambiguidades se não forem empregados com precisão e clareza. Por exemplo, representar o significado geométrico do Teorema de Pitágoras com volumes de água em recipientes de diferentes formas ou bolas esféricas pode ser ambíguo se os alunos não entenderem corretamente a relação entre as áreas dos quadrados dos lados do

triângulo retângulo. Portanto, é crucial que o uso desses materiais seja acompanhado por uma explicação detalhada e precisa que esclareça a relação entre a representação visual e o conceito matemático que está sendo ensinado.

2) Por meio do uso de metáforas e gestos: Isso inclui cenários onde o professor utiliza metáforas, como representar uma fração como *uma pizza* ou descrever uma função como *uma máquina que transforma*, ou ainda comparar o gráfico de uma função a algo *unidirecional*. No contexto do Teorema de Pitágoras, um exemplo de ambiguidade poderia surgir ao usar a metáfora de *uma escada* para explicar a relação entre os lados de um triângulo retângulo. Embora essas metáforas possam ser úteis, se não forem explicadas claramente ou usadas de forma superficial, podem gerar confusão ao invés de esclarecer o conceito. É essencial que o uso de metáforas e gestos seja preciso e complementado por uma explicação clara e detalhada do conceito matemático subjacente.

3) Por meio do uso de programas de software dinâmicos: Ao recorrer a programas de software interativos para ensinar o Teorema de Pitágoras, pode surgir ambiguidade se o software não estiver devidamente adaptado ao nível educacional ou se não forem fornecidas explicações claras e precisas.

4) Outras causas possíveis: Isso inclui fatores contextuais ou características específicas da dinâmica de sala de aula que podem gerar ambiguidades e que não se enquadram nas categorias anteriores.

Reconhecer e corrigir essas ambiguidades é crucial para garantir um ensino matemático eficaz e compreensível, adaptado ao nível educacional dos alunos, e para utilizar os recursos pedagógicos com precisão.

Componente riqueza de processos para o Teorema de Pitágoras

O componente *riqueza de processos* foca na importância de integrar processos matemáticos relevantes na sequência de atividades relacionadas ao Teorema de Pitágoras. Para alcançar um ensino rico em processos matemáticos, é essencial refletir sobre como estruturar a instrução para promover a participação ativa dos alunos na atividade matemática. A seguir, estão alguns exemplos específicos para este conceito matemático:

1. Seleção de atividades: É fundamental escolher atividades que incentivem a realização de processos matemáticos significativos. Por exemplo, no contexto do Teorema de Pitágoras, pode-se começar com uma atividade em que os alunos meçam os lados de diferentes triângulos retângulos e, em seguida, formulem conjecturas sobre as relações entre os comprimentos dos lados.

2. Sequência didática: Para enriquecer uma sequência didática com processos matemáticos relevantes para o Teorema de Pitágoras, é crucial projetar etapas que incluam manipulação, experimentação e justificativa. Por exemplo, após os alunos formularem conjecturas, eles podem realizar demonstrações usando modelos geométricos ou diagramas para apoiar suas afirmações

3. Riqueza de processos em uma sequência básica: Uma sequência bem estruturada deve abordar diferentes processos matemáticos em etapas-chave. Por exemplo, após os alunos demonstrarem o teorema, eles podem participar de discussões em grupo, onde comunicam e justificam seus argumentos utilizando linguagem matemática precisa.

4. Incorporação de outros processos (megaprocessos): Além dos processos mencionados acima, é essencial integrar megaprocessos como resolução de problemas (Proença, Campelo & Oliveira, 2024) e modelagem matemática (Melo & Bisognin, 2021) no estudo do Teorema de

Pitágoras. Por exemplo, os alunos podem aplicar o teorema para resolver problemas do mundo real, como calcular distâncias em um mapa ou determinar as dimensões de uma sala retangular.

Planejar atividades que envolvam esses processos contribuirá para uma experiência educacional enriquecedora, em que os alunos não só adquirem conhecimento matemático, mas também desenvolvem habilidades cognitivas e de resolução de problemas fundamentais.

Componente amostra representativa da complexidade para o Teorema de Pitágoras

O componente de *amostra representativa da complexidade do objeto matemático* no contexto do Teorema de Pitágoras aborda a necessidade de apresentar uma variedade de significados parciais interconectados para lidar com a complexidade inerente a essa noção. Esse componente envolve avaliar se os significados parciais selecionados para implementação são uma representação fiel da complexidade da noção matemática que se pretende ensinar.

Em primeiro lugar, é necessário analisar se os significados parciais, como definições, propriedades e procedimentos, constituem uma amostra representativa da complexidade da noção matemática do Teorema de Pitágoras. Isso implica considerar várias perspectivas e abordagens que permitam aos alunos lidar com diferentes tipos de tarefas relacionadas a esse objeto matemático.

Em segundo lugar, ao revisar o currículo, é necessário avaliar se a amostra de significados parciais implementada no processo de ensino está de acordo com os contemplados no currículo geral, seja em nível nacional, de etapa ou ciclo educacional. A *amostra representativa* refere-se à conexão contextual e metafórica dos significados, dependendo do objeto matemático ensinado e do nível educacional. Por exemplo, no caso do ensino do Teorema de Pitágoras para alunos de 12 a 16 anos, a inclusão de significados geométricos e algébricos seria considerada uma amostra representativa, enquanto a exclusão de alguns desses aspectos não proporcionaria uma visão completa.

Uma vez selecionados os significados parciais para implementação, é necessário avaliar se foi apresentada uma amostra representativa de representações do objeto matemático e das tarefas nas quais ele é aplicado ou surge. Essa abordagem contribuirá para que os alunos desenvolvam uma rede de significados parciais bem conectados, promovendo uma compreensão abrangente e competência na resolução de diversos problemas relacionados ao Teorema de Pitágoras.

Para o caso específico do Teorema de Pitágoras, alguns significados parciais que podem ser trabalhados no oitavo ano do ensino básico são:

1) Significado geométrico: Os sinais ao quadrado que aparecem representam áreas, ou os símbolos representam o comprimento dos lados ou os comprimentos ao quadrado. Nesses dois aspectos (que chamamos de significado geométrico), números ou letras substituem os comprimentos dos segmentos ou áreas dos quadrados, e sua função é representá-los. Sob essa perspectiva, os símbolos representam magnitudes ou relações entre elas, mas, embora operações possam ser realizadas com eles, não são considerados objetos independentes da magnitude que representam. Os valores que os símbolos podem assumir são aqueles que permitem as magnitudes e a situação que representam (por exemplo, ao calcular raízes quadradas, obtém-se apenas o valor positivo). Embora muito da álgebra seja usada na solução, falamos de significado geométrico quando os símbolos são considerados representações de magnitudes (comprimento e área).

2) Significado aritmético-algébrico: Quando os valores que os símbolos podem assumir são aqueles que você deseja considerar e não são condicionados pela situação que inicialmente

representavam. Os símbolos agora são considerados objetos sobre os quais podem ser realizadas ações, e até mesmo os objetos, relações e situações que representam podem ser dispensáveis. Essa interpretação leva ao entendimento de *a*, *b*, *c* como números ou letras que não representam quantidades geométricas e que $a^2 = b^2 + c^2$. Primeiro como tríades pitagóricas de números inteiros, passando pelas frações pitagóricas e chegando a tríades (a, b, c) que podem não ser inteiros, mas que satisfazem a relação $a^2 = b^2 + c^2$.

3) Outros significados: O Teorema de Pitágoras também tem conexões interessantes com outros problemas e teorias que podem expandir os significados parciais mencionados acima, mas apenas alguns serão considerados neste trabalho, focado no ensino básico, onde esse teorema é ensinado pela primeira vez. Essas conexões incluem: a noção de módulo de um vetor, diagonal de um prisma, distância, seção áurea, simetria dinâmica, espirais logarítmicas, trissecção do ângulo, duplicação do cubo, quadratura do círculo, determinação do valor de π, conceito de número irracional, estrelas e polígonos regulares, poliedros, teoria dos números, construção de ângulos e polígonos, frações contínuas, trigonometria, geometria analítica, espaços de Hilbert, entre outros.

4 Avaliação do componente erros e proposta de melhoria da aula

De acordo com o ponto 3.4.1 sobre a classificação dos erros com base no conteúdo relacionado ao Teorema de Pitágoras, o Quadro 3 resume os resultados da reflexão dos estudantes sobre as aulas simuladas em relação ao componente *erros* do CAD Epistêmico. Adicionamos a essa classificação os casos em que os grupos afirmaram a ausência de erros em suas simulações como *não há presença de erros* e, quando expressaram erros que não são de natureza matemática, foram categorizados como *outros tipos de erros*.

Quadro 3: Resultados da categorização do componente erros

Erros	G1	G2	G3	G4	G5	G6
Ao propor problemas	X					
Representação	X					
Definição						
Proposição	X					
Procedimento						
Prova						
Ausência de erros			X	X		
Outros tipos de erros*	X	X			X	X

Fonte: Elaboração própria [* Corresponde a erros declarados pelos grupos, que são decisões didáticas incorretas]

No Quadro 3, são apresentados os tipos de erros, conforme explicado no curso para o componente *erros* do CAD Epistêmico, relacionado ao conteúdo do Teorema de Pitágoras, manifestados nas reflexões dos estudantes após a simulação de suas aulas. Os tipos de erros matemáticos identificados variaram entre problemas na formulação de questões (erro na proposição de problemas), representações incorretas (erro de representação) e erros conceituais (erro de proposição). Não foram observados erros relacionados à definição de conceitos, procedimentos ou demonstração nas reflexões.

Adicionalmente, pode-se observar no Quadro 3 que os grupos G1, G2, G5 e G6 reconheceram a presença de erros em suas aulas simuladas, seja nas instruções, na formulação de questões, na representação gráfica ou na conceitualização matemática.

O Grupo 1 demonstrou habilidade para identificar erros no planejamento e na simulação de sua proposta didática, oferecendo melhorias substanciais no redesenho da aula. No entanto, foi observada confusão ao categorizar erros matemáticos como más escolhas didáticas, indicando uma compreensão parcial do componente *erros* do CAD Epistêmico. Apesar desse desafio, o grupo demonstrou uma abordagem consciente e reflexiva ao usar o componente *erros* ao revisar sua experiência de simulação. A conexão entre essas reflexões e a proposta de redesenho demonstra um esforço ativo para melhorar a qualidade didática da aula simulada, conforme evidenciado: *"[...] foram cometidos erros ao descobrir o Teorema de Pitágoras concretamente. Isso se deveu a erros nas instruções e orientações dadas pelos professores ao desenvolver a atividade [...]"* (G1).

Além disso, este grupo reconhece erros que foram categorizados neste trabalho como *outros tipos de erros*, pois não correspondem ao âmbito matemático. Conforme declarado na seguinte evidência: *"[...] não houve fechamento na atividade em que o conceito matemático abordado foi institucionalizado"* (G1).

Em sua reflexão, o Grupo 2, ao apontar os erros evidenciados na aula, demonstra confusão ao identificar um erro matemático e destaca, em vez disso, um aspecto cognitivo relacionado ao conhecimento prévio dos alunos, conforme evidenciado: *"Sim, o problema número 2 foi mal formulado e houve confusão ao explicá-lo, o que fez com que os alunos trabalhassem com raízes com valor 50, o que representou um erro, pois, para a série correspondente, os alunos não têm conhecimento para lidar com essas raízes"* (G2)

Além disso, embora não tenham percebido, o Grupo 2 também cometeu um "erro de representação" na simulação da aula, que não foi destacado em sua reflexão. Na proposta de redesenho da aula, embora não declarado, o grupo propôs uma mudança em uma imagem apresentada no problema, com o objetivo de observar claramente a forma de um triângulo retângulo (a imagem anterior representava outro tipo de triângulo), conforme evidenciado: *"Primeiro, ajustamos o exercício ao reconhecer que a trajetória de uma pessoa nadando pode variar. Ao examiná-lo do ponto em que devemos concluir o exercício, observamos uma clara mudança na perspectiva da imagem que acompanha o exercício"* (G2).

O Grupo 5 destacou um aspecto relacionado ao conhecimento prévio necessário para a compreensão da atividade matemática trabalhada. No entanto, isso não é um erro matemático, mas sim um aspecto relacionado à adequação cognitiva da aula. Na sua proposta de melhoria da aula, o grupo propõe uma mudança em relação a esse aspecto. *"No planejamento, percebemos que, no início das aulas, não há uma atividade adequada para abordar o conhecimento prévio [...] Para melhorar o início da aula, propomos realizar uma roleta de perguntas que permita introduzir o conhecimento prévio [...]"* (G5).

O Grupo 6 não identificou erros matemáticos na aula. No entanto, confundiu o componente *erros* do CAD Epistêmico com a possibilidade de usar o erro como estratégia de ensino, conforme evidenciado na seguinte passagem: *"Na sequência apresentada, [...] mesmo contendo erros, não foi investigado se estavam corretos ou poderiam ser resolvidos*" (G6).

Na proposta de redesenho da aula, este grupo reforça essa ideia, refletida na seguinte escrita: *"Nas explicações fornecidas pelos professores, observam-se erros matemáticos que os alunos percebem como improváveis e compreendem o porquê [...]"* (G6). Por outro lado, os Grupos G3 e G4 afirmaram não ter identificado erros em suas propostas.

Todos os grupos, mesmo aqueles que não identificaram erros matemáticos, propuseram melhorias para suas aulas simuladas. Essas melhorias incluem ajustes nas instruções, mudanças nas representações e estratégias para lidar com mal-entendidos cognitivos.

Apesar das diferenças na identificação de erros, todos os grupos que os declararam demonstraram uma conscientização reflexiva na análise de suas aulas simuladas. A conexão entre as reflexões e as propostas de redesenho indica um esforço ativo para melhorar a qualidade do processo instrucional.

Os resultados acima sugerem a necessidade de maior clareza na diferenciação entre aspectos matemáticos e decisões pedagógicas durante o estudo do componente *erros* do CAD Epistêmico.

5 Avaliação do componente de ambiguidades e proposta de melhoria da aula

De acordo com o que foi exposto na seção 3.4 sobre possíveis ambiguidades no conteúdo relacionado ao Teorema de Pitágoras, o Quadro 4 apresenta os resultados da reflexão dos estudantes sobre as aulas simuladas em relação a este componente do CAD Epistêmico. Foi adicionada a essa classificação o caso em que os grupos relataram a presença de ambiguidades, porém, essas não correspondiam ao critério e foram categorizadas como *não se aplica*.

Quadro 4: Resultados da Categorização do Componente Ambiguidades

Ambiguidades	G1	G2	G3	G4	G5	G6
Devido ao uso de materiais manipulativos						
Devido ao uso de metáforas e gestos						
Devido ao uso de programas de computador dinâmicos						X
Outras causas possíveis		X				
Não se aplica	X		X	X	X	

Fonte: Elaboração própria

No Quadro 4, são apresentadas as ambiguidades declaradas pelos grupos de estudantes, de acordo com as razões expostas na seção 3.4. Todos os grupos relataram ambiguidades identificadas em suas simulações, que variaram entre o uso de programas de computador, outras causas possíveis e, em sua maioria, ambiguidades declaradas que não se aplicavam. O Grupo 1, por exemplo, categorizou como ambiguidade o que na verdade correspondia a erros de explicação, os quais haviam sido destacados no componente analisado anteriormente. A seguir, um trecho de sua reflexão sobre este componente: *"As explicações dadas não foram coerentes, pois houve uma confusão conceitual por parte dos professores ao comparar a área de cada triângulo com o comprimento de cada lado do triângulo"* (G1). Na sua proposta de melhoria da aula, o grupo enfatizou a importância de aprofundar o estudo do conteúdo para evitar explicações que contenham erros ou sejam ambíguas. Essa confusão indica a necessidade de maior clareza na diferenciação entre erros matemáticos e decisões pedagógicas durante a análise da qualidade da aula simulada. A evidência é apresentada a seguir: *"As explicações devem ser precisas e claras; para isso, nos prepararemos melhor conceitualmente para entender o Teorema de Pitágoras"* (G1).

O Grupo 2 reconheceu que as representações usadas poderiam gerar compreensões confusas nos alunos. Isso fica evidente no seguinte relato: "*A imagem que representava o problema 2 não estava de acordo com o que o problema enunciava. Nós, como professores [...] distorcemos as dimensões e a posição do triângulo retângulo"* (G2). Na sua proposta de melhoria, eles defendem modificar o problema e garantir os resultados para otimizar a qualidade da aula, conforme apresentado a seguir: *"Para começar, precisamos mudar o problema para um que seja mais fácil e compreensível para os alunos. Antes de dar a aula, devemos ter certeza dos resultados de cada problema que vamos propor, pois, se o professor demonstrar insegurança, o aluno se sentirá inseguro sobre o que está sendo ensinado"* (G2).

O Grupo 6 apontou uma ambiguidade derivada do uso de programas de computador dinâmicos, indicando problemas na implementação do recurso, como pode ser visto no seguinte relato: *“Na sequência apresentada, foram identificadas ambiguidades em que os alunos começaram sua construção de aprendizado de forma errônea, pois o recurso de TIC foi mal implementado e gerou resultados que não eram relevantes”* (G6). Este grupo sugere melhorar a situação incluindo representações adequadas. Além disso, propõem corrigir tanto a atividade quanto os recursos, questionando sua adequação para os alunos. A evidência de sua proposta de melhoria é apresentada a seguir: *“Para resolver essa situação, seria benéfico adicionar representações adequadas. Além disso, propõe-se corrigir tanto a atividade quanto os recursos, e questionar se estes são apropriados para os alunos”* (G6).

Os Grupos G3, G4 e G5 expuseram ambiguidades que não se aplicavam, relacionadas a aspectos de gestão da aula. O Grupo 3 se refere à modelagem da atividade após as instruções, o que também especificam em sua proposta de melhoria. O Grupo 4 declarou instruções pouco claras como uma ambiguidade, por isso, na melhoria, enfatizam a melhoria do início e término da aula. Enquanto isso, o Grupo 5 apontou a ausência de explicações para evitar confusões nos alunos, propondo a adição de perguntas durante o desenvolvimento da atividade.

Em vários grupos, houve certa confusão na identificação do componente de ambiguidades. Apesar das confusões mencionadas, os grupos apresentaram propostas de melhoria que abordam tanto aspectos relacionados a erros matemáticos quanto à clareza e eficácia pedagógica. Essas sugestões refletem um esforço dos futuros professores em melhorar a qualidade das aulas simuladas e demonstram uma compreensão da importância da reflexão e adaptação no ensino.

Vários grupos destacaram a importância da clareza nas explicações e a necessidade de uma preparação conceitual mais aprofundada. No entanto, a pesquisa poderia se beneficiar de uma maior clareza na conceituação do componente de ambiguidade e de uma atenção contínua à diferenciação entre ambiguidade e erro.

6 Avaliação do componente riqueza de processos e proposta de melhoria da aula

De acordo com o que foi delineado na seção 3.4, sobre a diversidade de processos enriquecedores para o conteúdo relacionado ao Teorema de Pitágoras, o Quadro 5 apresenta os resultados que resumem as habilidades expressas nas reflexões sobre as aulas simuladas pelos estudantes em relação a este aspecto do CAD Epistêmico. É importante notar que o currículo chileno estabelece quatro habilidades (processos) que devem ser desenvolvidas integralmente em todo o conteúdo matemático do plano: resolução de problemas, argumentação e comunicação, representação e modelagem. Além dessas habilidades, outros processos identificados pelos grupos que enriquecem a atividade matemática foram incluídos nesta classificação, como tentativa e erro, verificação, demonstração e formulação de conjecturas, entre outros.

Quadro 5: Resultados da Categorização do Componente Riqueza de Processos

Riqueza de Processos	G1	G2	G3	G4	G5	G6
Resolução de problemas	X	X	X	X	X	X
Argumentação e comunicação	X	X	X	X		X
Representação			X	X		
Modelização		X	X			
Outros processos						X

Fonte: Elaboração própria

Como visto no Quadro 5 e após a análise dos seis grupos, ficou evidente que todos reconheceram a importância de promover habilidades matemáticas entre os alunos. A resolução de problemas e a argumentação e comunicação foram consideradas habilidades matemáticas fundamentais pela maioria dos grupos. Por outro lado, as habilidades de modelagem e representação foram as menos mencionadas nas reflexões dos grupos. É importante notar que o Grupo 6 destacou a presença de outro processo relacionado à verificação de resultados, conforme indicado no seguinte depoimento: *"[...] Ao longo deste processo, eles têm a oportunidade de revisar e confirmar os resultados"* (G6).

Além disso, há um consenso sobre a importância de integrar a argumentação e a comunicação continuamente ao longo de todo o processo de ensino, como pode ser visto na seguinte evidência: *"Embora o desenvolvimento da habilidade de argumentar e comunicar seja evidente nas últimas perguntas do guia, infelizmente, essa dimensão não esteve presente continuamente ao longo da atividade"* (G1). *"Embora não tenha sido desenvolvida de forma sólida, a argumentação entre os alunos e com seus colegas foi brevemente promovida. No entanto, é um aspecto que poderia ser melhorado em futuras aulas para estimular o raciocínio e a comunicação matemática"* (G2).

Enquanto alguns grupos destacam a presença de processos importantes, como resolução de problemas, representação e argumentação, eles também identificam áreas de melhoria na aplicação desses processos, como visto em: *"Acreditamos ser necessário adicionar e dar mais ênfase à habilidade de argumentar e comunicar por meio de perguntas gerais e perguntas do guia de aprendizagem. Isso provocaria discussões entre os alunos e compartilhamento de suas observações"* (G1).

A necessidade de equilibrar o uso de diferentes habilidades matemáticas é reconhecida, garantindo que nenhuma seja negligenciada ou usada de forma desproporcional: *"A habilidade argumentativa foi usada muito mais; portanto, será equilibrada com o restante das habilidades usadas"* (G3). Melhorias específicas são sugeridas, como dar maior ênfase à representação e fomentar a comunicação de ideias entre os alunos: *"[...] pedir a mais colegas que apresentem e expliquem sua representação para contrastar os resultados obtidos [...]"* (G4).

Todos os grupos participantes, em suas propostas de redesenho, indicaram a integração de habilidades que foram destacadas em menor grau em suas simulações; alguns dando mais ênfase à modelagem e outros à representação, como evidenciado nos seguintes relatos: *"[...] Outra modificação seria fornecer uma situação problemática sobre a construção e não apenas suas medidas. Isso daria mais sentido à atividade a ser realizada"* (G4); *"Para modificar isso, [...] adicionar representações adequadas onde os alunos possam verificar e os professores esclarecer sem qualquer preocupação"* (G6).

De modo geral, os grupos demonstram uma atitude reflexiva e proativa em relação à melhoria da qualidade das aulas simuladas, reconhecendo a importância de desenvolver os processos matemáticos de forma integral para um ensino eficaz. Neste componente, os alunos mencionam explicitamente as habilidades (processos) declaradas no currículo chileno; no entanto, vale destacar que, pela observação do professor, o segundo autor deste artigo, outros processos se manifestaram nas atividades, como tentativa e erro, manipulação e experimentação. Isso se justifica porque, antes da atividade relacionada ao estudo abrangente do Teorema de Pitágoras, as habilidades do currículo chileno foram analisadas, conforme indicado no programa da disciplina. Isso nos leva a refletir que, em futuras instâncias, também deve ser dado ênfase a outros processos matemáticos, como mencionado, que fazem parte da atividade de ensino.

7 Avaliação do componente representatividade e proposta de melhoria da aula

A análise revela que todos os grupos participantes refletiram sobre os diversos modos de expressão (verbal, concreto, pictórico, simbólico) presentes nas simulações. No entanto, nenhum dos grupos considerou se os tipos de experiências realizadas eram suficientes para atingir os Indicadores de Avaliação (IA) fornecidos (significados parciais do Teorema de Pitágoras). O Grupo 1 foi encarregado de abordar o IA1. Esse indicador exigia o desenvolvimento de uma atividade onde os alunos pudessem verificar ou demonstrar o Teorema de Pitágoras como uma relação entre as áreas dos quadrados construídos nos lados do triângulo retângulo, o que constitui o significado geométrico do Teorema de Pitágoras. O Grupo 2 assumiu a responsabilidade de projetar e simular uma atividade relacionada ao IA2. Esse indicador explora outro significado geométrico do Teorema de Pitágoras, especificamente a relação entre os comprimentos dos lados do triângulo. Os Grupos G3 e G5 foram designados para simular uma experiência de aula relacionada ao IA3. Esse indicador aborda o significado aritmético-algébrico do Teorema de Pitágoras, especificamente a recíproca do teorema. O Grupo 4 ficou responsável por desenvolver uma experiência de aula relacionada ao IA5. Esse indicador foca no significado geométrico do Teorema de Pitágoras, que estabelece uma relação entre os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo. O Grupo 6 foi solicitado a realizar uma simulação de aula sobre o IA4. Esse indicador envolve uma conexão entre um dos significados geométricos do Teorema de Pitágoras e o Teorema de Tales.

Embora todos os grupos tenham utilizado uma variedade de representações em suas aulas simuladas, foram identificadas áreas para melhoria em relação à compreensão dos EIs atribuídos e à necessidade de diversificar as atividades para abordar plenamente os significados do Teorema de Pitágoras. Isso se reflete nos seguintes depoimentos: *"[...] realizar a conversão da representação concreta para uma representação verbal, por meio de perguntas intencionais sobre a relação entre as áreas das figuras"* (G1); *"Para fortalecer essa área, poderia ser implementado o uso de figuras concretas, permitindo que os alunos as manipulem [...]"* (G2); *"Para apresentar um significado parcial por meio de diferentes modos de expressão, é necessário incorporar elementos concretos, pictóricos e simbólicos na aula, evitando depender exclusivamente dos guias de aprendizagem [...]"* (G6).

Os resultados mostram que os alunos não conseguiram aplicar o que aprenderam no módulo de formação (seção 3.4.4) sobre a representatividade do Teorema de Pitágoras ao refletir sobre suas simulações de aula. Isso indica uma necessidade de uma integração mais profunda das percepções teóricas em contextos práticos de sala de aula, garantindo que todas as formas de representação contribuam efetivamente para uma compreensão abrangente dos conceitos matemáticos envolvidos.

8 Discussão e Conclusões

O ensino eficaz de matemática requer professores reflexivos e bem-preparados, capazes de analisar e entender diversos fatores que influenciam os processos de ensino e aprendizagem (Godino, Batanero & Font, 2003). Este estudo explorou a integração de simulações de aulas e do CAD Epistêmico na formação de futuros professores de matemática no Chile, com o objetivo de promover a competência reflexiva desde os estágios iniciais de sua preparação profissional.

Esta pesquisa se concentrou em duas questões: Como os futuros professores aplicam os componentes do CAD Epistêmico ao refletir sobre aulas simuladas? E quais conexões podem ser identificadas entre as reflexões dos futuros professores e suas propostas para melhorar essas aulas?

A primeira questão abordou a competência dos futuros professores em lidar com os componentes do CAD Epistêmico durante suas reflexões sobre aulas simuladas. Os resultados refletem abordagens e habilidades variadas entre os grupos. Alguns alunos mostraram uma compreensão sólida e aplicação precisa dos componentes, como a identificação de erros matemáticos e a avaliação de ambiguidades, enquanto outros estavam confusos, especialmente em distinguir entre aspectos matemáticos e decisões pedagógicas. Todos os grupos enfrentaram desafios na análise da representatividade do Teorema de Pitágoras em suas simulações de aula, indicando a necessidade de fortalecer a formação na conceituação e aplicação dos componentes de *erros*, *ambigüidades* e *representatividade*.

Esses achados são apoiados por pesquisas recentes (Hummes *et al*. 2023; Hummes & Seckel, 2024) e por descobertas internacionais que indicam que os professores enfrentam desafios na compreensão dos aspectos epistêmicos das tarefas (Stahnke, Schueler & Roesken-Winter, 2016).

A segunda questão focou na conexão entre as reflexões dos futuros professores sobre aulas simuladas e as propostas de melhoria derivadas dessas reflexões. Independentemente de quão bem os grupos utilizaram os componentes do CAD Epistêmico, todos demonstraram um compromisso em melhorar a qualidade didática por meio de ajustes nas instruções, mudanças nas representações e estratégias para abordar mal-entendidos cognitivos. Isso sugere que a consciência reflexiva está ligada aos esforços para elevar a qualidade instrucional (Hill, Rowan, & Ball, 2005).

Os achados destacam a relevância da simulação de aulas como uma estratégia formativa, proporcionando aos futuros professores experiências práticas e oportunidades de aprendizagem significativas. A competência reflexiva vai além da prática simulada, exigindo quadros conceituais e metodológicos específicos (Hatton & Smith, 1995). A combinação de simulação de aulas com o CAD Epistêmico ofereceu uma abordagem estruturada para reflexão, emergindo como uma estratégia valiosa na formação inicial de professores de matemática ao promover uma reflexão estruturada sobre a prática pedagógica.

Abordar as variabilidades na capacidade dos futuros professores de aplicar esses critérios sugere a necessidade de melhorias nos programas de formação docente. Este estudo contribui para o conhecimento na formação de professores ao destacar a importância de cultivar a competência reflexiva desde os estágios iniciais da preparação profissional.

Apesar dos achados valiosos, este estudo apresenta limitações que podem ter influenciado a interpretação dos resultados, apresentando oportunidades para pesquisas futuras que expandam o conhecimento na formação docente e na competência reflexiva. Conduzido em uma universidade chilena com estudantes de Pedagogia em Educação Básica especializados em Matemática, a aplicabilidade a outros contextos ou níveis educacionais pode ser limitada. O tamanho reduzido da amostra limita a generalização e a compreensão das variabilidades individuais na aplicação do CAD Epistêmico. O foco em alunos em estágios iniciais pode não refletir padrões em professores mais experientes. Por fim, as avaliações foram baseadas em auto-reflexões, e a incorporação de avaliações de especialistas poderia validar essas descobertas.

Pesquisas futuras devem incluir análises de especialistas sobre erros, ambigüidades, riqueza de processos e representatividade em simulações de aula. Contrastar essas avaliações com as reflexões dos futuros professores proporcionaria uma visão abrangente das percepções, contribuindo para a compreensão das áreas de melhoria na preparação pedagógica. Pesquisas longitudinais poderiam oferecer uma visão completa do desenvolvimento da competência reflexiva ao longo do tempo. A replicação do estudo em diversos contextos e com amostras maiores permitiria examinar como as especificidades contextuais influenciam a aplicação do

CAD Epistêmico. Considerar variáveis externas, como experiência de ensino prévia ou atitudes em relação à matemática, poderia enriquecer a compreensão dos fatores que impactam a competência reflexiva. Abordar essas limitações e sugestões pode avançar significativamente o conhecimento na formação de professores e fortalecer as estratégias formativas que promovem a competência reflexiva em futuros educadores de matemática.

Referencias

Aghakhani, S., Lewitzky, R. A., & Majeed, A. (2023). Developing reflective practice among teachers of mathematics. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 18*(4), 1-10.

Bradley, E. G. & Kendall, B. (2014). A Review of Computer Simulations in Teacher Education. *Journal of Educational Technology Systems*, *43*(1), 3-12.

Breda, A., Font, V. & Pino-Fan, L. (2018). Evaluative and normative criteria in Didactics of Mathematics: the case of didactical suitability construct. *Bolema*, *32*(60), 255-278.

Breda, A., Pino-Fan, L. R. & Font, V. (2017). Meta Didactic-Mathematical Knowledge of Teachers: Criteria for The Reflection and Assessment on Teaching Practice. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 13(6), 1893-1918.

Cáceres, P. (2003). Análisis cualitativo de contenido: una alternativa metodológica alcanzable. *Psicoperspectivas. Individuo y sociedad, 2*(1), 53-82.

Corbin, J. & Strauss, A. (2014). *Basics of qualitative research: Techniques and procedures for developing grounded theory*. Thousand Oaks, CA: Sage publications.

Davis, B. (2008). Is 1 a prime number? Developing teacher knowledge through concept study. *Mathematics Teaching in the Middle School, 14*(2), 86-91.

Dyer, E. B. & Sherin, M. G. (2016). Instructional reasoning about interpretations of student thinking that supports responsive teaching in secondary mathematics. *ZDM Mathematics Education*, *48*(1), 69-82.

Font, V., Planas, N. & Godino, J. D. (2010). A model for the study of mathematics teaching and learning processes. *Infancia y Aprendizaje*, *33*(1), 89-105.

Giacomone, B., Godino, J. D. & Beltrán-Pellicer, P. (2018). Developing the prospective mathematics teachers' didactical suitability analysis competence. *Educação e Pesquisa, 44*, 1-21.

Gibson, D. C., Knezek, G., Redmond, P. & Bradley, E. (2014). *Handbook of games and simulations in teacher education*. Chesapeake, VA: Association for the Advancement of Computing in Education.

Godino, J. D. (2013). Indicators of didactical suitability for mathematics teaching and learning processes. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, (11), 111-132.

Godino, J. D., Batanero, C. & Burgos, M. (2023). Theory of didactical suitability: An enlarged view of the quality of mathematics instruction. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 19*(6), 1-20.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros*. Granada, Universidad de Granada.

Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, *39*(1), 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2019). The Onto-semiotic Approach: implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics*, *39*(1), 37-42.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. & De Castro, C. (2009). Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias*, *27*(1), 59-76.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. & Font, V. (2017). Onto-Semiotic Approach to Mathematics Teacher's Knowledge and Competences. *Bolema*, *31*(57), 90-113.

Guba, E. & Lincoln, Y. (2002). Paradigmas en competencia en la investigación cualitativa. In C. Denman & J. Haro (Ed.). *Por los rincones. Antología de métodos cualitativos en la investigación social* (pp. 113-145). Hermosillo Sonora: Editorial El colegio de Sonora.

Hatton, N., & Smith, D. (1995). Reflection in teacher education: Towards definition and implementation. *Teaching and Teacher Education, 11*(1), 33-49.

Hill, H. C., Rowan, B. & Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal*, *42*(2), 371-406.

Huang, R., Takahashi, A. & Ponte, J. P. (2019). *Theory and practice of lesson study in mathematics*. Cham, Switzerland: Springer International Publishing.

Hummes, V., Breda, A. & Font, V. (2022). El desarrollo de la reflexión sobre la práctica en la formación de profesores de matemáticas: una mirada desde el Lesson Study y los Criterios de Idoneidad Didáctica. In J. Lugo-Armenta, L. Pino-Fan, M. Pochulu & W. Castro (Ed.). *Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos: Investigaciones y desarrollos en América Latina* (pp. 221–241). Osorno, Chile: Universidad de los Lagos.

Hummes, V., Breda, A., Font, V. & Seckel, M. J. (2023). Improvement of Reflection on Teaching Practice in a Training Course That Integrates the Lesson Study and Criteria of Didactical Suitability. *Journal of Higher Education Theory and Practice*, *23*(14), 208-224.

Hummes, V., & Seckel, M. J. (2024). Advancing teacher reflective competence: Integrating lesson study and didactic suitability criteria in training. *Frontiers in Education*, *9*, 1-9.

López, F. (2002). El análisis de contenido como método de investigación. *En-clave Pedagógica*, *4,* 167-169.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice. The discipline of noticing.* London: Routledge-Falmer.

Melo, C. B. S. & Bisognin, E. (2021). Modelagem Matemática como proposta de itinerário formativo no Novo Ensino Médio: uma possibilidade para o desenvolvimento de habilidades e competências. *Revista Internacional de Pesquisa Em Educação Matemática*, *11*(1), 24-36.

Ortíz, F. J. R. (2023). Los paradigmas epistémicos en la investigación educativa. *Revista Educativa Avanza*, *1*(1), 29-36.

Porta, L. & Silva, M. (2003). La investigación cualitativa: El Análisis de Contenido en la investigación educativa. *Anuario digital de investigación educativa*, *14*: 1-18.

Proença, M. C., Campelo, C. S. A. & Oliveira, A. B. (2024). Prospective mathematics teachers' reflections on their strategies for solving a simple combination problem. *Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, *14*(1), 1-13.

Speed, S. A., Bradley, E. & Garland, K. V. (2015). Teaching Adult Learner Characteristics and

Facilitation Strategies Through Simulation-Based Practice. *Journal of Educational Technology Systems, 44*(2), 203-229.

Stahnke, R., Schueler, S. & Roesken-Winter, B. (2016). Teachers’ perception, interpretation, anddecision-making: a systematic review of empirical mathematics education research. *ZDM Mathematics Education, 48,* 1-27.