Sociedade Brasileira de Educação Matemática

RIPEM

Prácticas docentes de alto apalancamiento en el contexto de la formación de docentes que enseñan matemáticas en la educación básica

Valdir Alves da Silva
Universidade Federal do ABC
Santo André, SP — Brasil
valdir.geom@yahoo.com.br
0000-0003-4767-7089

Vinícius Pazuch
Universidade Federal do ABC
Santo André, SP — Brasil
vinicius.pazuch@ufabc.edu.br
0000-0001-6997-1110

2238-0345

10.37001/ripem.v15i1.4328

Recebido • 28/09/2024
Aprobado • 09/11/2024
Publicado • 02/03/2025

Editor • Gilberto Januario

Resumen: Las aproximaciones a la práctica docente han sido prometedoras en el movimiento de involucramiento de los docentes con partes constituyentes de la práctica. En este artículo, buscamos identificar y caracterizar evidencias de competencia matemática para la enseñanza reveladas por docentes que enseñan matemáticas (PEM) frente a prácticas docentes de alto apalancamiento, concebidas como enfoques de práctica docente para la enseñanza y aprendizaje de desigualdades matemáticas en educación básica. Esta investigación cualitativa-interpretativa se desarrolló en un curso de formación continua en el contexto de una pedagogía de formación docente en educación básica. El corpus textual del análisis se obtuvo a través de la selección de tareas matemáticas, juegos de roles de clase y elaboración de un plan de clase. Como se propone en este artículo, los resultados revelan que las aproximaciones a la práctica constituyen prácticas docentes de alto apalancamiento y promueven evidencias de competencia matemática para la enseñanza y aprendizaje de desigualdades matemáticas relacionadas con la observación matemática, el razonamiento matemático y la creatividad matemática del docente.

Palabras clave: Juego de Roles en el Aula. Competencia Matemática. Desigualdades Matemáticas. Enseñanza y Aprendizaje del Álgebra. Experiencia de Formación.

A high-leverage teaching practice in a continuing education course of teachers who teach mathematics in basic education

Abstract: Approximations of teaching practice have been promising in the movement of involving teachers with constituent parts of practice. In this article, we seek to identify and characterize evidence of mathematical proficiency for teaching revealed by teachers who teach mathematics (TTMs) in the face of high-leverage teaching practices, conceived as teaching practice approaches to the teaching and learning of mathematical inequalities in basic education. This qualitative-interpretative research was developed in a continuing education course in the context of a teacher education pedagogy in basic education. The textual corpus of the analysis was obtained through the selection of mathematical tasks, class role-playing, and elaboration of a lesson plan. As proposed in this article, the results reveal that approximations of practice constitute high-leverage teaching practices and promote evidence of mathematical proficiency for teaching and learning mathematical inequalities related to the teacher's mathematical noticing, mathematical reasoning, and mathematical creativity.

Keywords: Classroom Role-Playing. Mathematical Proficiency. Mathematical Inequalities. Teaching and Learning of Algebra. Formative Experience.

Práticas de ensino de alta alavancagem em uma experiência de formação continuada com professores que ensinam matemática na Educação Básica

***Resumo**:* As aproximações da prática docente têm se mostrado promissoras para envolver os professores com partes constituintes da prática. Buscamos neste artigo *identificar e caracterizar indícios de proficiência matemática para o ensino desvelados pelos professores que ensinam matemática (PEM) diante de práticas de ensino de alta alavancagem, concebida como aproximações da prática docente sobre o ensino e a aprendizagem das desigualdades matemáticas na educação básica*. Trata-se de uma pesquisa qualitativa-interpretativa, desenvolvida numa experiência de formação continuada no contexto de uma pedagogia da formação de professores na educação básica. O *corpus* textual da análise foi obtido por meio da seleção de tarefas matemáticas, encenação de aula e elaboração de plano de aula. Os resultados revelam que as *aproximações da prática docente*, como proposta neste artigo, se constituem como *práticas de ensino de alta alavancagem*, bem como contribuem para a promoção de indícios de proficiência matemática para o ensino e a aprendizagem das desigualdades matemáticas relacionados ao *noticing matemático*, *raciocínio matemático* e *criatividade matemática do professor.*

Palavras-Chave: Práticas Docentes. Proficiência Matemática para o Ensino. Desigualdades Matemáticas. Ensino e Aprendizagem da Álgebra. Experiência de Formação Continuada.

1 Introducción[1]

En el contexto de las actividades humanas, hay diversas prácticas profesionales que se consideran complejas, una de las cuales es la docencia (Grossman *et al.* 2009). La labor docente es una tarea multifacética que va mucho más allá de la simple transmisión de conocimientos a los estudiantes (Kennedy, 2016). Ocurre en contextos sociales diversos y dinámicos, donde los docentes enfrentan una serie de desafíos, adaptándose constantemente para satisfacer las necesidades de los estudiantes, la institución educativa y la comunidad en la que operan (Forzani, 2014; Grossman *et al.* 2009). Debido a esta complejidad, algunos investigadores sugieren como formación inicial y/o continua descomponer la práctica docente en partes constitutivas para ser analizadas, estudiadas y representadas, y luego implementadas en el propio trabajo docente (Ball; Forzani, 2009; Banks *et al.*, 2024; Grossman *et al*., 2009; Sztajn *et al*., 2020).

Conceptualmente, la *descomposición de la práctica docente* se interpreta de diferentes maneras en la literatura, como "descompactar y especificar la práctica en detalle y diseñar una educación profesional que ofrezca a los profesores principiantes oportunidades para practicar el trabajo y perfeccionar sus habilidades" (Ball & Forzani, 2009, p. 498, nuestra traducción).[2] Matsumoto-Royo y Ramírez-Montoya (2021) lo entienden como "segmentación o división en elementos constitutivos para facilitar la enseñanza y el aprendizaje" (p. 2). Según Sztajn *et al*. (2020), la intención es "ayudar a los principiantes a distinguir y comprender componentes separados antes de integrarlos en una práctica profesional compleja". Para Banks *et al*. (2024), se trata de "dividir las prácticas docentes en partes pequeñas y manejables" (p. 5). Estos autores comparten el mismo entendimiento de que la *descomposición de la práctica docente* "implica dividir la práctica en sus partes constituyentes con fines de enseñanza y aprendizaje" (Grossman

[1] Este artículo es parte de la tesis doctoral defendida en el Programa de Postgrado en Docencia e Historia de las Ciencias y Matemáticas de la Universidad Federal del ABC, organizada en formato multiartículo, escrita por el primer autor y supervisada por el segundo autor.

[2] Para no cargar el texto, de esta cita en adelante optamos por no explicar la expresión "nuestra traducción" después de las traducciones de las citas. Señalamos que las traducciones son de nuestra exclusiva responsabilidad.

et al., 2009, p. 2056).

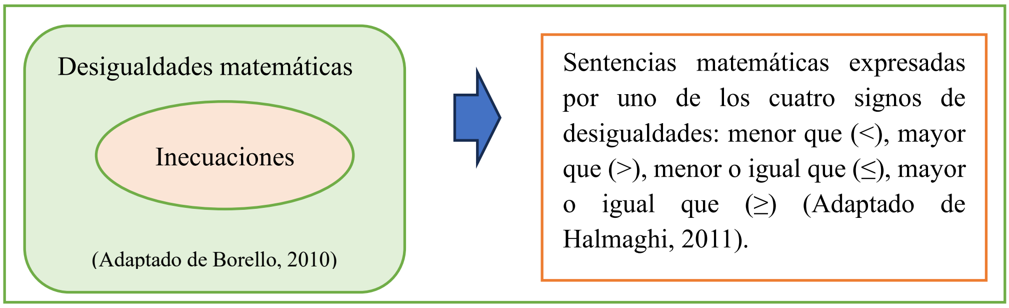
Incluso reconociendo la importancia de los enfoques integradores al aprendizaje docente, la práctica docente se compone de partes constituyentes que pueden mejorarse mediante una enseñanza dirigida (Grossman *et al*., 2009). Por lo tanto, incorporamos en este estudio las ideas de estos autores sobre la *descomposición de la práctica docente* para involucrar a los PEM en prácticas docentes deliberadas que sean más o menos cercanas a su profesión – ***aproximaciones a la práctica docente*** (Grossman *et al*. 2009), sobre la enseñanza y el aprendizaje de las desigualdades matemáticas en la Enseñanza Básica[3] durante una Experiencia de Formación Continua (EFC).

La expresión "desigualdades matemáticas" es un tema que aparece, explícita o implícitamente, en los currículos de matemáticas de la Educación Básica brasileña (Brasil, 2017, 2018). Este contenido no es exclusivo de un solo área de las matemáticas, puede estar presente en la resolución de problemas de aritmética, álgebra o geometría. Por otro lado, varios investigadores, como Alvarenga (2013) y Anggoro y Prabawanto (2019), reportan que en el campo de la educación matemática hay poca investigación sobre el tema. Además, destacan el hecho de que los estudiantes de la carrera de matemáticas y PEM tienen dificultades a la hora de afrontar tareas matemáticas que tocan este tema. Todos estos hallazgos sirvieron como argumentos para considerar las desigualdades matemáticas como un tema de investigación para promover discusiones con los PEM.

Aún en lo que respecta a las desigualdades matemáticas, su concepto no resuena unánimemente entre los investigadores del campo de la educación matemática (Halmaghi, 2011; Iezzi & Murakami, 2019; Mineiro, 2019). Ante este escenario de divergencia conceptual, optamos por seguir las palabras de Halmaghi (2011), quien entiende las desigualdades matemáticas como "enunciados matemáticos expresados por uno de los cinco signos de desigualdad: menor que (<), mayor que (>), menor o igual que (≤), mayor o igual que (≥) y diferente (≠)" (p. 16). Este concepto abarca sentencias matemáticas cerradas, es decir, sentencias que inmediatamente podemos afirmar que son verdaderas o falsas, como, por ejemplo: $10 \neq 3$, $8 < 20$. Además, este concepto también conlleva sentencias matemáticas abiertas que no podemos clasificar de inmediato como verdaderas o falsas, ya que cada una de ellas depende del valor de la variable que conlleva, como, por ejemplo: $3 + x^2 > 5$, $5y + 4 \geq 24$, $2z \leq 10$.

Resaltamos que el signo diferente (≠) no se abordará en este estudio. Así, asumimos el concepto de desigualdades matemáticas como:

Figura 1: Concepto de desigualdades matemáticas



Fuente: Elaboración propia

[3] Según la LDBEN n. 9.394/96, art. 21, la Educación Básica está compuesta por Educación Infantil, Educación Primaria y Educación Secundaria. Nuestro estudio abordará el tema de las desigualdades matemáticas presentes en el currículo escolar en los últimos años de la Educación Primaria y/o Secundaria.

Dadas estas conceptualizaciones, el objetivo trazado para este artículo es: *identificar y caracterizar signos de competencia matemática para la enseñanza revelados por PEM frente a prácticas docentes de alto apalancamiento* (HLTP)[4]*, concebidos como aproximaciones a la práctica docente sobre la enseñanza y el aprendizaje de las desigualdades matemáticas en la Educación Básica.* Estas prácticas son compartidas, con pequeñas adaptaciones, desde el pensamiento de Ball. *et al.*, (2009) y Melhuish *et al*. (2022), quienes entienden que los HLTP son prácticas que (i) pueden implementarse de manera rutinaria; (ii) utilizan, dan forma o integran el pensamiento matemático de los PEM; (iii) tienen el potencial de aumentar la equidad, el acceso y/o la participación entre los PEM; (iv) están respaldadas por investigaciones que conectan el aprendizaje de los PEM; y (v) ofrecen oportunidades de aprendizaje con miras a dotar a los PEM de habilidades para los elementos fundamentales de la labor docente.

La palabra "indicios" hace referencia a la idea de pistas, señales de algo que se quiere descubrir en una investigación o en el análisis detallado de un objeto (Ginzburg, 1989). Para Santos y Costa (2020), la palabra pista se entiende como la "posibilidad de existencia de algo, que, hasta entonces, ha estado aparentemente oculto" (p. 1306). Para lograr este propósito, presentamos a continuación el marco teórico, la metodología, los procedimientos de análisis del *corpus* textual de este estudio y los resultados. Cerramos el artículo con una discusión de los resultados, las limitaciones del estudio y la conclusión.

2 Competencia matemática para la enseñanza

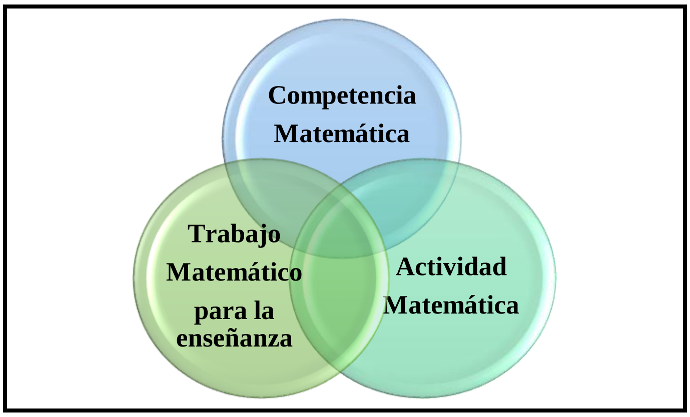
La competencia matemática para la enseñanza (CMpE), del original *mathematical proficiency for teachers* (Wilson; Heid, 2011), fue desarrollada en el contexto de la formación de PEM para la Enseñanza Secundaria. La palabra "proficiência" (proficiência en portugués, proficiency en inglés y competencia en español) proviene del latín *proficere,* que significa *"progresar, emplear bien, avanzar", del prefijo pro, "adelante",* y *facere, "hacer"* (Proficiência, [20--]). En la opinión de Kilpatrick, Swafford y Findell (2001), "ninguna palabra capta completamente todos los aspectos de especialización, competencia, conocimiento y facilidad en matemáticas. Elegimos "dominio de las matemáticas" para captar lo que creemos que significa para cualquier persona aprender matemáticas con éxito" (p. 5).

La CMpE es una estructura teórica formada por los componentes: *competencia matemática, actividad matemática y trabajo matemático para la enseñanza*. Se superponen, articulan e interactúan para promover la formación de profesores competentes para la enseñanza de las matemáticas. Estos componentes, organizados como se muestra en la Figura 2, se entienden como "la experiencia y las habilidades matemáticas que un docente tiene y utiliza con el objetivo de promover la comprensión, el dominio y la apreciación de las matemáticas por parte de los estudiantes" (Wilson & Heid, 2011, p. 2).

Desde esta perspectiva, la ***competencia matemática*** se refiere a aspectos relacionados con el dominio matemático del docente y su capacidad para ayudar a los estudiantes a avanzar en su aprendizaje en matemáticas. Este componente contiene los siguientes aspectos: *comprensión conceptual, fluidez procedimental, competencia estratégica, razonamiento adaptativo, disposición productiva y conocimiento histórico-cultural*. Como enfatizan Wilson y Heid (2011), "el desarrollo de la competencia matemática de los estudiantes en general depende en gran medida de qué tan bien desarrollada esté la competencia del docente" (p. 4).

[4] Usamos el acrónimo HLTP de la designación en inglês *high-leverage teaching practices* para referencia a prácticas docentes de alto apalancamiento.

Figura 2: Componentes de la competencia matemática para la enseñanza



Fuente: Adaptado de los autores con base en Wilson y Heid (2011)

El enfoque principal de la ***actividad matematica*** es “hacer matemáticas”, las actividades matemáticas que el profesor realiza en sus clases y que quiere que los estudiantes aprendan. Este componente incluye las siguientes vertientes: *noticing matemático del docente*, *razonamiento matemático del docente y creación matemática del docente*. Para estas autoras, “cuanta más competencia desarrolle un docente en la actividad matemática, mejor equipado estará para facilitar el aprendizaje y la práctica de las matemáticas de los estudiantes” (Wilson & Heid, 2011, p. 4). Desde esta perspectiva, los profesores se sitúan en el centro del proceso de aprendizaje y se les anima a pensar críticamente, explorar ideas y formular conjeturas. La mejora de la actividad matemática se produce a través de la exploración de actividades conectadas a situaciones que los acerquen a las prácticas reales de aula, lo que incluye, por ejemplo, seleccionar/preparar/resolver tareas matemáticas, organizar clases para los compañeros y desarrollar un plan de clase.

EL ***trabajo matemático para la enseñanza*** se relaciona con la labor matemática de enseñanza del profesor con el fin de ayudar a los estudiantes a desarrollar la competencia matemática. Este componente incluye los siguientes aspectos: *analizar las ideas matemáticas de los estudiantes, acceder y comprender el pensamiento de los estudiantes, conocer y utilizar el plan de estudios, evaluar la competencia matemática de los estudiantes y reflexionar sobre su propia práctica.* Como señalan Wilson y Heid (2011), “poseer competencia en el trabajo de la enseñanza de matemáticas permite a los profesores integrar su competencia en el contenido y conocimiento de proceso para aumentar la comprensión matemática de los estudiantes” (p. 16).

La CMpE se estructuró en el contexto de la formación de PEM que actuaban en la Escuela Secundaria. Por esta razón, Wilson y Heid (2011) justificaron la elección de este público entendiendo que: (i) el número de asuntos cubiertos en este nivel escolar es mayor que aquellos cubiertos en la Escuela Primaria; (ii) la formalidad y el rigor matemático se vuelven más presentes y reciben más atención por parte del docente; (iii) el profesor puede prestar más atención a las estructuras y abstracciones matemáticas y (iv) el razonamiento de los estudiantes es, teóricamente, más elaborado para aceptar tareas matemáticas más complejas.

2.1 Actividad matemática

Entre los tres componentes de PMpE, elegimos ***actividad matemática*** como lente teórica para analizar los datos de este estudio. Esta elección se justifica por el hecho de que este estudio: (i) está directamente relacionado con las actividades matemáticas que los PEM utilizan en sus clases y que desean que los estudiantes aprendan; (ii) está plenamente situado y promulgado socialmente y (iii) no está configurado en investigaciones brasileñas centradas en la formación de PEM que involucran desigualdades matemáticas en la Educación Básica. Además, es importante destacar que la elección de este componente no excluye a los otros dos, ya que tanto la *competencia matemática*, como el *trabajo matemático para la enseñanza*, están presentes en el trabajo diario que el PEM realiza en sus prácticas docentes y que buscan que los estudiantes aprendan. La Figura 3 muestra cómo Wilson y Heid (2011) idealizaron el componente, sus aspectos y subáreas.

Figura 3: Aspectos y subaspectos del componente de actividad matemática

Noticing matemático del profesor	***Razonamiento matemático del profesor***	***Creatividad matemática del profesor***
• Estructura matemática • Formas simbólicas válidas • Argumentación matemática • Conectar dentro y fuera de las matemáticas	• Justificar • Conjeturar • Generalizar • Restringir y extender	• Representación • Definiciones • Transformación

Fuente: Elaborado por los autores con base en Wilson y Heid (2011)

Desde esta perspectiva, Wilson y Heid (2011) aclaran que el ***noticing matemático del profesor*** se refiere a la capacidad del docente para percibir e interpretar aspectos del aula que son relevantes para el aprendizaje de los estudiantes. Sus subvertientes son: (i) *estructura matemática*—se relaciona con las similitudes y diferencias presentes en las estructuras matemáticas. Por ejemplo, el profesor necesita saber la diferencia entre resolver una ecuación de segundo grado y resolver una desigualdad matemática de segundo grado; (ii) *formas simbólicas válidas*—se relaciona con el reconocimiento de formas simbólicas algebraicas válidas en matemáticas. Por ejemplo, el profesor debe tener en cuenta que la propiedad conmutativa $ab = ba$ es válida para cualquier número real a y b. Por otra parte, esta misma propiedad no se aplica a las matrices; (iii) *argumentación matemática*—se refiere a la capacidad del docente para percibir cómo los estudiantes presentan sus argumentos durante las actividades matemáticas y cómo el docente puede intervenir para ayudarlos a mejorar su razonamiento matemático; (v) *conexiones dentro y fuera de las matemáticas*—se refiere a las conexiones que el docente hace entre los contenidos que está enseñando en ese momento con otras áreas de las matemáticas o incluso con otras asignaturas del currículo escolar, como las tecnologías.

En cuanto al aspecto ***razonamiento matemático del profesor***, Wilson y Heid (2011) se refiere a la capacidad del docente para producir sus fundamentos matemáticos y/o lógicos (razonamiento deductivo) que sustentan la plausibilidad de una conjetura (razonamiento abductivo) o generalización (razonamiento inductivo). Esto se complementa con las siguientes subvertientes: (i) crear argumentos que respalden justificaciones en procedimientos, propiedades, axiomas, teoremas y definiciones matemáticas (*justificar*); (ii) identificar patrones después de una fase informal de exploración de ejemplos específicos (*conjetura*); (iii) producir argumentos matemáticos que permitan afirmar que una propiedad es válida para un determinado conjunto de objetos y también es válida para un conjunto mayor de objetos (*generalizar*) y (iv) definir los límites o alcance de un concepto que se está abordando con los estudiantes en un momento dado de la clase (*restringir y extender*).

La vertiente ***creatividad matemática del profesor*** se refiere a la capacidad del docente para producir nuevas formas de transmitir las matemáticas a los estudiantes. Esta vertiente, que se complementa con las subvertientes, se divide en: (i) *representación*—representar las matemáticas para los estudiantes de una manera menos común; (ii) *definición*—recurrir a las definiciones para resolver cuestiones matemáticas y (iii) *transformación*—recurrir a la modificación, transformación y manipulación de conceptos matemáticos para contribuir a la competencia matemática de los estudiantes (Wilson & Heid, 2011). Así, con el contexto teórico definido, ahora presentaremos la metodología que orientó el presente estudio.

3 Metodología

En esta sección, presentamos y justificamos las opciones metodológicas que guían este estudio. Se trata de una investigación cualitativa (Bogdan & Biklen, 1994) de carácter interpretativo (Borko *et al*., 2008), desarrollada a través de una EFC que se configuró, en esta investigación, con características particulares, pues: (i) tuvo como objetivo principal ofrecer oportunidades de aprendizaje profesional a los PEM al inicio de su carrera para mejorar su competencia matemática para la enseñanza a través de prácticas deliberadas que los acerquen a la práctica docente; (ii) se situó en el contexto de una pedagogía de formación docente; (iii) se constituye como una secuencia de ERP, compuesta por conversaciones entre docentes, para que reflexionen sobre la enseñanza y el aprendizaje de las desigualdades matemáticas en la Educación Básica.

3.1 Contexto del estudio, participantes e instrumentos de recolección de datos

La experiencia de formación continua (EFC) se estructuró con una carga horaria total de 30 horas, dividida en nueve partes, denominadas episodios de razonamiento pedagógico (ERP). De ellos, los ERP (3, 4, 6), con una duración de 3h, 4h y 3h respectivamente, conforman el *corpus* textual de análisis de este artículo. La EFC se desarrolló sobre la base de una pedagogía de educación docente (Loughran, 2010), que sostiene que "enseñar no se trata simplemente de entregar información e ideas sobre la enseñanza. Más bien, es la enseñanza sobre el conocimiento de la práctica a través de la creación cuidadosa y decidida de episodios en los que este conocimiento nace en experiencias de práctica" (Loughran, 2010, p. 589). En cuanto a los ERP, se trata de "momentos de interacción entre profesores en los que describen o plantean preguntas sobre la práctica docente que van acompañadas de alguna elaboración de razones, explicaciones o justificaciones" (Mosston & Ashworth, 2008, p. 215). En otras palabras, son momentos colectivos de enseñanza y aprendizaje en los que todos los docentes trabajan en pro de un mismo conjunto de objetivos, que, en nuestro caso, se trata de enseñar y aprender sobre las desigualdades matemáticas en la Educación Básica.

Los ERP (3, 4, 6) fueron desarrollados en el segundo semestre de 2022, los días 4/10, 11/10 y 25/10, respectivamente, en las instalaciones de una universidad pública federal, con el objetivo de ofrecer oportunidades de aprendizaje profesional de manera que los PEM participasen en prácticas docentes deliberadas más o menos cercanas a las prácticas de su profesión. La expresión "oportunidades de aprendizaje profesional" fue construida, con base en estudios de Ball y Cohen (1999), Kawkman (2003), Lloyd *et al*. (2019) y Ribeiro y Ponte (2019), como momentos en los que los docentes estudian y discuten actividades matemáticas con el fin de mejorar su competencia matemática para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Básica. Dichas actividades pueden diferir en el trabajo de los docentes, sin embargo, incluyen: (i) observar, reflexionar y discutir las prácticas reales de aula de sus pares o a través de grabaciones de video; (ii) planificar tareas matemáticas para contribuir a la competencia matemática de los estudiantes; (iii) promulgar métodos de enseñanza destinados a promover avances en el dominio matemático de los estudiantes; (iv) implementar tareas matemáticas en la escuela con los estudiantes; y (v) reflexionar colectivamente con sus pares sobre las tareas implementadas en las escuelas.

Figura 4: Objetivos de las partes constituyentes de aproximaciones a la práctica

ERP-3	ERP-4	ERP-6
• Seleccionar y resolver colectivamente tareas matemáticas sobre desigualdades matemáticas	• Juego de roles de clase con la tarea de matemáticas seleccionada	• Desarrollar planes de clases para estudiantes de Secundaria

Fuente: Elaborado por los autores

Estos ERP fueron supervisados por el formador y grabados en vídeos. Con este recurso tecnológico se logró "captar aspectos difíciles de percibir con otros recursos, como expresiones corporales, faciales o verbales utilizadas en situaciones cotidianas, reacciones de diferentes sujetos ante una actividad o pregunta propuesta por el investigador" (Garcez *et al*., 2011, p. 251). Además de las grabaciones de video, los registros de observaciones no sistemáticas del formador y los formularios de evaluación realizados por el PEM completaron el conjunto de instrumentos de recolección de datos para este estudio. Las observaciones no sistemáticas "consisten en recolectar y registrar los hechos de la realidad sin que el investigador utilice medios técnicos especiales o necesite hacer preguntas directas. [...], no hay planificación y control previamente elaborados" (Marconi & Lakatos, 2003, p. 192). En cuanto a los formularios de evaluación, se los estructuraron con seis preguntas con el objetivo de comprender la percepción de los docentes sobre las actividades desarrolladas en cada ERP.

En estos ERP participaron dos profesoras, S(29) y H(26)[5], y un profesor, L(31), todos al inicio de su carrera (Ferreira, 2017), con hasta cinco años de experiencia docente. Además de estos colaboradores, incluimos a un estudiante, N(23), del curso de pregrado de la misma universidad donde se desarrolló el EFC. La inclusión de este estudiante se debió a su interés en enseñar y aprender sobre desigualdades matemáticas y porque tiene experiencia en la docencia a nivel de pasantías supervisadas en la Educación Primaria y Secundaria en instituciones educativas privadas de la región metropolitana de la ciudad de São Paulo. A partir de ese momento todos los participantes se denominarán PEM.

La elección de los PEM se debió principalmente a tres motivos: (i) la formación inicial no es suficiente para el trabajo docente (Ferreira, 2017); (ii) el inicio de la carrera docente está marcado por descubrimientos y experimentos, y se considera la época más difícil para los docentes (Seriani *et al*., 2017) y (iii) el inicio de la carrera es un período extremadamente complejo, en el que se imponen desafíos y responsabilidades a estos nuevos profesionales sin que estén preparados para afrontarlos (Lopes & Rhoden, 2023). Por lo tanto, creemos que brindar oportunidades de aprendizaje profesional para que los PEM participen en prácticas de enseñanza deliberadas que los ***acerquen a la práctica docente*** puede contribuir a mejorar su competencia matemática para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Vale la pena señalar que, en el contexto de este estudio, las tareas "normalmente, pero no necesariamente, son propuestas por los profesores, pero, una vez propuestas, tienen que ser interpretadas por los estudiantes y pueden dar lugar a actividades muy diferentes o a ninguna actividad" (Ponte, 2017, p. 195). En cuanto a la actividad, se relaciona exclusivamente con lo que realizan los estudiantes durante sus actividades escolares. En el contexto de las matemáticas, las tareas son "propuestas de trabajo que los profesores presentan a los estudiantes, quienes, a su vez, se involucran en 'actividades' matemáticas para resolverlas"

[5] Los PEM fueron nombrados por la última letra de su apellido. El número al lado derecho de la letra se refiere a la edad del PEM. Esta identificación fue otorgada luego de firmar el Formulario de Consentimiento Libre e Informado.

(Cunha, 2000, p. 5). En la misma dirección, Stein *et al*. (2009, p. 19) entienden la tarea como "una proposición del profesor en el aula, cuyo objetivo es centrar la atención de los estudiantes en una determinada idea matemática".

3.2 *Corpus* textual de análisis del estudio y colección de datos

El *corpus* textual de análisis de este estudio se constituyó como un conjunto de textos (Moraes, 2003), extraídos a través de las actividades desarrolladas en las ***aproximaciones a la práctica docente***. Este conjunto de materiales se entiende como resultado de investigaciones que expresan observaciones, discusiones y reflexiones sobre los fenómenos estudiados y que pueden ser leídos, descritos e interpretados en el contexto de la formación PEM en la Educación Básica.

3.2.1 Selección de tareas matemáticas

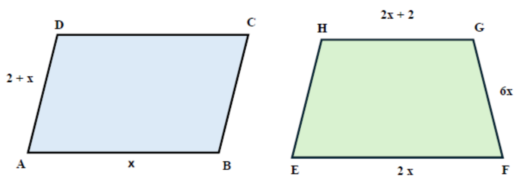
La selección de tareas matemáticas es una etapa importante en el proceso de planificación de clase del profesor (Steele, 2001). Al desarrollar este tipo de actividades, el profesor necesita estar seguro del diseño de la tarea que quiere proponer a los alumnos, tal y como Stein *et al*. (2009) señalan, "algunas tareas tienen el potencial de involucrar a los estudiantes en pensamientos y razonamientos complejos, mientras que otras se centran en la memorización o el uso de reglas o procedimientos" (p. 4). Para Steele (2001), "ninguna otra decisión que toma el profesor tiene tanto impacto en las oportunidades de aprendizaje de los estudiantes y en su percepción de lo que son las matemáticas, como la selección o creación de tareas con las que el profesor involucra a los estudiantes en el estudio de las matemáticas" (p. 42).

Atentos a las palabras de Steele (2001) y Stein *et al.* (2009), los PEM seleccionaron dos tareas sobre desigualdades matemáticas con el objetivo de involucrar a los estudiantes de Secundaria con formas complejas de pensamiento y razonamiento. Las tareas establecieron conexiones entre álgebra y geometría, lo que las caracteriza como tareas con un alto nivel de demanda cognitiva. Por demanda cognitiva nos referimos a "el tipo y nivel de pensamiento que se requiere de los estudiantes para realizar y resolver con éxito la tarea" (Stein *et al.*, 2009, p. 1). La primera tarea, creada por los PEM, **extracto #1**, aborda una desigualdad de segundo grado. Además, esta tarea fue clasificada por el formador según el modelo teórico propuesto por Barbosa (2013).

Barbosa (2013) presenta tres conceptos claves para el diseño de tareas. La primera, *marco de referencia*, se refiere al contexto en el que se creó la tarea, explicando las condiciones que la hacen verdadera o no. El marco de referencia ofrece limitaciones para la construcción de la tarea, por ejemplo, sitúa al docente frente a un marco de referencia específico en el que se diseña la tarea. El segundo, *recontextualización reversa*, se refiere a las acciones que realiza el docente para equilibrar aspectos de su propia práctica en relación con los conocimientos previos que aportan los estudiantes sobre un tema determinado y el marco de referencia en el que se está diseñando la tarea. El tercero, *marcadores de tareas*, nos ayudan a comprender las características de la tarea.

Figura 5: Primera tarea matemática escrita propuesta por los PEM

<table>
<tr><td rowspan="4">Tarea 1 - Observa las figuras y encuentra el valor de $x \in R$ de modo que el área del paralelogramo sea mayor que el área del trapezoide. Presenta tu respuesta utilizando diferentes tipos de representaciones (gráfica, conjunto numérico e intervalo numérico).</td><td colspan="2">Modelo teórico</td></tr>
<tr><td>Marco referencial</td><td>BNCC</td></tr>
<tr><td>Recontextualización inversa</td><td>Elaborada por los PEM</td></tr>
<tr><td>Marcadores</td><td>Clasificación</td></tr>
</table>



Extracto #1

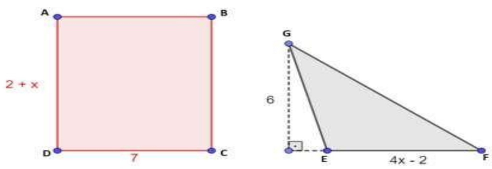
Contexto de referencia	Matemática pura
Uso del lenguaje	Muy rigurosa
Estructura	Cerrada
Distribución	Alto nivel
Relación pedagógica	Muy aislada

Fuente: Datos de la investigación

Siguiendo el razonamiento de establecer conexiones entre álgebra y geometría, los PEM redujeron la demanda cognitiva de la segunda tarea, **extracto #2**, proponiendo abordar el concepto de desigualdades matemáticas de 1er grado.

Figura 6: Segunda tarea matemática escrita propuesta por los PEM

Tarea 2 - Observa las figuras y encuentra el valor de x ∈ *R* de modo que el área del rectángulo sea mayor que el área del triángulo. Presenta tu respuesta utilizando diferentes tipos de representaciones (gráfica, conjunto numérico e intervalo numérico). Adaptado de la obra de Souza (2011)



Extracto #2

Modelo teórico	
Marco referencial	BNCC
Recontextualización inversa	Adaptada por los PEM
Marcadores	**Clasificación**
Contexto de referencia	Matemática pura
Uso del lenguaje	Muy rigurosa
Estructura	Cerrada
Distribución	Alto nivel
Relación pedagógica	Muy aislada

Fuente: Datos de la investigación

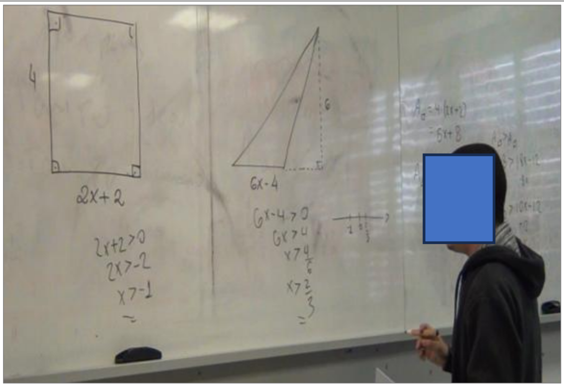
En resumen, la selección de tareas requirió competencia de los PEM en relación con: (i) el contenido matemático presente en las tareas; (ii) el plan de estudios de matemáticas, es decir, seleccionaron las tareas próximas al año escolar de los estudiantes; (iii) el pensamiento de los estudiantes, es decir, reconocieron el nivel de demanda cognitiva que cada tarea requeriría de los estudiantes.

3.2.2 Juego de roles de clase con la tarea matemática seleccionada

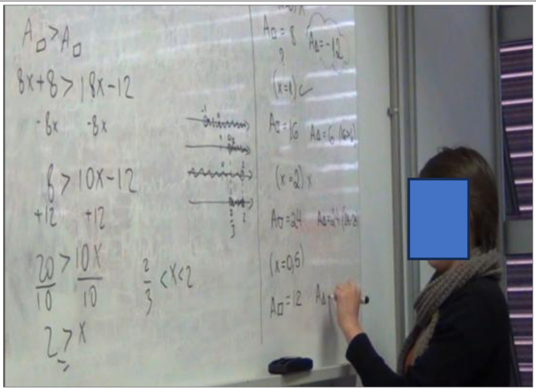
En el juego de roles de clase, **extractos #3** y **#4**, los PEM (N) y (H) tuvieron oportunidades de presentar sus estrategias de enseñanza en la resolución de tareas. El formador y los otros PEM asumieron el papel de estudiantes/observadores en la clase. Después de la actuación, los PEM se reunieron y, de mutuo acuerdo, decidieron elegir la segunda tarea para ser posteriormente implementada con estudiantes de Secundaria de una escuela pública de la región metropolitana de la ciudad de São Paulo. Según ellos, la primera tarea presentaba un nivel muy alto de exigencia cognitiva para los estudiantes, y el tiempo de clase reservado en la escuela no sería suficiente para completar la tarea.

Figura 7: Profesores jugando roles de clase con tareas matemáticas

Extracto #3	**Extracto #4**



Resolución de la tarea 2



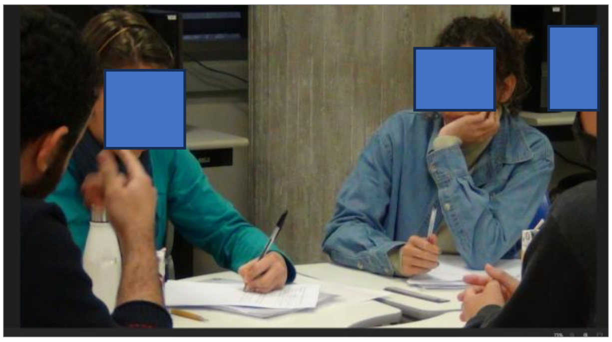
Resolución de la tarea 2

Fuente: Datos de la investigación

3.2.3 Preparación del plan de clase

En esta reunión, los PEM prepararon colectivamente el **extracto #5**, un plan de lección de 100 minutos para: (i) cumplir con el propósito y los objetivos de la clase; (ii) verificar el dominio matemático previo de los estudiantes; (iii) adjuntar la tarea matemática con sus posibles resoluciones; (iv) anticipar posibles dificultades y dudas de los estudiantes a la hora de resolver la tarea; (v) seleccionar materiales didácticos para llevar a cabo la clase con los estudiantes; (vi) organizar los momentos de clase: introducción de la tarea, realización de la tarea matemática por parte de los estudiantes, discusión colectiva sobre la resolución de la tarea y sistematización del aprendizaje (Canavarro, 2018).

Figura 8: PEM preparando el plan de clase



Extracto #5

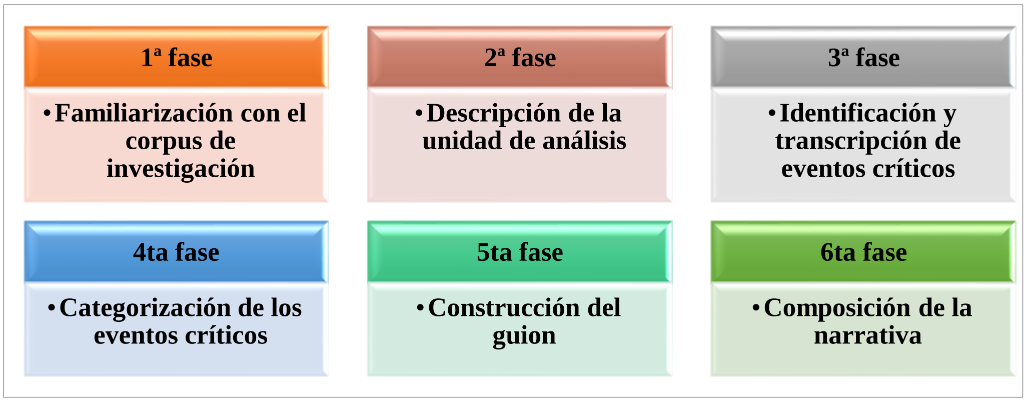
Fuente: Datos de la investigación

Las actividades desarrolladas en estos tres ERP produjeron un conjunto de textos que revelaron varios eventos críticos que contribuirán a la construcción del modelo de análisis del *corpus* textual de este estudio. Estos eventos se entienden como "eventos que demuestran un cambio significativo o contrastante en relación con una comprensión previa, un salto conceptual en relación con una concepción previa" (Powell *et al.*, 2004, p. 21).

4 Procedimientos de análisis del *corpus* textual del estudio

Para el análisis del *corpus* textual de las informaciones seleccionadas para este estudio, tomamos como guía para la transcripción y análisis de los videos, con las adaptaciones necesarias, el modelo analítico propuesto por Powell, Francisco y Maher (2004). Este modelo se construyó a partir del análisis de grabaciones de vídeo y del pensamiento de estudiantes involucrados en investigaciones matemáticas. Así, debido a que estamos utilizando el video como instrumento de recolección de datos, decidimos, con las adaptaciones necesarias, traer seis fases interactivas y no lineales de este modelo para que formen parte del *corpus* textual de este artículo. Además, el análisis versará sobre las prácticas deliberadas de los PEM dedicados a la enseñanza y el aprendizaje sobre desigualdades matemáticas en la Educación Básica. La Figura 6 muestra las fases de este modelo.

Figura 9: Fases del modelo de análisis del corpus textual de investigación



Fuente: Elaboración propia con base en Powell, Francisco y Maher (2004)

Brevemente, en la primera fase del modelo, leímos los textos producidos en los ERP (3, 4, 6) sin ningún tipo de análisis del material observado. En la segunda fase, formamos la unidad de análisis con estos ERP, denominada ***aproximaciones a la práctica docente***. En la tercera fase, identificamos y describimos los eventos críticos de esta unidad. En la cuarta fase, categorizamos los eventos críticos según los siguientes aspectos: ***noticing matemático del docente***, ***razonamiento matemático del docente*** y ***creatividad matemática del docente***, con sus respectivas subvertientes. En esta categorización, los eventos críticos comenzaron a denominarse *evidencia de competencia matemática para la enseñanza y el aprendizaje de desigualdades matemáticas*. En la quinta fase, construimos la trama (resultados), que consiste en el tejido de un texto en el que “las interpretaciones de datos y las inferencias juegan papeles importantes” (Powell, Francisco y Maher, 2004, pág. 33). En la sexta fase construimos la narrativa, que consiste en discutir los resultados, o mejor dicho, los signos de competencia matemática para la enseñanza y el aprendizaje de las desigualdades matemáticas reveladas por los PEM.

5 Resultados

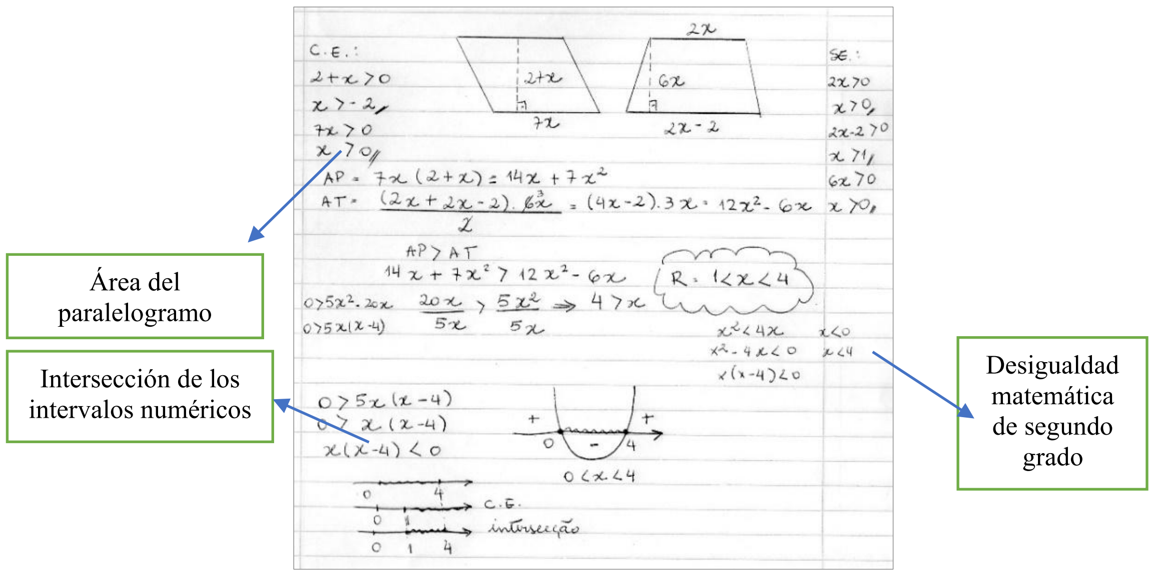
En esta sección, identificamos y describimos los signos de competencia matemática para la enseñanza y el aprendizaje de las desigualdades matemáticas reveladas por los PEM durante las ***aproximaciones a la práctica docente***. Estos signos se organizaron según la cuarta fase del modelo de análisis del *corpus* textual de la investigación que contiene las siguientes vertientes: ***noticing matemático***, ***razonamiento matemático*** y ***creatividad matemática*** del docente, con sus respectivas subvertientes.

5.1 Signos del *noticing* matemático del profesor

Durante las actividades realizadas en las ***aproximaciones a la práctica docente***, los PEM revelaron evidencia de competencia matemática para la enseñanza y el aprendizaje de desigualdades matemáticas relacionadas con el ***noticing matemático del docente***: *hacer conexiones dentro de las matemáticas mismas, formas simbólicas válidas* y *estructura* *matemática*. Por ejemplo, en la selección de tareas, **extractos #1 y #2**, los PEM percibieron, a través de actividades realizadas previamente, que conectar desigualdades matemáticas con conceptos de áreas de figuras planas en la misma tarea matemática ofrecería oportunidades para que los estudiantes mejoraran su competencia matemática. Esta capacidad de los PEM nos recordó las palabras de Wilson y Heid (2011) cuando observan que los profesores que perciben que las ***conexiones dentro de las matemáticas mismas*** ofrecer un ambiente rico y desafiador para los estudiantes.

Por otro lado, los PEM revelaron signos de competencia matemática para la enseñanza relacionada con la subvertiente *formas simbólicas válidas*. Por ejemplo, en la resolución colectiva de la primera tarea, **extracto #1**, utilizaron la propiedad distributiva con respecto a la suma en la expresión 7x.(2 + x) para determinar, **extracto #6**, el área del paralelogramo 14x + 7x². Esta propiedad informa, con base en Vieira (2021), que cualesquiera que sean los números reales *a*, *b* y *c*, la expresión matemática *a.(b + c) = a.b + c.a* siempre vale. De manera similar, los PEM determinaron el área del trapezoide.

Figura 10: Resolución de la primera tarea matemática por los PEM



Extracto #6

Fuente: Datos de la investigación

Además, los PEM revelaron evidencia de competencia matemática para la enseñanza relacionada con la subvertiente ***estructura matemática*** cuando reconocieron similitudes y diferencias en la resolución de ecuaciones de segundo grado con la desigualdad $x^2 - 4x < 0$, **extracto #6**. En otras palabras, observaron que las ecuaciones pueden no tener raíces y, si existen, pueden tener como máximo dos; en cuanto a la desigualdad matemática presentada en la tarea, además de encontrar las raíces de la ecuación, será necesario estudiar el signo de la función e intersecar los intervalos numéricos de las expresiones 7x, (2 + x) y 2x, (2x – 2) pertenecientes a los lados y alturas del paralelogramo y el trapezoide, respectivamente, para encontrar el valor de x que forma el área del paralelogramo mayor que el área del trapezoide.

5.2 Signos de razonamiento matemático del profesor

Manifestaciones de los PEM durante las actividades realizadas en ***aproximaciones a la práctica docente*** revelaron indicios de competencia matemática para la enseñanza y el aprendizaje de desigualdades matemáticas relacionadas con la vertiente ***razonamiento matemático del profesor***: *justificar, generalizar, restringir y extender*. Por ejemplo, en el juego de roles de clase, **extracto #4**, los PEM (N) y (H) sumaron (-8x) y (+12) a ambos lados de las desigualdades 8x + 8 > 18x - 12 y 8 > 10x - 12, respectivamente. Luego, multiplicaron ambos lados de la desigualdad matemática 20 > 10x por 1/10, encontrando el valor de x < 2. Al utilizar estas operaciones matemáticas, el formador preguntó por qué se utilizaban estas operaciones para resolver desigualdades. Los PEM (N) y (H) declararon: "*Si sumamos a ambos lados de una desigualdad matemática cualquier número, el significado de la desigualdad no cambiará*"(PEM (N) y (H), 10/11/2022). Complementando dijeron: "*Si multiplicas ambos lados de la desigualdad matemática por cualquier número, su resultado no cambia"* (PEM (N) y (H), 11/10/2022).

Como podemos ver, PEM (N) y (H) no usaron lenguaje formal para justificar las operaciones de suma y multiplicación de un número en ambos lados de las desigualdades. Aportaron argumentos de su formación académica que validaron sus procedimientos a la hora de resolver la tarea, revelando signos de competencia matemática en la vertiente ***justificar***. Como enfatizan Wilson y Heid (2011), las justificaciones de los profesores que enseñan en la Escuela Secundaria a menudo no necesitan basarse fuertemente en el rigor que los matemáticos normalmente usan en sus pruebas o demostraciones, porque si ese fuera el caso, muchas veces no proporcionarían comprensión a los estudiantes.

Complementando las respuestas de los PEM (N) y (H), el formador informó que la operación de suma se define como *monotonicidad de la adición* y resaltó: si **x,y** y **z** son tres números reales cualesquiera y si **x > y,** entonces la desigualdad **x + z > y + z** es equivalente a la primera (Sichinel, 2022). Para este autor, la palabra "equivalente" significa que "si se satisface la primera desigualdad matemática, entonces también se satisface la segunda, y viceversa: si se satisface la segunda desigualdad matemática, entonces también se satisface la primera" (p. 4). Además, el formador informó que la operación de multiplicación se define como *monotonicidad de la multiplicación* y resaltó: si **x > y, x** y **y** son números reales cualesquiera y **z** un número real positivo, entonces la desigualdad matemática **x.z** > **y.z** es equivalente la primera. Y añadió: si **x > y** y **z** es un número real negativo, entonces la desigualdad **x.z** < **y.z** no será equivalente a la primera (Sichinel, 2022).

Por otra parte, los PEM revelaron indicios de competencia matemática para la enseñanza relacionada con la subvertiente ***restringir y extender*** cuando seleccionaron las tareas, **extractos #1** y **#2**. Los PEM tuvieron que restringir, reducir el nivel de exigencia cognitiva de la segunda tarea después del juego de roles. Se dieron cuenta de que habían ampliado excesivamente el nivel de exigencia cognitiva de la primera tarea, ya que abordaba varios conceptos que eran imposibles de abordar con los estudiantes debido al tiempo asignado para implementar la clase. Como señalan Wilson y Heid (2011), "restringir en matemáticas significa definir los límites de una idea matemática específica" (p.14). Además, los PEM (N) y (H) ***generalizaron*** procedimientos válidos aplicados en la resolución de la primera tarea, como la propiedad de *monotonicidad de la adición*, para la resolución de la segunda tarea. Como esas autoras observan, la generalización implica identificar propiedades o procedimientos válidos de una actividad específica a un conjunto más amplio de actividades.

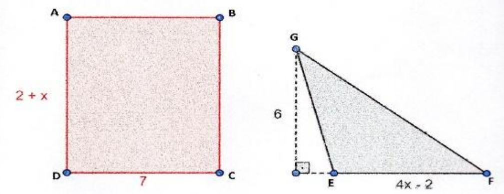
5.3 Indicios de la creatividad matemática del profesor

Durante las actividades realizadas en las ***aproximaciones a la práctica docente***, los PEM mostraron indicios de competencia matemática para la enseñanza y el aprendizaje de desigualdades matemáticas relacionadas con la ***creatividad matemática del profesor***: *representación, definición y transformación*. Por ejemplo, al preparar el plan de clase, los PEM presentaron dos formas de resolver la segunda tarea. Además de los procedimientos algebraicos, los PEM utilizaron un cuadro, **extracto #8**, en el que se probaron los valores de x para que el área del rectángulo fuera mayor que el área del triángulo. Vale la pena señalar que esta estrategia de presentar la resolución de la desigualdad matemática es laboriosa, restringida y propensa a errores. Pero, por otro lado, esta capacidad de presentar la resolución de la desigualdad matemática revela signos de competencia matemática para la enseñanza relacionada con la subvertiente ***representación,*** en el que las matemáticas se presentan de una forma menos común para los estudiantes (Wilson & Heid, 2011).

Figura 11: Resolución de la segunda tarea matemática por los PEM*

Tarefa Matemática (TM) (caso o espaço não seja suficiente, anexar ao plano)

Observe as figuras e encontre o valor de $x \in R$ de modo que a área do retângulo seja maior que a área do triângulo. Apresente a sua resposta por meio de diferentes tipos de representações (gráfica, conjunto numérico e intervalo numérico).



(Adaptado de Souza, 2019, p. 74)

Diferentes soluções da TM

Resolução 1

Condições de existência:

1) $14 + 7x > 0 \Rightarrow x > -2$

2) $4x - 2 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$

Cálculo de áreas:

$A_R = b \cdot h = 7 \cdot (2 + x) = 14 + 7x$

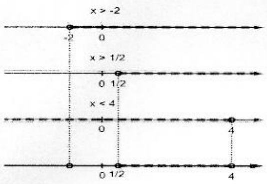
$A_T = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{(4x-2) \cdot 6}{2} = \frac{24x - 12}{2} = 12x - 6$

Extracto #7

Comparação de áreas:

$A_R > A_T \Rightarrow 14 + 7x > 12x - 6 \Rightarrow 20 > 5x \Rightarrow 4 > x$

Solução gráfica:



Solução por meio de intervalo numérico: $]\frac{1}{2}, 4[$

Solução por meio de conjuntos numéricos: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} < x < 4\}$

Resolução 2

Valor de x	A_R	A_T	$A_R > A_T$?	Obs.
x = 0	14	- 6	sim	impossível, A_T negativa
x = 0,5	17,5	0	sim	A_T *nula*
x = 0,5...	**17,5...**	**0,..**	**sim**	
x = 0,6	**18,2**	**1,2**	**sim**	
x = 1	**21**	**6**	**sim**	
x = 2	**28**	**18**	**sim**	
x = 3	**35**	**30**	**sim**	
x = 3,99...	**41,93...**	**41,88...**	**sim**	
x = 4	42	42	não	áreas iguais
x = 5	49	54	não	A_R menor

Conclusão: Obedecendo as condições de existência do problema, o valor x deve ser maior que ½. Além disso, para que a área do retângulo seja maior que a área do triângulo, o valor de x precisa ser menor que 4. Dessa forma, valor de x que satisfaz a solução do problema pertencer o intervalo $\frac{1}{2} < x < 4$, sendo x um número pertencente ao conjunto dos números reais.

Extracto #8

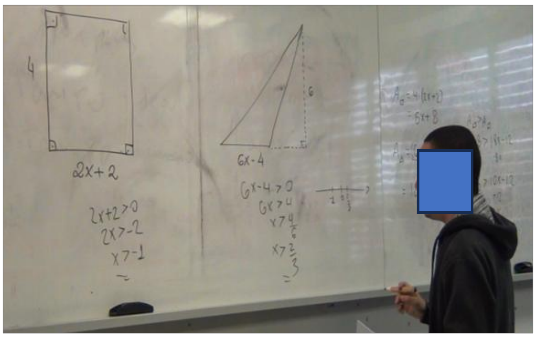
*Esta resolución es parte constitutiva del plan de clase elaborado por los PEM.

Fuente: Datos de la investigación

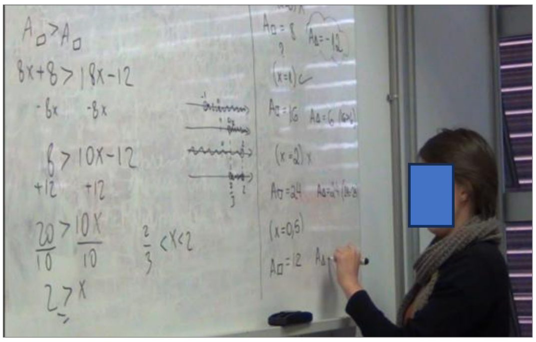
Además, PEM (N) y (H) revelaron signos de competencia matemática para la enseñanza relacionada con la subvertiente ***definiciones*.** Por ejemplo, cuando se les pregunta: *¿Cuál fue su razonamiento para la resolución de la segunda tarea matemática?*? (Formador, 4/10/2022). Los PEM respondieron, **extracto #7**, "*Primero tenemos que calcular el área del cuadrado y del triángulo en función de x, y luego resolvemos la desigualdad matemática"* (PEM (N) y (H), 4/10/2022). El dominio de los conceptos de áreas de figuras planas en los PEM, así como otros aplicados por todos los PEM a lo largo de las ***aproximaciones a la práctica docente***, como la propiedad de *monotonicidad de la adición y la multiplicación*, nos conducen a las palabras de Wilson y Heid (2011): "Los profesores de matemáticas deben poder utilizar la definición para resolver preguntas matemáticas" (p. 15).

Respecto a los indicios de competencia matemática para la enseñanza relacionada con la subvertiente ***transformación***, estos fueron revelados por los PEM (N) y (H) durante la verificación de la condición de existencia de las expresiones (2 + x), lado del rectángulo y (6x – 4), base del triángulo. En un principio, PEM (N) y (H) utilizaron el razonamiento deductivo (Mata-Pereira & Ponte, 2018), **extracto #9**, para verificar la condición de existencia de expresiones a través de la intersección de intervalos numéricos. De inmediato, **extracto #10**, utilizaron el razonamiento inductivo (Mata-Pereira & Ponte, 2018) para verificar la condición de existencia de las mismas expresiones numéricas.

Figura 12: Resolución de la segunda tarea matemática por los PEM



Extracto #9



Extracto #10

Fuente: Datos de la investigación

Esta capacidad de modificar, transformar y manipular las matemáticas muestra la fluidez de este aspecto en la práctica docente de estos PEM (Wilson & Heid, 2011).

6 Discusión de los resultados

Durante la selección y resolución de tareas, los PEM mostraron signos de competencia matemática para la enseñanza en relación con el ***noticing matemático del profesor***. Los PEM hicieron ***conexiones dentro de las matemáticas mismas***, integrando conceptos de álgebra y geometría en las tareas, y reconociendo ***formas simbólicas válidas*** durante la resolución de tareas. Por ejemplo, encontraron que el método inductivo se restringía a verificar la condición de existencia de las expresiones presentes en las figuras. Como recordó uno de los PEM: "*Esta estrategia es restringida, realmente hay que hacer la intersección entre las líneas rectas.*" (PEM (L), 4/10/2022). Además, los PEM notaron similitudes y diferencias en ***estructuras matemáticas****,* en los cuales la resolución de las tareas requirió formas complejas de pensamiento y razonamiento dado los diferentes conceptos que abordaban, tales como: desigualdades matemáticas de 1er y 2do grado, estudio de signos de funciones afines y cuadráticas, intersección de intervalos numéricos y conceptos relacionados con cantidades y medidas: área de figuras planas: trapezoide y paralelogramo y medidas.

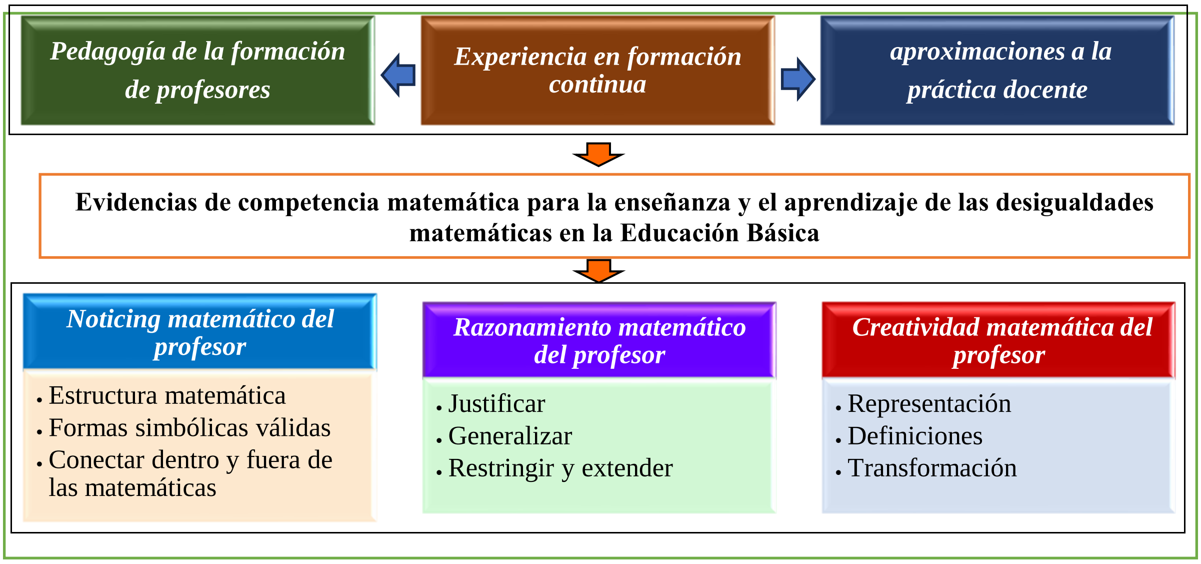
Durante el juego de roles de clase, los PEM también revelaron evidencia de competencia matemática para la enseñanza y el aprendizaje de desigualdades matemáticas relacionadas con el ***razonamiento matemático del profesor***. Los PEM presentaron argumentos basados en sus antecedentes académicos y profesionales, a veces formales o no, que ***justificasen*** el uso de procedimientos, propiedades y definiciones matemáticas para resolver tareas. Vale la pena recordar que, en el contexto de ***aproximaciones a la práctica docente***, las justificaciones siempre han ocurrido en un proceso social, basado en el conocimiento público en el campo de las matemáticas, como fue el caso en el que el formador explicó formalmente a los PEM la propiedad de *monotonicidad de la adición y la multiplicación* de números reales.

Además de justificar, los PEM también transportaron conceptos, definiciones, propiedades y procedimientos válidos para resolver una tarea a otra. Esta capacidad de generalizar, característica de la formación académica de estos PEM, es un proceso fundamental del razonamiento matemático que implica la abstracción y extensión de conceptos matemáticos a situaciones más amplias y diversas (Mata-Pereira & Ponte, 2018). Al resolver la primera tarea, por ejemplo, los PEM reconocieron la importancia de la intersección entre rectas para verificar la condición de existencia de las expresiones algebraicas presentes en los lados del paralelogramo y del trapezoide. Posteriormente, aplicaron estos procedimientos a las expresiones algebraicas presentes en los lados del cuadrado y el triángulo en la segunda tarea. La selección y puesta en escena de las tareas mostró a los PEM que ***restringir* y *extender*** son partes constituyentes importantes del razonamiento matemático de los profesores y que deben mejorarse constantemente mediante diferentes tipos de tareas matemáticas.

Para la elaboración del plan de clase, los PEM aportaron ideas, estrategias y procedimientos válidos de reuniones anteriores, selección de tareas y juego de roles de las clases, para cumplir con los elementos constitutivos del plan: objetivo de la clase, dominio matemático previo que necesitan los estudiantes para resolver el tarea problemática, proponer diferentes resoluciones para la tarea, anticipar errores que los estudiantes puedan cometer al resolver la tarea, anticipar preguntas de los estudiantes mientras resuelven la tarea, seleccionar materiales didácticos para resolver la tarea, organizar el espacio y el tiempo de la sala para implementar la tarea. En este contexto, los PEM eran competentes en la selección de tareas matemáticas menos comunes (***representación***), involucrando las desigualdades matemáticas con áreas de figuras planas. Además, recurrieron a ***definiciones*** para resolver la tarea propuesta en el plan de clase, además de presentar diferentes tipos de representaciones para la resolución de las tareas: conjuntos numéricos, representación gráfica e intervalos numéricos, lo que demuestra la capacidad de los PEM para ***transformación*** de una representación a otra.

Así, brevemente, Figura 13 presenta los signos de competencia matemática para la enseñanza y el aprendizaje de las desigualdades matemáticas manifestadas por los PEM durante la realización de las prácticas docentes deliberadas desarrolladas en las ***aproximaciones a la práctica docente***.

Figura 13: Indicios de competencia matemática reveladas por los PEM



Fuente: Elaboración propia

Como podemos ver, las subvertientes *argumentación matemática* perteneciente a la vertiente ***noticing matemático del profesor*** y la subvertiente *conjetura* perteneciente a la vertiente ***razonamiento matemático del profesor*** no fueron identificadas en este estudio. La *argumentación matemática* se refiere a la capacidad del docente para percibir la forma en que los estudiantes presentan sus argumentos durante las actividades matemáticas. En las ***aproximaciones a la práctica docente*** los PEM no tuvieron contacto con los estudiantes. La subvertiente *conjetura*, a su vez, suele basarse en la identificación de patrones tras una fase informal de exploración de ejemplos específicos (Wilson & Heid, 2011), lo que tampoco ocurrió en este estudio.

Antes de cerrar este artículo, resaltamos que el público objetivo y el contexto en el que se realizó este estudio no permiten generalizaciones a otros escenarios de formación docente. Por lo tanto, instamos a los lectores a tener cuidado al considerar las diferencias contextuales y utilizar estos hallazgos como *insights* para nuevas investigaciones en el contexto de la formación de PEM sobre desigualdades en la enseñanza y el aprendizaje en la Educación Básica. Por otro lado, como destacan Grossman *et al.* (2009), esta idea de dotar a los docentes de habilidades para los elementos fundamentales de la labor docente no se da única y exclusivamente a través de ***aproximaciones a la práctica docente***. Para respaldar este argumento, complementamos nuestra investigación con otra práctica deliberada: ***representaciones de la práctica*** (Alves da Silva & Pazuch, en prensa).

7 Conclusión del estudio

Mediante lo presentado en este estudio, inferimos que se logró el objetivo de este artículo, y que las ***aproximaciones a la práctica docente*** como propuestas acá se configuran como una ***práctica docente de alto apalancamiento***. Estas prácticas ayudaron a los PEM a integrar su pensamiento matemático relacionado con las desigualdades matemáticas en la Educación Básica, así como a mejorar sus habilidades relacionadas con las actividades matemáticas, enfocándose en: (i) reconocer e interpretar similitudes y diferencias en la estructura matemática y formas de expresión de los estudiantes durante actividades en el aula (***noticing matemático del profesor);*** (ii) desarrollar fundamentos matemáticos, lógicos o generalizaciones (***razonamiento matemático del docente***); y (iii) desarrollar enfoques para la enseñanza de las matemáticas que faciliten la comprensión de los estudiantes (***creatividad matemática del profesor***). Además, la investigación contribuyó a una práctica pedagógica más intencional basada en la competencia matemática para la enseñanza y el aprendizaje de las desigualdades matemáticas en la Educación Básica.

En este contexto, inferimos que la práctica docente de alto apalancamiento concebida como *aproximaciones a la práctica docente* ofreció oportunidades de aprendizaje profesional para los PEM, con el objetivo de acercarlos a los elementos fundamentales de la labor docente, permitiéndoles experimentar, en un primer momento, situaciones de enseñanza de forma simulada o en entornos controlados para su posterior implementación en aulas reales. El enfoque en prácticas docentes de alto apalancamiento, como se muestra en este estudio, contribuye a la construcción de una formación docente continua más equitativa e inclusiva, ya que estas prácticas están dirigidas a satisfacer las necesidades de enseñanza y aprendizaje de todos los PEM, independientemente de sus habilidades o contextos.

Por lo tanto, se espera que los resultados de esta investigación puedan servir como *insight* para futuras investigaciones en el sentido de construir la competencia matemática para la enseñanza y el aprendizaje de las desigualdades matemáticas de los futuros profesores de matemáticas. Este contenido matemático merece más atención por parte de educadores e investigadores, y las prácticas docentes de alto apalancamiento, diseñadas como *aproximaciones a la práctica docente*, la selección de tareas matemáticas, el juego de roles de clase y el desarrollo del plan de clases pueden contribuir al mejoramiento de sus prácticas docentes en torno a esta temática en la Educación Básica.

Referencias

Alvarenga, K. B. (2013). *O que dizem as pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem de inequações*. [Tese de Doutorado em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo].

Anggoro, A. & Prabawanto, S. (2019). Undergraduate students conceptual understanding on rational inequalities. *Journal of Physics: Conference Series*, 1211.

Ball, D. L. & Cohen, D. K. (1999). Developing practice, developing practitioners: toward a practice-based theory of professional education. In G. Sykes & L. Darling-Hammond (Eds.), *Teaching as the learning profession: Handbook of policy and practice* (pp. 3-32).

Ball, D. L.; Forzani, F. M. (2009). The work of teaching and the challenge for teacher education. *Journal of teacher education*, *60*(5). 497-511.

Ball, D. L., Sleep, L., Boerst, T. A. Bass, H. (2009). Combining the development of practice and the practice of development in teacher education. *The Elementary School Journal*, *109*(5), 458-474.

Banks, B., Sims, S., Curran, J., Meliss, S., Chowdhury, N., Altunbas, H. G., Alexandri, N., MacTavish, L. & Isabel Instone (2024). Decomposition and recomposition: effects on novice teachers' enactment and transfer of behavior management practices. *Ambition Institute.* London, p. 1 – 55.

Barbosa, J. C. (2013). Designing written tasks in the pedagogic recontextualising field proposing a theoretical model. In: BERGER, Margot. (Ed.). *Proceedings of the Seventh International Mathematics Education and Society Conference*, Cidade do Cabo: Africa do Sul, p. 213-223.

Bogdan, R. C. & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Editora Porto.

Borko, H., Whitcomb, J. A. Byrnes, K. (2008). Genres of research in teacher education. In Marilyn Cochran-Smith, Sharon Feiman-Nemser, D. John McIntyre & Kelly E. Demers (Associate editor). *Handbook of research on teacher education: Enduring questions in changing contexts.*

Brasil. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular.* Brasília, 2017, 2018.

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da matemática: práticas e desafios. *Revista Educação Matemática*, *115*, 11-17.

Cunha, H. M. (2000). Saberes Profissionais de Professores de Matemática: dilemas e dificuldades na realização de tarefas de investigação. *Revista Científica do Politécnico de Viseu,* "Millenium", *17*, 1-58.

Ferreira, L. G. (2017). Desenvolvimento profissional e carreira docente: diálogos sobre professores iniciantes. *Acta Scientiarum Education*, *39*(1), 9-89.

Forzani, F. M. (2014). Understanding "Core Practices" and "Practice-Based" Teacher Education: Learning from the Past. *Journal of Teacher Education*. American Association of Colleges for Teacher Education, *65*(4), 357-368.

Garcez, A., Duarte, R. Eisenberg, Z. (2011). Produção e análise de vídeo gravações em pesquisas qualitativas. *Revista Educação e Pesquisa*, *37*(2), 249-262.

Ginzburg, C. (1989). *Mitos, emblemas e sinais: morfologia e história* (Federico Carotti, Trad.).

Companhia das Letras.

Grossman, P., Compton, C., Igra, D., Ronfeldt, M., Shahan, E. Williamson, P. W. (2009). Teaching practice: a cross-professional perspective. *Teachers College Record*, *111*(9), 2055-2100.

Halmaghi, E. F. (2011). Undergraduate student's conceptions of inequalities. 219 p.

Doctor of Philosophy - Faculty of Education. Simon Fraser University, Spring.

Iezzi, G. Murakami, C. (2019). *Fundamentos de matemática elementar conjuntos e funções: novas questões de vestibulares* (vol.1). Atual.

Kennedy, M. (2016). Parsing the Practice of Teaching. *Journal of Teacher Education, 67*(1), 6–17.

Kilpatrick, J.; Swafford, J.; Findell, B (2001). Adding it up: Helping children learn mathematics. *National Research Council* - Mathematics Learning Study Committee, Center for Education, Division of Behavioral and Social Sciences and Education. National Academy Press.

Kwakman, K. (2003). Factors affecting teachers' participation in professional learning activities. *Teaching and Teacher Education*, *19*(2), 149-170.

Lloyd, G. M., Rice, C. L. & McCloskey, A. V. (2019). Opportunities for professional learning about mathematics instruction: the role of joint work in student-teaching triads. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *23*(5), 499-525.

Lopes, L. A. Rhoden, J. L. M. (2023). Professor iniciante: os desafios do início da carreira, *Revista de Iniciação à Docência*, Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, *8*(1), 1-17.

Loughran, J. J. (2010). A pedagogy of teacher education. In P. Peterson, E. Baker B. McGaw (Eds.), *International Encyclopedia of Education* (3rd edition, pp. 587-591). Elsevier.

Marconi, M. A. Lakatos, E. M. (2003). Fundamentos da metodologia científica (5. ed.). Atlas.

Mata-Pereira, J. & Ponte, J. P. (2018). Promover o Raciocínio Matemático dos Alunos: uma investigação baseada em design. *Bolema*, Rio Claro (SP), *32*(62), 781-801.

Matsumoto-Royo, K., Ramírez-Montoya, M. S. (2021). Core practices in practice-based teacher education: a systematic literature review of its teaching and assessment process. *Studies in Educational evaluation, 70,* 1-13.

Melhuish, K., Dawkins, P.C., Lew, K. Strickland, S. K. (2022). Lessons Learned About Incorporating High-Leverage Teaching Practices in the Undergraduate Proof Classroom to Promote Authentic and Equitable Participation. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *8*(3), p. 1-34.

Mineiro, R. M. (2019). Estudo das três dimensões do problema didático de inequações. [Tese de doutorado em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo].

Moraes, R. (2003). Uma tempestade de luz: a compreensão possibilitada pela análise textual discursiva. *Ciência e Educação*, *9*(2), 191-211.

Mosston, M. Ashworth, S. (2008). *Teaching physical education.* Spectrum Institute for Teaching and Learning.

Powell, A. B.; Francisco, J. M.; Maher, C. A. (2004). Uma abordagem à análise de dados de vídeo para investigar o desenvolvimento das ideias matemáticas e do raciocínio de estudantes. *Bolema*, *17*(1), 1-47.

Ponte, J. P. (2017). Tarefas no ensino e na aprendizagem da matemática. In: Investigações matemáticas e investigações na prática profissional. Livraria da Física, São Paulo.

Proficiência. (2024). In *Origem da palavra*. https://origemdapalavra.com.br/?s=aprender.

Ribeiro, A. J. Ponte, J. P. (2019). Professional learning opportunities in a practice-based teacher education programme about the concept of function. *Acta Scientiae*, *21*(2), 49-74.

Santos, P. F. Costa, V. G. (2020). Paradigma indiciário: contribuições para a pesquisa em educação matemática. *EDUCA – Revista Multidisciplinar em Educação*, *7*, 1298-1314.

Seriani, R.; Silva, D. A.; Rosa, C. A. S. (2017). Professores de matemática no início da carreira docente: implicações à formação inicial. *Revista Iberoamericana de Educação Matemática*, *13*(49),181-199.

Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A. & Silver, E. A. (2 0 0 9 . *Implementing standards-based mathematics instruction:* a casebook for professional development. 2ª ed. New York: Teachers College Press.

Steele, D. F. (2001). Vozes entusiastas de jovens matemáticos. *Educação e Matemática*, (62), 39-42.

Sztajn, P., Heck, D. J., Malzahn, K. A., Dick, L.K. (2020). Decomposing practice in teacher professional development: Examining sequences of learning activities. *Teaching and Teacher Education*, *(91)*1, 1-53.

Vieira, V. L. (2021). Álgebra abstrata básica. Textuniversitários 8, v. I. Livraria da Física, São Paulo.

Wilson, P. S. Heid, M. K. (2011). *Framework for mathematical proficiency for teacher.* Boucke: Center for Mathematics Teaching and Learning/The Pennsylvania State University.